UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK4300/9300 — Viskøs strømning og turbulens
Eksamensdag:	Fredag 14. juni 2013
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Turbulens (vekt 35%)

Strømning er ofte beskrevet matematisk ved hjelp av Navier-Stokes likninger:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{2}$$

der $\boldsymbol{u}$, p, ρ, ν og $\boldsymbol{f}$ er hastighetsvektor, trykk, tetthet, kinematisk viskositet og ytre volum krefter.

1a (vekt 5%)

Hvilke to fysiske lover er benyttet ved utledningen av Navier-Stokes likninger? Hvilke andre antagelser gjort?

1b (vekt 10%)

Innfør Reynolds dekomponering av hastighet og trykk og utled fra (1) og (2) de Reynolds midlede Navier-Stokes (RANS) likningene.

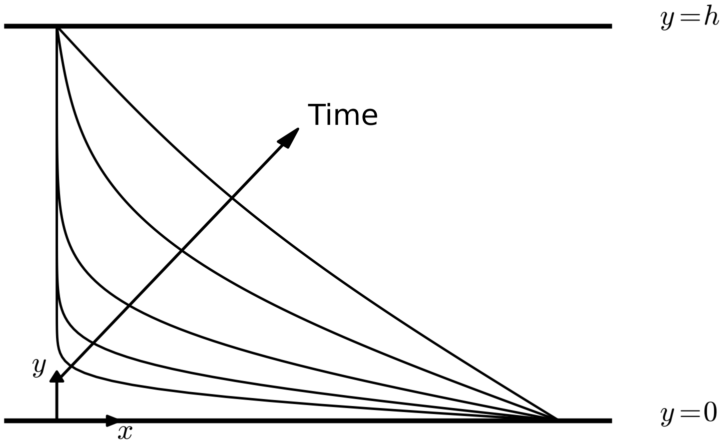
1c (vekt 10%)

Turbulent strømning er ofte definert gjennom en beskrivelse av karakteristiske egenskaper. Gi minst 5 egenskaper som beskriver turbulens.

1d (vekt 10%)

Forklar med ord hvordan man kan utlede en transport likning for $\overline{u_i u_j}$ (NB, ikke $\overline{u_i' u_j'}$). Forklar også hvordan $\overline{u_i' u_j'}$ kan modelleres med et algebraisk uttrykk.

(Fortsettes på side 2.)



Figur 1: Skisse av rommet mellom de to planene ved $y = 0$ og $y = h$. I tillegg er det skissert med tynne linjer hvordan hastighetsfeltet utvikler seg over tid. Hastigheten er da plottet langs x-aksen som en funksjon av y.

Oppgave 2 Transient strømning mellom to parallelle plater (vekt 25%)

Vi ser på uniform rettlinjet strøm av inkompressibel Newtonsk væske mellom to parallelle plater av uendelig utstrekning som begge ligger i planet utspent av x- og z-aksene. Den nederste plata ligger ved $y = 0$ og den øverste ved $y = h$. Hastighetsvektoren er gitt ved $\boldsymbol{u} = (u(y,t), 0, 0)$. Fluidet mellom platene er i starten i ro. Ved $t = 0$ settes så hastigheten av den nederste plata til $u(0,t) = U$ mens den øverste plata holdes i ro. Strømningfeltet er skissert i Figur 1.

2a (vekt 10%)

Skriv ned likninger, initial- og grensebetingelser for dette problemet.

2b (vekt 15%)

Finn hastigheten $u(y,t)$. (Hint: Innfør $v(y,t) = u(y,t) - U(1-y/h)$ og løs det homogene problemet for $v(y,t)$ først. Videre har man $\int_0^h \sin^2(n\pi y/h)dy = h/2$ og $\int_0^h (1-y/h)\sin(n\pi y/h)dy = h/(n\pi)$, for $n = 1, 2, 3\ldots$).

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3 Laminært grensesjikt (vekt 40%)

Vi ser på et laminært grensesjikt som utvikles over en halvuendelig plate som er plassert i $y = 0$. Grensesjiktet utvikles i x-retningen fra start i origo og vi antar en homogen og inkompressibel væske. Den ytre drivende strømmen er gitt ved $U\mathbf{i}$, der $\mathbf{i}$ er enhetsnormalen i x-retning. Videre er y-aksen rettet normalt plata og hastighetskomponentene i x og y retning er, respektive, u og v. Vi definerer to størrelser som ofte er brukt til å beskrive laminære grensesjikt

$$\delta^*(x) = \int_0^{y\to\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \mathrm{d}y,$$
$$\theta(x) = \int_0^{y\to\infty} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) \mathrm{d}y.$$

3a (vekt 10%)

Hva kalles de to størrelsene δ^* og θ (engelsk går bra) og fra hvilke to fysiske lover følger de?

3b (vekt 10%)

Anta at hastighetsprofilet u er kjent og gitt ved

$$u(y;\delta) = U \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right), \tag{3}$$

der $\delta(x)$ er den faktiske tykkelsen på grensesjiktet (definert ved at $u(x,\delta) = 0.99U$). Videre er friksjonskoeffisienten, C_f, definert som

$$C_f = \frac{\tau_w(x)}{0.5\rho U^2} = 2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}, \tag{4}$$

der $\tau_w(x) = \mu \mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ ved $y = 0$. Bruk denne til å finne δ^* og θ uttrykt som funksjoner av x. Bruk gjerne $\mathrm{Re}_x = \rho U x/\mu$ til å forenkle uttrykkene.

3c (vekt 10%)

De laminære grensesjiktslikningene kan utledes fra Navier-Stokes likninger ved skalering og eliminering av 'små' ledd som forsvinner ved høye Reynolds tall ($\mathrm{Re} = \rho U L/\mu$). Innfør følgende normalisering

$$\overline{x} = \frac{x}{L} \qquad \overline{u} = \frac{u}{U} \qquad \overline{v} = \frac{v}{U}\sqrt{Re}$$
$$\overline{y} = \frac{y}{L}\sqrt{Re} \qquad \overline{t} = \frac{tU}{L} \qquad \overline{p} = \frac{p}{\rho U^2}$$

og vis at grensesjiktslikningene blir

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}},$$
$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} = 0,$$
$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} = 0.$$

(Fortsettes på side 4.)

3d (vekt 10%)

Vi innfører, som Blasius i 1908, en similaritetsvariabel $\eta(x,y)$ og en similaritetsløsning $\psi(x;\eta)$ definert gjennom

$$\eta(x,y) = y\sqrt{\frac{U}{2\nu x}},$$
$$\psi(x,\eta) = \sqrt{2\nu U x} f(\eta),$$

der $f(\eta)$ er en ukjent funksjon som skal bestemmes. ψ er strømfunksjonen definert slik at

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{og} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Vis med utganspunkt i grensesjiktslikningene og ovenstående opplysninger at Blasius likning for stasjonær grensesjiktsstrøm blir

$$f^{'''} + f f^{''} = 0.$$

Formuler også randbetingelsene.

Slutt