MEK 4300/9300 – Viskös strömning og turbulens.

Eksamen 11.06 2010.

Løsningsskisse eksamensoppgaver.

Oppgave 1.

a)

x-komponent av integral momentum-balanse likning er

$$\mathbf{i}_x \cdot \left[\rho \int_{A_c} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}\,\mathbf{u} - \int_{A_c} d\mathbf{A} \cdot \underset{\sim}{P} \right] = 0 \qquad (1)$$

hvor A_c er kontrollvolumets begrensningsflate. Innsetting av opplysningene gitt i oppgavens likning (1), (2), ... og (9) gir

$$-UV(ab) - \tau_1(ab) + \tau_0(ab) = 0 \qquad (2)$$

J: $\underline{\tau_0 - \tau_1 - UV = 0}$ (3)

b)

Fullt utviklet strømning betyr

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (4)$$

Med gitte randbetingelser fåes da

$$\underline{v = -V} \qquad (5)$$

x-komp av momentum-likningen blir

$$-V \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (6)$$

(NB! $\nabla p = 0$ da det ikke er noen annen bevegelse i fluidet enn den som induseres av de gitte randbetingelser).

Løsningen av (6) er

$$u(y) = C_1 e^{-\frac{V}{\nu} y} + C_0 \frac{\nu}{V} \qquad (7)$$

Randbetingelser innsatt gir

$$\underline{u = \frac{1 - \exp(-\frac{V}{\nu} y)}{1 - \exp(-\frac{V}{\nu} h)} U} \qquad (8)$$

c) Med dissipasjonen neglisjert fåes som likning for ~~temperaturen~~ $\Theta(y,t)$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - V\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \varkappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \qquad (9)$$

Regner komplekst og innfører

$$\Theta(y,t) = \mathrm{Re}\{F(y)e^{i\omega t}\} \qquad (10)$$

(10) inn i (9) gir

$$i\omega F(y) - V\frac{dF}{dy} = \varkappa \frac{d^2F}{dy^2} \qquad (11)$$

eller

$$\frac{d^2F}{dy^2} + \frac{V}{\varkappa}\frac{dF}{dy} - \frac{i\omega}{\varkappa}F(y) = 0 \qquad (12)$$

Prøveløsning $F(y) \sim e^{\alpha y}$ gir innsatt i (12)

$$\left[\alpha^2 + \alpha\frac{V}{\varkappa} - i\frac{\omega}{\varkappa}\right]e^{\alpha y} = 0 \qquad (13)$$

Herfra

$$\alpha_1 = \frac{-V + \sqrt{V^2 + 4i\omega\varkappa}}{2\varkappa} \qquad (14)$$

$$\alpha_2 = \frac{-V - \sqrt{V^2 + 4i\omega\varkappa}}{2\varkappa} \qquad (15)$$

(14) og (15) inn i (10) gir

$$\Theta(y,t) = \mathrm{Re}\left\{\left[A_1 \exp\left(\frac{-V+\sqrt{V^2+4i\omega\varkappa}}{2\varkappa}y\right) + A_2 \exp\left(\frac{-V-\sqrt{V^2+4i\omega\varkappa}}{2\varkappa}y\right)\right]\exp(i\omega t)\right\}$$

Q.E.D.

Oppgave 2.

Kontinuitetslikningen er

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

som med oppgitt $u(x,y)$ gir

$$U_0 y e^{-\alpha(x)y}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

$$v = -\int_0^y U_0 y e^{-\alpha(x)y}\frac{d\alpha}{dx}\,dy \qquad (3)$$

Da $v(x,y=0) = 0$ på plate fås

$$v(x,y) = 2,5\sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}\left(1 - e^{-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}\,y}\right) - \frac{y}{2}\frac{U_0}{x}e^{-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}\,y} \qquad (4)$$

b)

Forskyvningstykkelsen $\delta^*(x)$ er pr. definisjon gitt som

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U_0}\right) dy \qquad (5)$$

Utregning gir

$$\delta^*(x) = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \qquad (6)$$

Oppgave 3

a) Reynolds-midlete grunnlikningen.

Grunnlikninger:

Momentumlikning: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u}$ (1)

Kontinuitetslikning: $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ (2)

Definerer

$$\mathcal{U}(x) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\,dt\right] \qquad (3)$$

$$P(x) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T p(x,t)\right] \qquad (4)$$

og dermed

$$u(x,t) = \mathcal{U}(x) + u'(x,t) \qquad (5)$$

$$p(x,t) = P(x) + p'(x,t) \qquad (6)$$

hvor $u'(x,t)$ og $p'(x,t)$ er fluktuasjonsfelter (turbulensen).

(3) og (5) inn i (2) gir

$$\underline{\nabla\cdot\mathcal{U}(x) = 0.} \qquad (7)$$

$$\underline{\nabla\cdot u'(x,t) = 0.} \qquad (8)$$

Antar at

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)}^{t} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{(\cdot)}^{t} \qquad (9)$$

(hvor $\overline{(\cdot)}^{t}$ betyr tidsmidling).

$$\overline{\nabla\cdot(u'u')}^{t} = \nabla\cdot\overline{(u'u')}^{t} \qquad (10)$$

Innsetting av (5) og (6) i (1), tidsmidling og anvendelse av (9) og (10), samt (8) gir

$$\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{U} - \nabla\cdot(\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}^t) \quad (11)$$

som er Reynolds-midlet momentum likning (Navier-Stokes likning).

---

b) Middelstrømmens kinetiske energi pr. masseenhet $\frac{1}{2}U_iU_i$.

i-te komponent av (11) er

$$U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i'u_j'}) \quad (12)$$

$U_i\cdot(12)$ gir

$$U_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}U_iU_i\right) = -\frac{1}{\rho}U_i\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu U_i\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j\partial x_j} - U_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i'u_j'}) \quad (13)$$

Ved å innføre

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} - \rho\overline{u_i' u_j'} \quad (14)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \quad (15)$$

kan (13) skrives (utnytt symmetri)

$$\underline{U_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2} U_i U_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(T_{ij} U_i\right) - T_{ij} S_{ij}} \quad (16)$$

c) Turbulensens kinetiske energi.

Man tar momentum-likningen for fluktuasjonsfeltet som utgangspunkt, i.e.,

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \cdots = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j} \quad (17)$$

Deretter dannes $\overline{u_i' \cdot (17)}^t$ og en får

$$U_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j' p'} + \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i' u_j'} - 2\nu \overline{u_i' s_{ij}'}\right) - \overline{u_i' u_j'} S_{ij} - 2\nu \overline{s_{ij}' s_{ij}'} \quad (18)$$

hvor $s_{ij}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)$

d) $\overline{u_i' u_j'}\, S_{ij}$ representerer tapet av middelströms (kinetisk) energi ved at det produserer turbulens (pr. masseenhet og tidsenhet).

$2\nu\, \overline{s_{ij}' s_{ij}'}$ representerer dissipasjon av turbulent kinetisk energi pr. masseenhet og tidsenhet.

— o —