UNIVERSITETET I OSLO

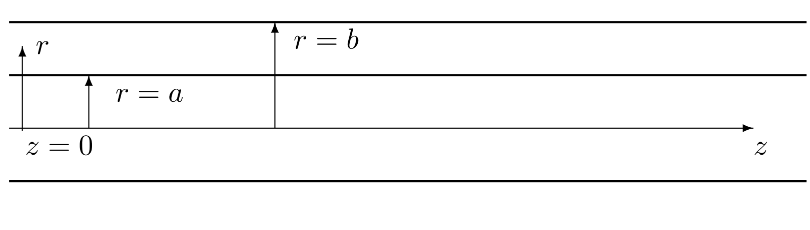
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 3300/4300 — Viskøs strømning og turbulens.
Eksamensdag:	Fredag 13. juni 2008.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Vedlegget "Kontinuitetslikning og momentumlikninger i sylinderkoordinater" er inkludert i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Rommet mellom to koaksiale sylindre med sirkulært tverrsnitt er fylt med en væske som har konstant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν. Det strømningsproblemet som defineres nedenfor skal beskrives i et sylinderkoordinat system (r, θ, z) som indikert i figur 1.



Figur 1 viser skjematisk aksialt lengdesnitt av to koaksiale sirkulære sylindre omtalt i teksten.

Væskens hastighet $\mathbf{u}$ vil generelt kunne dekomponeres som

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i}_r + v\mathbf{i}_\theta + w\mathbf{i}_z \tag{1}$$

(Fortsettes side 2.)

der $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta$ og $\mathbf{i}_z$ er enhetsvektorer i $r-$, $\theta-$ og $z-$retning, henholdsvis. Den indre sylinderen har radius a og er i ro. Den ytre sylinderen har radius b og beveger seg med hastigheten $V_b \sin(\omega t)\,\mathbf{i}_\theta$ (se figur 1) slik at en kan skrive

$$\mathbf{u}(r = b, \theta, z; t) = V_b \sin(\omega t)\,\mathbf{i}_\theta \tag{2}$$

V_b er konstant og tyngdens virkning skal neglisjeres. Det er ingen annen bevegelse i væsken i dette tilfellet enn den som induseres på grunn av den ytre sylinderens bevegelse. Væskebevegelsen er laminær og stabil.

a) Vis at den induserte væskebevegelsen under de gitte betingelser kan beskrives med likningen

$$\beta \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} \tag{3}$$

der $\beta = \frac{\omega a^2}{\nu}$, $\tau = \omega t$, $R = \frac{r}{a}$ og $V = \frac{v}{V_b}$.

Vi søker en approksimativ løsning av likning (3) ved en perturbasjonsutvikling av formen

$$V(R, \tau; \beta) = V_0(R, \tau) + \alpha_1(\beta) V_1(R, \tau) + \cdots \tag{4}$$

forutsatt $\beta << 1$ og $1 >> \alpha_1(\beta) >> \cdots$.

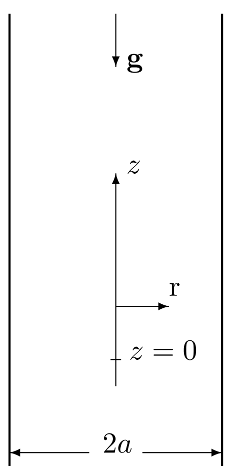
b) Finn $V_0(R, \tau)$ under de gitte betingelser.

c) Finn trykkfordelingen $p(r, t)$ i væsken når det er gitt at

$$p(r = a, t) = p_0 \tag{5}$$

hvor p_0 er en konstant.

Oppgave 2.



Figur 2 viser skjematisk aksialsnitt av det sirkulære røret som er omtalt i oppgaveteksten.
z-aksen og r-koordinaten er også indikert.

Et rett vertikalt rør med sirkulært tverrsnitt og diameter $2a$ har ugjennomtrengelig vegg for $z < 0$, men fror $z \geq 0$ er veggen permeabel. Et fluid

(Fortsettes side 3.)

med konstant kinematisk viskositet ν og konstant tetthet ρ strømmer gjennom røret drevet av et trykkfelt $p(r,z)$. Tyngdefeltet er representert ved akselerasjonen

$$\mathbf{g} = -\mathbf{i}_z g \tag{6}$$

hvor $g > 0$. Strømningen skal beskrives i et sylinderkoordinatsystem (r, θ, z) som indikert i figur 2. Strømningen er tidsuavhengig og aksesymmetrisk og hastigheten $\mathbf{u}$ kan skrives

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}_r u(r,z) + \mathbf{i}_z w(r,z) \tag{7}$$

For $z < 0$ er strømningen fullt utviklet og gitt som

$$\mathbf{u}(r,z) = \mathbf{i}_z W_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \tag{8}$$

hvor W_0 er en konstant. For $z \geq 0$ gir rørveggens permeabilitet følgende lekkasjehastighet

$$\mathbf{u}(r=a,z) = \mathbf{i}_r u_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \tag{9}$$

hvor u_0 er en konstant, og lekkasjen begrenser fluidkolonnens høyde til h målt fra $z = 0$. Alle overgangseffekter omkring $z = 0$ skal neglisjeres.

a) Finn h.

b) Anta at for $z \geq 0$ er

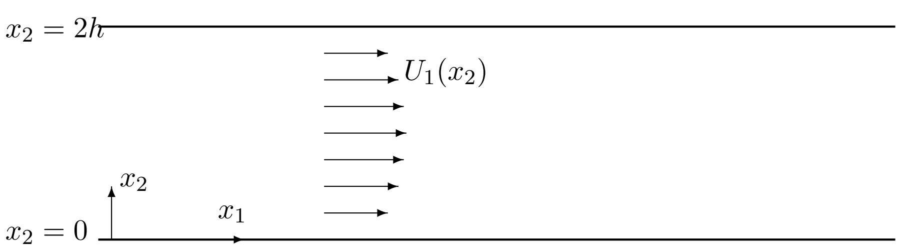
$$w(r,z) = W_1(z) \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \tag{10}$$

og bestem $W_1(z)$.

c) Finn en løsning for radialkomponenten $u(r,z)$ som kontinuitetsmessig er konsistent med den $w(r,z)$ du finner av svaret på spørsmål b).

Oppgave 3.

Et fullt utviklet statistisk stasjonært turbulent hastighetsfelt mellom to plan $x_2 = 0$ og $x_2 = 2h$ (se figur 3) er betegnet med $\tilde{u}_i(\mathbf{x},t)$ og det tilhørende trykkfelt er $\tilde{p}(\mathbf{x},t)$. Tyngdens virkning skal neglisjeres.



Figur 3 viser skjematisk væskerommet mellom to plan $x_2 = 0$ og $x_2 = 2h$ som er omtalt i teksten. x_1-komponenten $U_1(x_2)$ av hastigheten er også indikert.

Ved Reynolds dekomposisjon kan feltene skrives

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x},t) = U_i(\mathbf{x}) + u_i(\mathbf{x},t) \tag{11}$$

$$\tilde{p}(\mathbf{x},t) = P(x_1,x_2) + p(\mathbf{x},t) \tag{12}$$

(Fortsettes side 4.)

der $U_i(\mathbf{x})$ og $P(x_1, x_2)$ er tidsmidlede komponenter, mens $u_i(\mathbf{x}, t)$ og $p(\mathbf{x}, t)$ er fluktuerende komponenter ($U_2 = U_3 = 0$). Det er gitt at

$$\frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -\beta \tag{13}$$

der $\beta > 0$ og konstant.

a) Finn veggspenningen τ_w uttrykt ved β og h.

b) Vis at

$$[\overline{u_1 u_2}]_{y_+ \to 0} \to c y_+^3 \tag{14}$$

der $y_+ = x_2 u_* / \nu$, $u_* = \sqrt{(\tau_w/\rho)}$, og c er en ukjent konstant. ($\overline{(\cdot)}$ betyr tidsmidling.)

c) Angi fysisk relevante og samhørende lengdeskalaer og skalaer for variasjon av $U_1(x_2)$ i vegglaget og i det ytre området.

d) Anta at det eksisterer et overlappingsområdet for løsningen av $U_1(x_2)$ i vegglaget og i det ytre området og finn ved hjelp av 'matching' et approksimativt uttrykk for $U_1(x_2)$ i overlappingsområdet.

VEDLEGG

Kontinuitets-likning og **momentum**-likninger i sylinderkoordinater (r, θ, z) med tilhørende hastighetskomponenter (u, v, w) er gitt som:

Kontinuitets-likningen

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{15}$$

r-momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \tag{16}$$

θ-momentum

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) v + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \tag{17}$$

z-momentum

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \tag{18}$$

der

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{19}$$

og

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{20}$$

SLUTT