UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 3300/4300 — Viskøs strømning og turbulens.
Eksamensdag:	Mandag 13. desember 2004.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

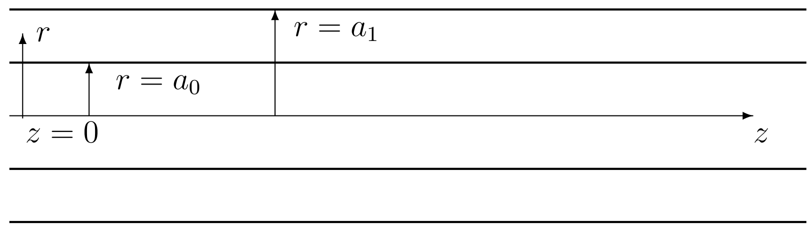
Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Rommet mellom to koaksiale sylindre med sirkulært tverrsnitt er fylt med en væske som har konstant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν. Den indre sylinderen har radius a_0 og er i ro. Den ytre sylinderen har radius a_1 og beveger seg i aksialretningen med hastigheten W_1 (se figur 1). Sylinderveggene er ugjennomtrengelige for væsken. Tyngdens virkning skal neglisjeres. Det er ingen annen bevegelse i væsken enn den som induseres på grunn av den ytre sylinderens bevegelse. Væskebevegelsen skal beskrives i et sylinderkoordinat system $(r.\theta, z)$ der væskens hastighet $\mathbf{u}$ dekomponeres i

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i}_r + v\mathbf{i}_\theta + w\mathbf{i}_z \qquad (1)$$

(Fortsettes side 2.)



Figur 1 viser skjematisk aksialt lengdesnitt av to koaksiale sirkulære sylindre omtalt i teksten.

a) Forklar at trykket p i væsken er konstant og finn væskens hastighet.

Vi antar så at sylinderveggene er porøse og at en gjennomstrømning i veggene induserer radialhastigheten

$$u = \frac{U_0 a_0}{r} \tag{2}$$

Den ytre sylinderen beveger seg fortsatt med hastigheten W_1 i aksialretningen.

b) Finn trykket p i væsken når

$$p(r = a_0, \theta, z) = p_0 \ = \text{konstant} \tag{3}$$

c) Finn $w(r)$ når $u = \frac{U_0 a_0}{r}$ og $w(r = a_1, \theta, z) = W_1$

Kontinuitets-likning og **momentum**-likninger i sylinderkoordinater (r, θ, z) med tilhørende hastighetskomponenter (u, v, w) er gitt som:

Kontinuitets-likningen

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

r-momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \tag{5}$$

θ-momentum

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)v + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \tag{6}$$

(Fortsettes side 3.)

z-momentum

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \tag{7}$$

der

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{8}$$

og

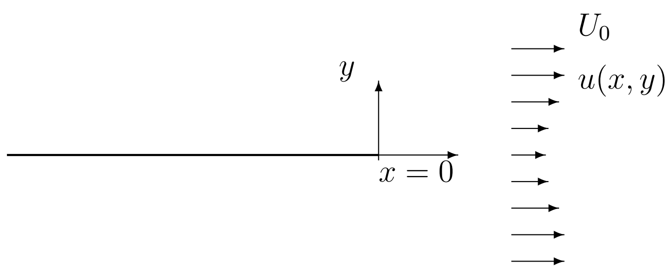
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{9}$$

Oppgave 2.

Hastighetsfordelingen $u(x, y)$ nedstrøms en flat plate i strøm er indikert i figur 2 og kan uttykkes

$$u(x, y) = U_0 - u_1(x, y) \tag{10}$$

der $u(x, y \to \pm\infty) \to U_0$ (*konstant*).



Figur 2 viser skjematisk en flat plate i et strømningsfelt. Plata ligger i planet $y = 0$ og strekker seg fra $x = -L$ til $x = 0$. Kjølvannsprofilet $u(x, y)$ er også indikert.

a) Vis at grensesjiktlikningene anvendt på denne kjølvannsstrømningen approksimativt gir

$$U_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \tag{11}$$

forutsatt $\mid u_1 \mid \ll U_0$.

b) Vis at i kjølvannet gjelder approksimativt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x, y) dy = konstant \ (uavhengig\ av\ x) \tag{12}$$

forutsatt $\mid u_1 \mid \ll U_0$.

(Fortsettes side 4.)

Anta at

$$u_1(x, y) = AU_0 x^m f(\eta) \tag{13}$$

$$\eta = Bx^n \tag{14}$$

c) Finn similaritetseksponentene m og n.

d) Finn $f(\eta)$. (Bestemmelse av integrasjonskonstantene kreves ikke.)

Oppgave 3.

I et statistisk stasjonært turbulent strømningsfelt er hastighets- og trykkfeltet betegnet med $\tilde{u}_i(\mathbf{x}, t)$ og $\tilde{p}(\mathbf{x}, t)$, henholdsvis ($\mathbf{x}$ er posisjon og t er tiden).

a) Innfør Reynolds dekomposisjon av feltene og utled Reynolds tidsmidlede momentum-likning og definer Reynolds-spenningene.

b) Skriv ned Boussinesq-modellen for Reynolds-spenningene og gi en kort forklaring på hva de enkelte leddene representerer fysisk.

c) Finn funksjonen $f(\epsilon, K)$ for relasjonen

$$\nu_t = f(\epsilon, K) \tag{15}$$

der ν_t ($\frac{m^2}{s}$) er eddyviskositeten , ϵ ($\frac{m^2}{s^3}$) er dissipasjonsraten pr. masseenhet i turbulensen og K ($\frac{m^2}{s^2}$) er turbulent kinetisk energi pr. masseenhet.

SLUTT