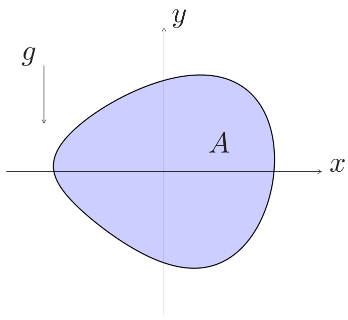
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK4300 — Viskøs strømning og turbulens
Eksamensdag:	Onsdag 15. juni 2011
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Poiseuille strøm (vekt 36%)



Vi har gitt en trykkdrevet strømning i et rør med generelt tverrsnitt (se figur). Tverrsnittet er parallelt med xy planet og betegnes med A, mens z-aksen er rettet langs røret. Væsken er inkompressibel, den dynamiske viskositetskoeffisienten er μ, tyngden er rettet i negativ y retning og rørveggene er tette. Videre antar vi at strømmen er stasjonær og uniform i z retningen.

1a (vekt 6%)

Skriv ned likninger og randbetingelser for dette problemet.

1b (vekt 6%)

Anta at hastigheten har formen

$$\mathbf{v} = w(x, y)\mathbf{k},$$

og finne et uttrykk for trykket. Vis videre at

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -\beta \tag{1}$$

og angi hvordan konstanten β avhenger av trykket.

(Fortsettes på side 2.)

1c (vekt 6%)

Finn veggspenningen τ_w uttrykt ved hjelp av deriverte av w. Vis også at dissipasjonen i dette tilfellet blir

$$\Phi = \mu \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}.$$

1d (vekt 6%)

Finn w uttrykt ved β når tversnittet av kanalen er ellipseformet og definert ved

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Hint: legg merke til at Laplace operatoren anvendt på venstresiden av dette uttrykket gir en konstant.

1e (vekt 6%)

I dette delpunktet antar vi $a = b$. Finn den totale volum fluksen, Q, langs røret. Bestem også skjærspenningen ved veggen, τ_w, uttrykt ved trykkgradienten og andre parametere i problemet.

1f (vekt 6%)

Nå antar vi generelt tverrsnitt igjen. Start med (1) og finn en energilikning på formen

$$Q \frac{\partial p}{\partial z} = - \iint_A \Phi \, dx \, dy,$$

der Q er volumtransporten i røret og forklar det fysiske innholdet i denne relasjonen. Hint: du må manipulere med integralene for å finne høyresiden.

Oppgave 2 Turbulens (vekt 28%)

2a (vekt 10%)

Uled *Reynolds averaged Navier-Stokes* (RANS) likninger for en inkompressibel, Newtonsk væske og angi Reynolds spenningstensor. Du kan benytte, uten bevis, at $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v})$ for et vilkårlig divergensfritt hastighetsfelt $\mathbf{v}$.

2b Turbulent rørstrømning (vekt 10%)

Vi antar en fullt utviklet trykkdrevet strømning mellom to plan ved $y = -h$ og $y = h$. Middelhastigheten blir da $\overline{\mathbf{v}} = \overline{u}(y)\mathbf{i}$. Finn trykkvariasjonen på tvers av strømningen fra RANS-likningene. Vis at

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

der skjærspenningen er

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}y} - \rho \overline{u'v'},$$

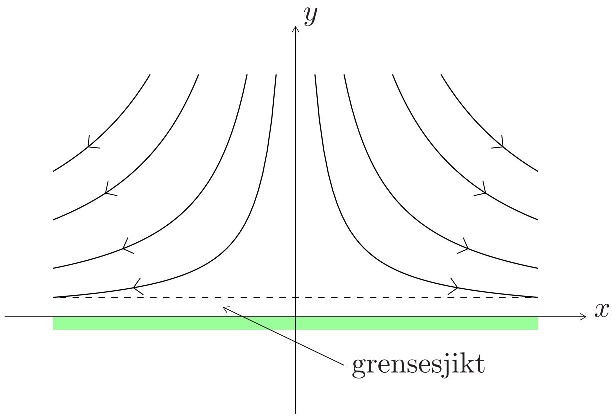
ρ er tettheten og $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}$ er konstant.

(Fortsettes på side 3.)

2c (vekt 8%)

Hvorfor er det et viskøst sublag ved en rand med heft? Hastighetsprofilet kan tilnærmes med en linear funksjon. Finne denne uttrykt ved veggspenningen τ_w og andre relevante parametere.

Oppgave 3 Stagnasjonsstrømning (vekt 36%)



En friksjonsfri løsning for stagnasjonsstrømning ved en vegg (se figur) er

$$\psi^* = Bx^*y^*, \quad u^* = Bx^*, \quad v^* = -By^*,$$

der ψ^* er strømfunksjonen, og u^*, v^* er hastighetskomponentene. Stjerner indikerer størrelser med dimensjon. Vi søker modifikasjonen av denne strømmen på grunn av heftbetingelse ved veggen og viskositet.

3a (vekt 9%)

Vi betegner tettheten med ρ og den dynamiske viskositetskoeffisienten med μ. Dimensjonsløse varisble er så definert ved

$$\begin{aligned} x^* &= Lx, \quad & y^* &= Hx, \quad & t^* &= Bt, \\ u^* &= LBu, \quad & v^* &= HBv, \quad & p^* &= \hat{p}p, \end{aligned}$$

der L er en lengdeskala i x-retningen og $H = \sqrt{\frac{\mu}{\rho B}}$ er en skala relatert til grensesjiktet. Bestem trykkskalaen, $\hat{p}$, slik at de dimensjonsløse likningene blir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right), \end{aligned}$$

der $\gamma = H^2/L^2$. For ethvert fornuftig valg av L er parameteren γ liten. Uansett, vi søker eksakte løsninger og vil ikke forkaste ledd av orden γ.

(Fortsettes på side 4.)

3b (vekt 9%)

Vi antar at v er uavhengig av x

$$v = -F(y),$$

der F er en funksjon som må betemmes. Vis at dette fører til at den andre hastighetskomponenten har formen

$$u = xF'(y),$$

og at F må oppfylle randbetingelsene

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad \lim_{y\to\infty} F'(y) = 1.$$

3c (vekt 9%)

Vis at trykket kan skrives som

$$p = -\gamma(F' + F^2) + p_0(x).$$

3d (vekt 9%)

Vis at F må oppfylle likningen

$$F''' + FF'' - \left(F'\right)^2 = -1.$$

Slutt