UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 3300/4300 — Viskøs strømning og turbulens.
Eksamensdag:	Torsdag 18. desember 2003.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Matematisk formelsamling (K. Rottmann).

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Rommet mellom to koaksiale sylindre med radius a (ytre) og b (indre) (se figur 1.1) er fylt med en viskøs væske med konstant viskositet og konstant tetthet. Det går en væskestrøm

$$\boldsymbol{u}(r,\theta) = \boldsymbol{i}_r u(r,\theta) + \boldsymbol{i}_\theta v(r,\theta) \tag{1.1}$$

i rommet mellom sylindrene. Ved den ytre sylinderen $r = a$ er det gitt at

$$\int_0^\pi \boldsymbol{u}(a,\theta)\cdot \boldsymbol{i}_r a\, d\theta = Q_0 \tag{1.2}$$

For $\pi \le \theta \le 2\pi$ og $r = a$ er

$$\boldsymbol{u}(a,\theta) = \boldsymbol{i}_r U_0 \Big[\sin\theta + \tfrac{1}{5}\sin 3\theta\Big] \tag{1.3}$$

a) Finn U_0 når $\boldsymbol{u}(b,\theta) = 0$.

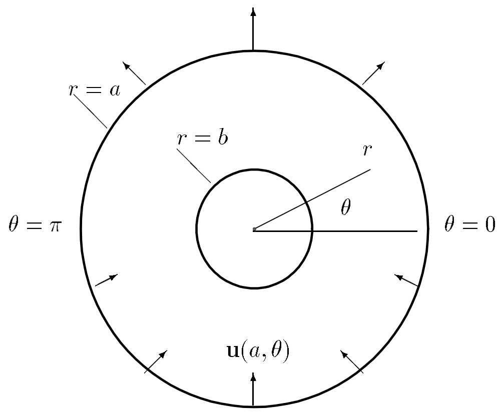
Det er også gitt at

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{i}_r \cdot \big[\rho \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u} - \underset{\sim}{\mathcal{P}}\,\big]_{r=a} a\, d\theta = \boldsymbol{M} \tag{1.4}$$

for denne tidsuavhengige strømningen. $\underset{\sim}{\mathcal{P}}$ er spenningstensoren.

(Fortsettes side 2.)

b) Finn kraften som virker på den indre sylinderen pr. meter lengde uttrykt ved $\boldsymbol{M}$ når $\boldsymbol{u}(b, \theta) = 0$.



Figur 1.1 viser problemets geometri

Oppgave 2.

Rommet mellom to parallelle plan $y = \pm h$ (se figur 2.1) er fylt med homogent fluid med konstant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν. For $t < 0$ er

$$\boldsymbol{u}(x, y, z, t) = 0 \tag{2.1}$$

$$p(x, y, z, t) = p_0 \qquad \text{(konstant)} \tag{2.2}$$

der $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ er hastighetsfeltet og $p(x, y, z, t)$ trykkfeltet. For $t \geq 0$ er

$$\nabla p = -c\,\boldsymbol{i} \tag{2.3}$$

der c er en positiv konstant og $\boldsymbol{i}$ enhetsvektor i x-retningen. Den gitte trykkgradienten (2.3) driver hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{u}(x, y, z, t) = u(y, t)\boldsymbol{i} \tag{2.4}$$

Randbetingelsen er

$$u(y = \pm h, t) = 0 \tag{2.5}$$

Initialbetingelsen er

$$u(y, t = 0) = 0 \tag{2.6}$$

Det antaes at

$$\lim_{t \to \infty} [u(y, t)] = U_0(y) \tag{2.7}$$

a) Finn hastigheten $U_0(y)$.

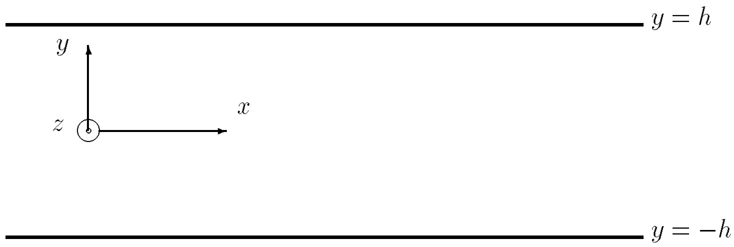
(Fortsettes side 3.)

b) Finn egenfunksjonene assosiert med det homogene problemet (svarer til $c = 0$) og bruk disse til å fremstille den generelle løsningen

$$u(y,t) = u_H(y,t) + U_o(y) \tag{2.8}$$

der $u_H(y,t)$ er løsningen av det homogene problemet. Det kan også antaes som kjent at for $-1 \leq \eta \leq 1$ er

$$1 - \eta^2 = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\eta\right] \tag{2.9}$$



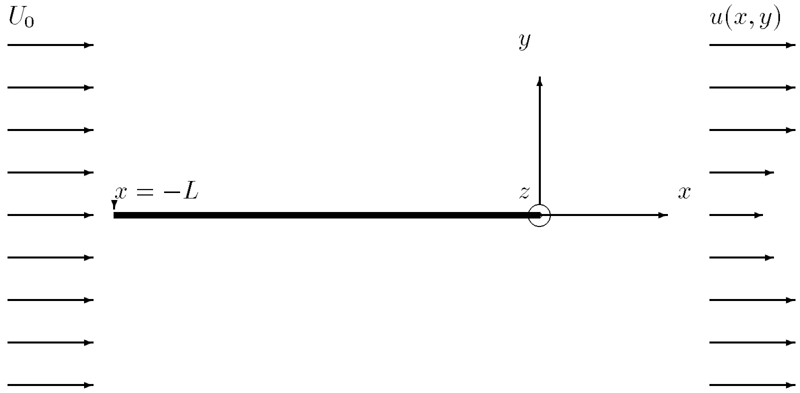
Figur 2.1 viser problemets geometri

Oppgave 3.

Hastigheten i x-retningen i kjølvannet nedstrøms en flat plate er $u(x,y)$, og

$$u(x,y) = U_0 - u_1(x,y) \tag{3.1}$$

hvor U_0 er den konstante og uniforme hastigheten inn mot plata (se figur). Væsken er viskøs med konstant kinematisk viskositet ν og konstant tetthet ρ.



Figur 3.1 viser skjematisk skisse av hastighetsprofiler og den flate plata.

(Fortsettes side 4.)

a) Forklar at for $u_1(x,y)$ gjelder approksimativt

$$U_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \tag{3.2}$$

i en slik kjølvannsstrømning.

Det antaes at løsningen av $u_1(x,y)$ er av formen

$$u_1(x,y) = Ax^m F(\eta) \tag{3.3}$$

der $\eta = Bx^m$. Forøvrig gjelder at

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x,y)dy = Q \tag{3.4}$$

hvor Q er en konstant uavhengig av x.

b) Bestem similaritetseksponentene m og n.

Oppgave 4.

For statistisk stasjonær turbulent strømning er Reynolds momentumlikning (i-te komponent) gitt som

$$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \overline{u_i u_j}) \tag{4.1}$$

der ρ er væskens konstante tetthet, μ væskens konstante dynamiske viskositet, $U_i(\boldsymbol{x})$ er i-te komponent av tidsmidlet hastighet, $P(\boldsymbol{x})$ tidsmidlet trykkfelt, mens $u_i(\boldsymbol{x},t)$ er i-te komponent av fluktuasjonsfeltet.

a) Forklar hva

$$\rho \overline{u_i u_j} = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho u_i u_j \, dt \right] \tag{4.2}$$

representerer fysisk.

I en fullt utviklet, statistisk stasjonær turbulent strømning mellom to plan ($x_2 = 0$, $x_2 = h$) er

$$\left. \begin{array}{l} (U_1, U_2, U_3) = (U_1(x_2), 0, 0) \\ \dfrac{\partial P}{\partial x_1} = -c \quad \text{(konstant)} \end{array} \right\} \tag{4.3}$$

b) Finn veggspenningen τ_w uttrykt ved c og h.

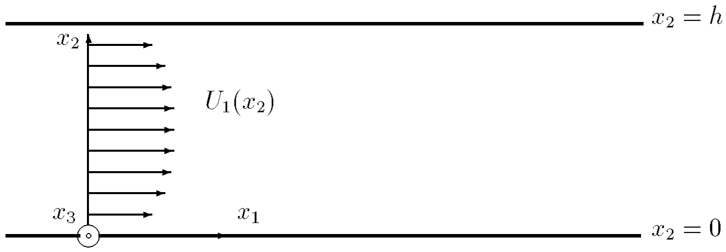
(Fortsettes side 5.)

c) Vis at

$$\frac{dU_{1+}}{dx_{2+}} - \frac{\overline{u_1 u_2}}{u_*^2} + 2\frac{x_{2+}}{R_*} - 1 = 0$$

der

$$U_{1+} = \frac{U_1}{u_*}, \quad x_{2+} = \frac{x_2 u_*}{\nu}, \quad R_* = \frac{u_* h}{\nu}$$
$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$



Figur 4.1 viser skjematisk middelstrømsprofil for turbulent strømning mellom to plan.

SLUTT