UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 3300/4300 — Viskøs strømning og turbulens.
Eksamensdag:	Torsdag 15. desember 2005.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Gjennom et sirkulært rør med radius $a(z)$ som varier med aksial posisjon z og gitt som

$$a(z) = a_0 + a_1 \sin(kz) \tag{1}$$

strømmer en viskøs væske med konstant kinematisk viskositet ν og konstant tetthet ρ. ($a_0 \gg a_1$, $ka_1 \ll 1$.)

Strømningen er laminær og skal beskrives i sylinderkoordinater (r, θ, z) med tilhørende hastighetskomponenter (u, v, w). Volumstrømmen Q_0 gjennom røret er konstant (uavhengig av z og tiden t). Tyngdens virkning skal neglisjeres. Strømningen er aksesymmetrisk og $v = 0$. Hastighetskomponenten i z-retningen $w(r, z)$ kan approksimativt skrives som

$$w(r, z) = W_0(z) \left(1 - \left(\frac{r}{a(z)} \right)^2 \right) \tag{2}$$

(Fortsettes side 2.)

a) Finn $W_0(z)$ uttrykt ved Q_0 og $a(z)$.

Av kontinuitetsgrunner må det oppstå en radiell hastighetskomponent $u(r,z)$.

b) Finn $u(r,z)$.

c) Finn trykkfallet $\frac{\partial p}{\partial z}$ som må til for å drive $w(r,z)$. (Hint: Det er tilstrekkelig at $\frac{\partial p}{\partial z}$ beregnes fra den lineariserte differensiallikningen som her kommer til anvendelse.)

Kontinuitets-likning og **momentum**-likninger i sylinderkoordinater (r,θ,z) med tilhørende hastighetskomponenter (u,v,w) er gitt som:

Kontinuitets-likningen

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

r-momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \tag{4}$$

θ-momentum

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)v + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \tag{5}$$

z-momentum

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w \tag{6}$$

der

$$\mathbf{u}\cdot\nabla = u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{7}$$

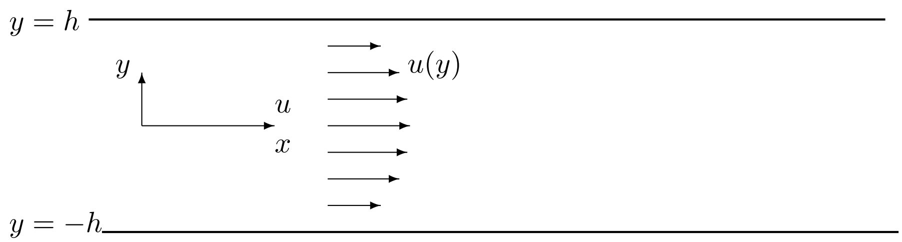
og

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{8}$$

Oppgave 2.

Rommet mellom to plan $y = h$ og $y = -h$ (se figur 2) er fylt med en væske som har konstant tetthet ρ, konstant viskositet ν og konstant termisk diffusivitet κ. Tyngdens virkning skal neglisjeres. Et kartesisk (x,y)-koordinatsystem som væskens hastighet (u,v) skal refereres til, er indikert i figur 2.

(Fortsettes side 3.)



Figur 2 viser skjematisk væskerommet mellom to plan $y = h$ og $y = -h$ som er omtalt i teksten. x-komponenten av hastigheten er også indikert

Væsken mellom planene strømmer i x-retningen og en **skal regne** med konstant hastighet U_0 over tversnittet. Det vil si

$$u(y) = U_0 \tag{9}$$

For $x \leq 0$ er temperaturen T_0 i væsken konstant. Ved $x = 0$ er det et sprang i veggtemperaturen slik at for $x > 0$ er veggtemperaturen

$$T(x > 0, y = \pm h) = T_w = T_0 - \Delta T \tag{10}$$

der ΔT er en konstant. Grensebetingelsen ved $x = 0$ kan dermed skrives

$$T(x = 0, y) = T_w + \Delta T \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\frac{y}{h}\right] \tag{11}$$

For $x > 0$ kan temperaturutviklingen i væsken approksimativt beskrives med likningen

$$U_0 \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{12}$$

a) Finn temperaturfordelingen i væsken for $x > 0$. (Hint: Innfør $T(x,y) = T_w + \Delta T\, \Theta(x,y)$ og finn $\Theta(x,y)$)

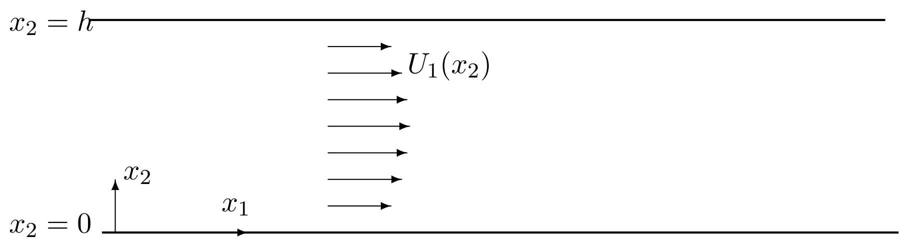
b) Foklar hvilke fysiske effekter/fenomener som er neglisjert i den approksimative likningen, likning (12), for temperaturutviklingen i væsken i forhold til den eksakte likningen for samme.

Oppgave 3.

Et statistisk stasjonært turbulent hastighetsfelt mellom to plan $x_2 = 0$ og $x_2 = h$ (se figur 3) er betegnet med $\tilde{u}_i(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ og det tilhørende trykkfelt

(Fortsettes side 4.)

$\tilde{p}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$. Tyngdens virkning skal neglisjeres.



Figur 3 viser skjematisk væskerommet mellom to plan $x_2 = 0$ og $x_2 = h$ som er omtalt i teksten. x_1-komponenten av hastigheten er også indikert.

Ved Reynolds dekomposisjon kan feltene skrives

$$\tilde{u_i}(\mathbf{x}, t) = U_1(x_2) + u_i(\mathbf{x}, t) \tag{13}$$

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = P(x_1, x_2) + p(\mathbf{x}, t) \tag{14}$$

Det er gitt at

$$\frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -\beta \tag{15}$$

der $\beta > 0$ og konstant.

a) Finn veggspenningen τ_w uttrykt ved β og h.

b) Vis at

$$[\overline{u_1 u_2}]_{y_+ \to 0} \to c y_+^3 \tag{16}$$

der $y_+ = x_2 u_* / \nu$, $u_* = \sqrt{(\tau_w/\rho)}$, og c er en ukjent konstant. ($\overline{(\cdot)}$ betyr tidsmidling.)

Anta som kjent at for $30 < y_+ < 1000$ er

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B \tag{17}$$

en approksimativ løsning for $u_+ = U_1/u_*$ der κ og B er modell-parametre.

c) Bruk relasjonene (16) og (17), samt at $u_+(y_+)_{y_+ \to 0} \to y_+$, til å konstruere et approksimativ, uniformt gyldig uttrykk for $y_+ = f(u_+)$ i området $0 < y_+ < 1000$. (Hint: Spaldings metode).

SLUTT