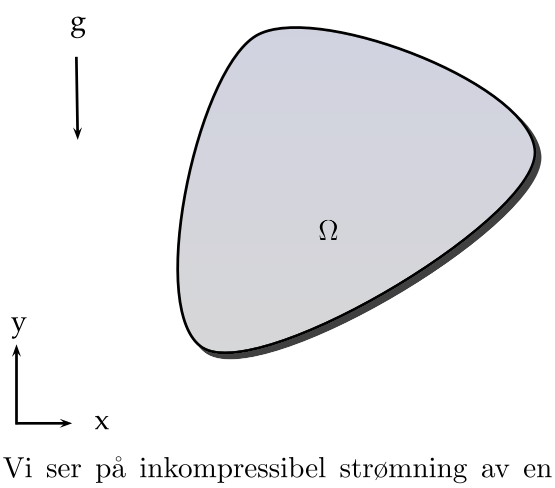
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK4300 — Viskøs strømning og turbulens
Eksamensdag:	Fredag 13. juni 2014
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Strømning gjennom et rør med vilkårlig tverrsnitt (vekt 50%)



Vi ser på inkompressibel strømning av en Newtonsk væske ved konstant temperatur gjennom et rør med vilkårlig tverrsnitt, som vist i figuren. Røret antas å være uendelig langt og uforandret i z-retningen (normalt på arket). Strømningen i røret er drevet i positiv z-retning av en konstant trykkgradient og vi kan se bort ifra initialbetingelser. Tyngdekraften g virker i negativ y-retning som vist i figuren.

1a (vekt 5 %)

Uten videre antagelser, sett opp gjeldende likninger og grenseverdier for dette problemet. Hvilke to fysiske lover ligger til grunn for likningene? Hvilket navn går disse likningene under?

(Fortsettes på side 2.)

1b (vekt 5 %)

Anta nå at strømningen er laminær. Gjør alle mulige forenklinger og formuler likninger og grenseverdier for problemet på nytt.

1c (vekt 10 %)

Beskriv en numerisk løsning av problemet (fra 1b) i programmeringsspråket Python. Anta at du har installert FEniCS.

1d (vekt 10%)

Anta videre i oppgaven at strømningen er turbulent. Gi minst fem karakteristikker av turbulent strømning som gjør at den skiller seg fra den laminære strømningen.

1e (vekt 10 %)

Innfør Reynolds dekomponering av hastighet og trykk og utled de Reynolds midlede (RANS) likningene.

1f (vekt 10 %)

Gjør alle mulige forenklinger og sett opp gjeldene RANS likninger og grenseverdier for problemet beskrevet i denne oppgaven. Forklar hvorfor disse likningene ikke kan løses og formuler en eddy-viskositetsmodell som gjør liknings-settet løsbart.

Oppgave 2 Oppstart av kanalstrøm mellom to parallelle plater (vekt 50%)

Vi ser på en inkompressibel Newtonsk væske som ved tiden $t = 0$ ligger i ro mellom to parallelle plater av uendelig utstrekning. Platene ligger i plan utspent av x- og z-aksene, den øverste plata ved $y = 1$ og den nederste ved $y = -1$. Hastighetsvektoren er gitt ved $\boldsymbol{u} = (u(y,t), 0, 0)$.

Ved tiden $t = 0$ settes det på en konstant trykkgradient $1/\rho \nabla p = (-\beta, 0, 0)$, der β er en konstant som er større enn 0. Denne trykk-kraften setter væsken i bevegelse i retning av den positive x-aksen. Anta at Reynolds nummeret er lavt.

2a (vekt 5 %)

Hva er den matematiske beskrivelsen av en Newtonsk væske?

2b (vekt 5%)

Skriv ned de fullt forenklede likninger, initial- og grensebetingelser for dette problemet.

(Fortsettes på side 3.)

2c (vekt 10%)

Finn den endelige stasjonære hastigheten $\overline{u}(y)$ som væsken vil nå etter lang tid.

2d (vekt 15%)

Finn hastigheten $u(y,t)$. Hint: Bruk den stasjonære hastigheten og reformuler problemet slik at du løser for $v(y,t) = u(y,t) - \overline{u}(y)$. Videre kan man benytte at $\int_{-1}^{1} \cos(\lambda_k y)(1-y^2)\,dy = 4(-1)^{k-1}/\lambda_k^3$, der $\lambda_k = (2k-1)\pi/2$, for $k = 1, 2, 3 \ldots$.

2e (vekt 15%)

Implementer en numerisk løsning av problemet i Python/FEniCS. Implementer også den eksakte analytiske løsningen funnet i 2d og vis hvordan man hvert tidsskritt kan beregne et estimat på feilen i den numeriske løsningen.

Slutt