UNIVERSITETET I OSLO

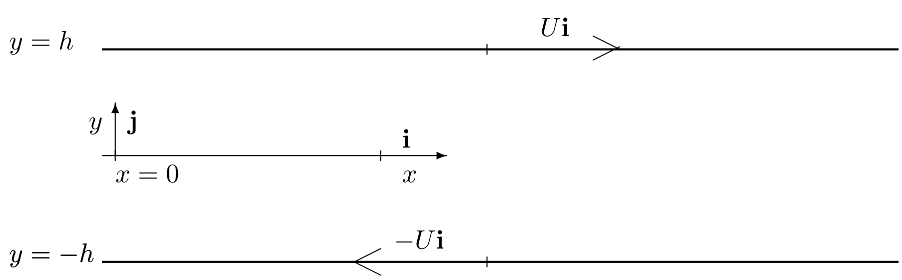
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 3300/4300/9300 — Viskøs strømning og turbulens.
Eksamensdag:	Tirsdag 19. desember 2006.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Rommet mellom to plan $y = h$ og $y = -h$ (se figur 1) er fylt med et homogent fluid med konstant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν.



Figur 1 viser skjematisk rommet mellom to plan $y = h$ $y = -h$ omtalt i teksten. Det kartesiske (x, y)-koordinatsystemet referert til i teksten er også vist i figuren.

Det er etablert et fullt utviklet, tidsuavhengig hastighetsfelt ved at planet $y = h$ har hatt hastigheten $U\mathbf{i}$ og planet $y = -h$ har hatt hastigheten $-U\mathbf{i}$ (se figur 1) i meget lang tid. U er konstant. Trykket er konstant.

a) Finn det etablerte hastighetsfeltet.

(Fortsettes side 2.)

Ved tiden $t = 0$ stanses begge planene instantant og forblir i ro for $t > 0$.

b) Skriv ned initialbetingelsene og randbetingelsene for den bevegelsen fluidet får for $t > 0$.

c) Finn hastighetsfeltet i fluidet for $t > 0$.

Hint: Funksjonen $f(\eta)$ gitt ved

$$f(\eta) = \begin{cases} \eta & \text{for } -1 < \eta < 1 \\ 0 & \text{for } \eta = \pm 1 \\ f(\eta + 2) & \text{for alle } \eta \end{cases}$$

kan representeres ved en Fourier-rekke som

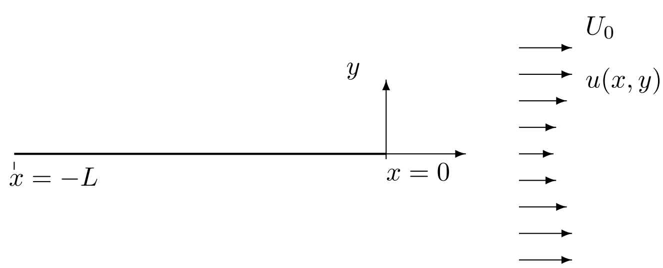
$$f(\eta) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(k\pi\eta) \tag{1}$$

Oppgave 2.

Hastighetsfordelingen $u(x, y)$ nedstrøms en flat plate i strøm er indikert i figur 2 og kan uttykkes

$$u(x, y) = U_0 - u_1(x, y) \tag{2}$$

der $u(x, y \to \pm\infty) \to U_0$ (*konstant*).



Figur 2 viser skjematisk en flat plate i et strømningsfelt. Plata ligger i planet $y = 0$ og strekker seg fra $x = -L$ til $x = 0$. Kjølvannsprofilet $u(x, y)$ er også indikert.

a) Verifiser at grensesjiktlikningene anvendt på denne kjølvannsstrømningen approksimativt gir

$$U_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \tag{3}$$

forutsatt $\mid u_1 \mid \ll U_0$.

(Fortsettes side 3.)

b) Verifiser at i kjølvannet gjelder approksimativt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x,y)dy = \text{konstant (uavhengig av } x) \tag{4}$$

forutsatt $\mid u_1 \mid \ll U_0$.

Anta at

$$u_1(x,y) = AU_0 x^m g(\eta) \tag{5}$$

$$\eta = Bx^n y \tag{6}$$

c) Finn similaritetseksponentene m og n.

Oppgave 3.

I et statistisk stasjonært turbulent strømningsfelt er hastighetskomponentene og trykkfeltet betegnet med $\tilde{u}_i(\mathbf{x},\mathbf{t})$ og $\tilde{p}(\mathbf{x},\mathbf{t})$, henholdsvis.

a) Innfør Reynolds dekomposisjon av feltene, utled Reynolds tidsmidlede momentum-likning og definer Reynolds-spenningene.

b) Skriv ned Boussinesq-modellen for Reynolds-spenningene og gi en kort forklaring på hva de enkelte leddene representerer fysisk.

c) Finn en dimensjonsriktig relasjon for

$$\nu_t = f(\epsilon, K) \tag{7}$$

der ν_t $(\frac{m^2}{s})$ er eddyviskositeten, ϵ $(\frac{m^2}{s^3})$ er dissipasjonsraten pr. masseenhet i turbulensen og K $(\frac{m^2}{s^2})$ er turbulent kinetisk energi pr. masseenhet.

SLUTT