UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK4300 — Viskøs strømning og turbulens
Eksamensdag:	Fredag 15. juni 2012
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Turbulens (vekt 15%)

Utled *Reynolds averaged Navier-Stokes* (RANS) likninger for en inkompressibel, Newtonsk væske og angi Reynolds spenningstensor. Du kan benytte, uten bevis, at $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v})$ for et vilkårlig divergensfritt hastighetsfelt $\mathbf{v}$.

Oppgave 2 Tyngdedrevet viskøs strøm (vekt 35%)

En væskefilm strømmer ned utsiden av en vertikal sylinder, med radius a, under tyngdens påvirkning. Vi antar at tykkelsen av væskefilmen, $b - a$, er konstant langs og rundt sylinderen og at strømmen er radielt symmetrisk. På væskeoverflaten virker det et ytre trykk, p_0, mens skjærspenningen ignoreres. Sylinderen er i ro.

2a (vekt 10%)

Sett opp likninger og grensebetingelser når du bruker de forenklende antagelsene.

2b (vekt 20%)

Finn trykk og hastighetsfordeling.

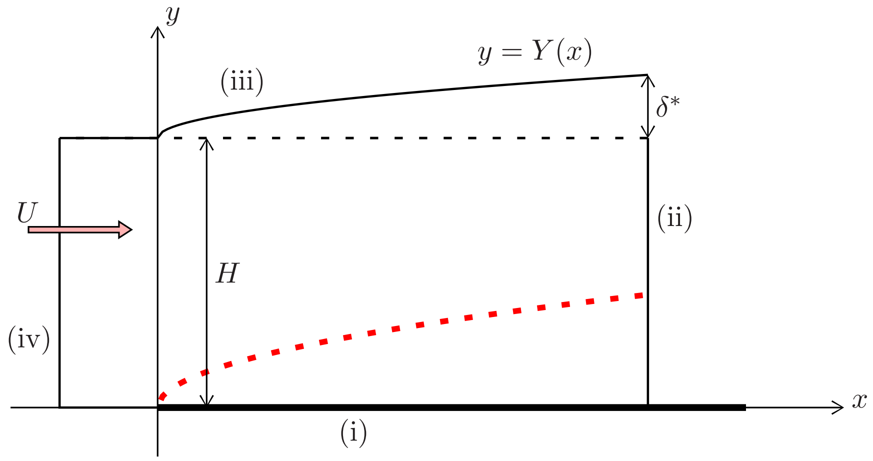
2c (vekt 5%)

Beregn draget (D) på sylinderen per høyde. Vis at D oppfyller

$$D = \rho g A,$$

der A er tverrsnittsarealet av væsken. Forklar denne relasjonen fysisk. På tilsvarende måte oppfyller den totale dissipasjonen per høyde, sammen med

(Fortsettes på side 2.)



Figur 1: Et kontrollvolum for massebevaring. Den øvre begrensningen, $y = Y(x)$, er en strømlinje. Også linjen $y = H$ er utenfor grensesjiktet, som er indikert med den tykke stiplede kurven.

volumfluksen (Q) gjennom tverrsnittsarealet, relasjonen

$$\iint_A \Phi \, dx \, dy = \rho g Q,$$

der Φ er dissipasjonen per volum. Ikke (!) beregn Φ og Q, men forklar relasjonen fysisk.

Oppgave 3 Grensesjikt (vekt 50%)

I denne oppgaven betrakter vi Blasisus-grensesjiktet som utvikles langs en halvuendelig plate som svarer til den positive x-aksen. Framkanten av plata er i origo. Væsken er homogen og inkompressibel og den ytre strømmen er gitt ved $U\mathbf{i}$, der $\mathbf{i}$ er enhetsnormalen i x-retning. Videre er y-aksen rettet normalt plata og hastighetskomponentene i x og y retning er, respektive, u og v.

3a (vekt 10%)

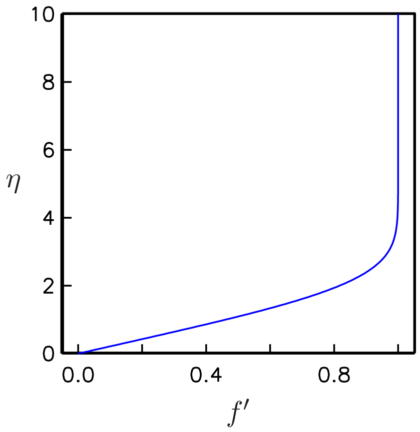
Et kontrollvolum er skissert i figur 1. Sidene er nummerert (i), (ii), (iii) and (iv). Grense (iii) svarer til en strømlinje utenfor grensesjiktet. Bruk massebevaring for å vise at fortrengningstykkelsen er gitt ved

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

3b (vekt 20%)

Skriv opp grensesjiktslikninger og randbetingelser for Blasius-strømmen. Utledning er ikke krevet, men de viktige forskjeller fra de fulle Navier-Stokes likninger skal listes opp.

(Fortsettes på side 3.)



η	f	f'	f''
0.000000	0.000000	0.000000	0.469600
0.500000	0.058643	0.234227	0.465030
1.000000	0.232990	0.460633	0.434379
1.500000	0.515032	0.661474	0.361805
2.000000	0.886797	0.816695	0.255669
2.500000	1.322440	0.916808	0.147475
3.725000	2.509840	0.994972	0.014234
4.975000	3.758240	0.999929	0.000283
7.475000	6.258220	1.000000	0.000000

Figur 2: Formfunksjonen for Blasius-profilet.

3c (vekt 10%)

Vi antar en similaritetsløsning

$$u = Uf'(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\Delta(x)},$$

der funksjonene f og Δ må bestemmes. Finn et tilsvarende uttrykk for v, vis at vi kan velge $\Delta = \sqrt{2\nu x/U}$ og finn en ordinær differensiallikning, med randbetingelser, for f. Løsningen for f er framstilt grafisk og tabulert i figur 2. En forklaring på hvordan man finner den kreves ikke.

3d (vekt 10%)

Bruk de foregående resultatene til å finne eksplisitte uttrykk for fortrengningstykkelsen, skjærspenningen på plata (per bredde) og draget (per bredde) av en seksjon med lengde D og start i fronten av plata. Diskuter kort gyldigheten av disse uttrykkene.

Slutt