Løsningsforslag Eksamen MEK4300 (1)
13/6-2014

1a) Vi har $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ som hastighetsvektor
$p(\mathbf{x},t)$ som trykk
ρ, ν som konstant tetthet og kinematisk viskositet.

Konservering av masse og Newton's 2 lov gir da

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$$

Som kalles Navier-Stokes ligninger.

Grensebetingelse: $\mathbf{u} = (0,0,0)$ No-slip ved veggen.

1b) Laminær strøm er rettlinjet og parallell med veggen. Hastigheten forenkles da $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = (0, 0, u(x,y))$

Det er ingen konveksjon eller tidsavhengighet og vi har i z-retning:

$$(1) \qquad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 u$$

$u = 0$ ved veggen

1c) Trenger en variasjonsformulering.
Bruker testfunksjon v, ganger denne med (1) og integrerer over domenet Ω.
Benytter Γ for den eksterne grensen(veg

$$\int 0 = -\frac{1}{\rho}\nabla_z p \cdot v + \nu \nabla^2 u \cdot v \, d\Omega$$

$$0 = -\int \frac{1}{\rho}\nabla_z p \cdot v \, d\Omega + \int v \cdot \nabla u \cdot n \, d\Gamma - \nu \int \nabla v \cdot \nabla u \, d$$

Vi har dirichlet grensebetingelse på Γ

Så vi ender opp med

$$0 = -\int \frac{1}{\rho}\nabla_z p \cdot v \, d\Omega - \nu \int \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega$$

Fenics implementering:

```
from dolfin import *
mesh = Mesh("Mymesh") *les inn et mes
V = FunctionSpace(mesh, 'CG', 1)
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
gradp = Constant(-1)   : Sett en eller ann
                         trykkgradient
ν = Constant(0,01)     : Sett viskositet
```

1c) fortsatt.

```
F = inner(grad p, v)dx + ν·inner(grad(u), grad(
u_ = Function(V)
bc = DirichletBC(V, 0, "on_boundary")
solve(lhs(F) == rhs(F), u_, bc)
```

1d) Se lecture notes eller White s. 400.

1e)
$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$$
$$p = \bar{p} + p'$$

Midler masse-konservering

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}} = 0$$

kommutering gir

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$$

Midler N-S. Bruker først $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{u}$

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}}$$

Kommutering:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla\cdot\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho}\nabla\bar{p} + \nu\nabla^2\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{f}}$$

7e)
$$\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \overline{(\overline{\mathbf{u}}+\mathbf{u}')(\overline{\mathbf{u}}+\mathbf{u}')}$$
$$= \overline{\overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}}} + \cancel{\overline{\mathbf{u}'\overline{\mathbf{u}}}} + \cancel{\overline{\overline{\mathbf{u}}\mathbf{u}'}} + \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$$
$$= \overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \nabla\cdot\left(\overline{\mathbf{u}}\,\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}\right)$$
$$= (\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{u}} + \nabla\cdot\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$$

RANS:
$$\frac{\partial\overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho}\nabla\overline{p} + \nu\nabla^2\overline{\mathbf{u}} - \nabla\cdot\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} + \overline{\mathbf{f}}$$
$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}} = 0$$

7f) Vi har $\overline{\mathbf{u}}(x,y,z,t) = (0, 0, \overline{w}(x,y))$

Kun én komponent i z-retning

Rettlinjet parallell strøm uten tidsavhengighet. Ingen $\overline{\mathbf{f}}$.

$$\frac{\partial\overline{w}}{\partial z} = 0 \quad \text{fra massekonservering}$$

1f) Momentum likning z-retning

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \overline{w} - \nabla \cdot \overline{w'\mathbf{u}'}$$

Bruker $\mathbf{u} = (u, v, w)$

Har da

$$\nabla \cdot \overline{w'\mathbf{u}'} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{w'u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{w'v'}\right) + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'w'}\right)}$$

Siden det er ingen endring i z-retning. Likningen for $\overline{w}$ blir:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \overline{w} - \frac{\partial}{\partial x}\overline{w'u'} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{w'v'}$$

med $\overline{w} = 0$ på veggen.

Vi har 1 likning, men 3 ukjente: $\overline{w}, \overline{w'u'}, \overline{w'v'}$

For å løse dette trenger vi flere likninger. En eddy-viskositetsmodell er generelt:

$$\overline{u_i' u_j'} = 2\nu_T \overline{S}_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

der ν_T = turbulent viskositet

k = kinetisk energi

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)$$

Vi trenger kun modeller der $i = 3$ og $j = 1$ eller 2. Dvs at vi trenger ikke k

$$\overline{w'u'} = 2\nu_T \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)$$

$$\overline{w'u'} = \nu_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}$$

$$\overline{w'v'} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)$$

$$\overline{w'v'} = \nu_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$$

ν_T må også modelleres. Med en mixing length modell har man

$$\nu_T = \rho l^2 |\bar{S}_{ij}|$$

der l er en mixing length som kan settes som en funksjon av avstanden til veggen.

ν_T kan også modelleres ved å innføre enda flere parametere, for eksempel k og ε (dissipasjon). Da er

$$\nu_T \sim \frac{k^2}{\varepsilon}$$

2a) Viskøst stress er $\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

altså linjært proporsjonalt med strain

2b)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta$$

$u(y,0) = 0$ Initialbetingelse

$u(\pm 1, t) = 0$ Grensebetingelse

2c) Stasjonær hastighet $\bar{u}(y)$

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \beta = 0$$

$$\bar{u} = -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\nu} y^2 + Ay + B$$

Grensebet:

1) $0 = -\frac{\beta}{2\nu} + A + B$ $y = 1$

2) $0 = -\frac{\beta}{2\nu} - A + B$ $y = -1$

2c) 1) $A = \frac{\beta}{2\nu} - B$

2) $0 = -\frac{\beta}{2\nu} - \left(\frac{\beta}{2\nu} - B\right) + B$

$$2B = \frac{\beta}{\nu}$$

$$B = \frac{\beta}{2\nu}$$

$$A = 0$$

$$\underline{\underline{\bar{u}(y) = \frac{\beta}{2\nu}\left(1 - y^2\right)}}$$

2d) $u(y,t) = v(y,t) + \bar{u}(y)$

Setter inn i likning for $u(y,t)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}}_{= -\beta} + \beta$$

(1) $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

Grensebetingelser $v(\pm 1, t) = 0$

Initialbetingelse $v(y,0) = -\bar{u}$

2a)

Løser ved separasjon av variable

$$v(y,t) = V(y)T(t)$$

Setter inn i (1) og separerer

$$V\dot{T} = \nu T V''$$

$$\frac{\dot{T}}{\nu T} = \frac{V''}{V} \left(= -\lambda^2\right)$$

Venstre side kun avhengig av t og høyre side y, altså må begge sider være konstant. Konstanten må være negativ for at vi skal kunne få fysisk realistiske løsninger.

Løser trivielt for T:

$$\frac{\dot{T}}{\nu T} = -\lambda^2$$

$$T(t) = e^{-\nu\lambda^2 t}$$

2d) Løser for V:

$$V'' + \lambda^2 V = 0$$

har generell løsning

$$V(y) = A\cos(\lambda y) + B\sin(\lambda y)$$

Grensebetingelse $V(\pm 1) = 0$

Velger $\lambda = \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, $k = 1, 2, 3 \dots$

slikt at $\cos(\pm\lambda_k) = 0$

og $B = 0$

Superposisjon gir

$$V(y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\lambda_k y)$$

Vi finner A_k fra initialbetingelse

$$U(y,0) = V(y)T(0) = V(y) = -\bar{u}$$

$$-\bar{u} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\lambda_k y)$$

2d) Ganger med $\cos(\lambda_m y)$ og integrerer fra $y=-1$ til $y=1$:

$$\int_{-1}^{1} -\bar{u}\cos(\lambda_m y)\,dy = \int_{-1}^{1}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\lambda_k y)\cos(\lambda_m y)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} A_m \cos^2(\lambda_m y)\,dy$$

$$A_m = \frac{-\int_{-1}^{1}\bar{u}\cos(\lambda_m y)\,dy}{\int_{-1}^{1}\cos^2(\lambda_m y)\,dy}$$

Har at

$$\int_{-1}^{1}\cos^2(\lambda_m y)\,dy = \frac{\cos(\lambda_m y)\cancel{\sin(\lambda_m y)}}{\cancel{\lambda_m}}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\sin^2(\lambda_m y)\,dy$$

$$\int_{-1}^{1}\cos^2(\lambda_m y)\,dy = \int_{-1}^{1}(1-\cos^2(\lambda_m y))\,dy$$

$$2\int_{-1}^{1}\cos^2(\lambda_m y)\,dy = 2$$

$$\underline{\int_{-1}^{1}\cos^2(\lambda_m y)\,dy = 1}$$

2d) Trenger nå bare:

$$A_m = \int_{-1}^{1} \bar{u} \cos(\lambda_m y)\, dy \quad , \quad \text{der} \quad \bar{u} = \frac{3}{2\nu}(1-y^2)$$

$$A_m = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2\nu}(1-y^2)\cos(\lambda_m y)\, dy$$

der det er oppgitt at

$$\int_{-1}^{1} (1-y^2)\cos(\lambda_m y)\, dy = \frac{4(-1)^{m-1}}{\lambda_m^3}$$

Altså har vi

$$A_m = \frac{3}{2\nu} \frac{4(-1)^{m-1}}{\lambda_m^3} \quad , \quad m = 1, 2, 3 \ldots$$

$$\underline{A_m = \frac{2\,3(-1)^{m-1}}{\nu \lambda_m^3}}$$

Og dermed

$$v(y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,3(-1)^{k-1}}{\nu \lambda_k^3} \cos(\lambda_k y)\, e^{-\nu \lambda_k^2 t}$$

Som satt inn gir:

$$\underline{\underline{u(y,t) = v(y,t) + \bar{u}(y)}}$$