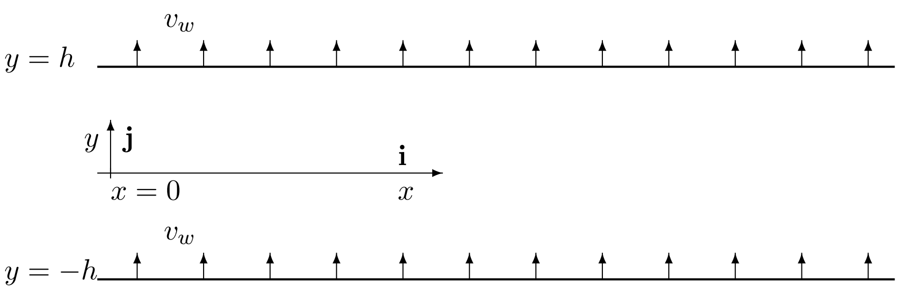
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MEK4300 — Viskøs strømning og turbulens.
Eksamensdag:	Fredag 12. juni 2009.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1



Figur 1 viser skjematisk rommet mellom to plan $y = h$, $y = -h$ omtalt i teksten. Lekkasjehastigheten v_w referert til i oppgaveteksten er indikert. Det kartesiske (x, y)-koordinatsystemet som brukes i oppgaven, er også vist i figuren.

Vi definerer rommet mellom to plan $y = -h$ og $y = h$ som en kanal hvor det utføres strømningsforsøk. I det første forsøket går det i kanalen en laminær væskestrøm med hastighet

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v \tag{1}$$

Væsken er homogen med konstant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν. Planene er porøse, noe som tillater randbetingelsene

$$v(x, y = -h) = v(x, y = h) = v_w > 0 \tag{2}$$

hvor v_w er konstant, mens

$$u(x, y = -h) = u(x, y = h) = 0 \tag{3}$$

Strømningen er tidsuavhengig og fullt utviklet med gitt

$$\nabla p = -\mathbf{i}\rho\beta, \quad \beta > 0 \tag{4}$$

hvor β er konstant.

(Fortsettes på side 2.)

a) Finn hastighetskomponentene u og v. (De algebraiske likningene som bestemmer integrasjonskonstantene i løsningen av u, kreves ikke løst.)

Den samme kanalen brukes til et annet strømningsforsøk der randbetigelsene for v forandres til

$$v(x, y = -h) = -v_w \tag{5}$$

$$v(x, y = h) = v_w \tag{6}$$

mens randbetingelsene for u fortsatt er $u(x, y = \pm h) = 0$.

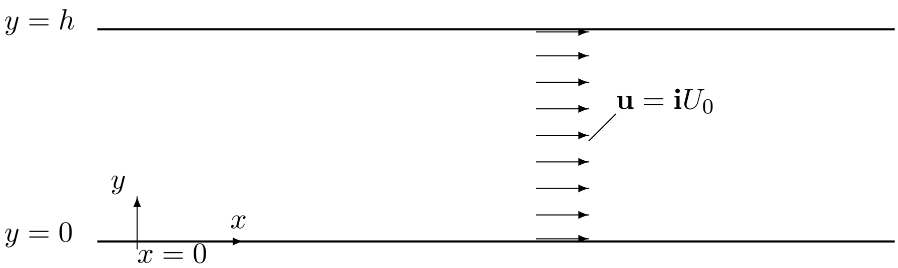
b) Finn volumstrømmen $Q(x) = \int_{-h}^{h} u(x, y)dy$ gitt at $Q(x = 0) = Q_0$.

Strømfunksjonen assosiert med hastighetsfeltet (u, v) er $\psi(x, y) = g(x)f(y)$.

c) Definer hastigetskomponentene u og v uttrykt ved strømfunksjonen og finn $g(x)$ forutsatt $f(h) = 1$ og $f(-h) = -1$.

d) Forklar hva differensen $\psi(x, h) - \psi(x, -h)$ representerer fysisk.

Oppgave 2



Figur 2 viser skjematisk rommet mellom to plan $y = 0$ og $y = h$ omtalt i teksten. Veggene har temperaturfordelinger som gitt i oppgaveteksten. Det kartesiske (x, y)-koordinatsystemet som brukes i oppgaven, er også vist i figuren.

Rommet mellom to plan $y = 0$ og $y = h$ er fylt med en ikke-viskøs væske med konstant tetthet ρ og konstant termisk ledningstall k. Væsken strømmer gjennom rommet med konstant hastighet $\mathbf{u} = \mathbf{i}U_0$. Planene har følgende temperaturfordelinger

$$T(x, y = 0) = T_0 \tag{7}$$

$$T(x < 0, y = h) = T_0 + \Delta T \tag{8}$$

$$T(x \geq 0, y = h) = T_0 \tag{9}$$

der ΔT er en konstant. Temperaturfordelingen i væsken for $x \leq 0$ antaes kjent og gitt som

$$T(x \leq 0, 0 < y < h) = T_0 + \Delta T \, \frac{y}{h} \tag{10}$$

Utviklingen av et temperaturfelt er i alminnelighet bestemt av likningen

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \Phi \tag{11}$$

der Φ er dissipasjonsfunksjonen. Det antaes her at $|\rho c_p U_0 \frac{\partial T}{\partial x}| >> k|\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}|$.

(Fortsettes på side 3.)

a) Forklar at utviklingen av temperaturfeltet i væsken for $x > 0$ i det foreliggende problem approksimativt kan beskrives med likningen

$$\rho c_p U_0 \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{12}$$

b) Finn temperaturfordelingen i væsken for $x > 0$.

Hint: Det kan være nyttig å vite at funksjonen $H(\eta)$ gitt som

$$H(\eta) = \eta \; for \; -1 < \eta < 1 \tag{13}$$
$$H(\eta) = 0 \; for \; \eta = \pm 1 \tag{14}$$
$$H(\eta \pm 2) = H(\eta), \; \forall \; \eta \tag{15}$$

kan uttrykkes

$$H(\eta) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin(m\pi\eta) \tag{16}$$

Oppgave 3

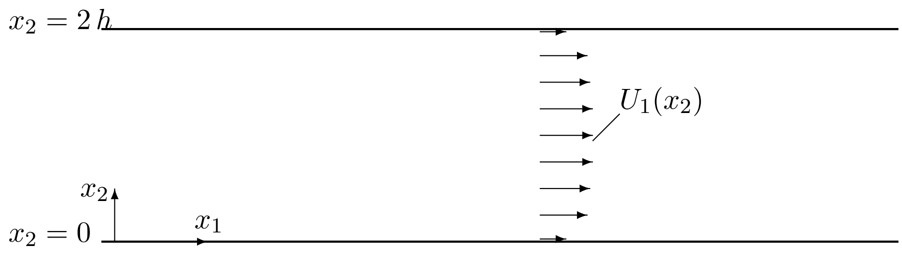
Hastighets- og trykkfeltet i et strengt stasjonært turbulent strømningsfelt betegnes henholdsvis $u_i(x_j, t)$ og $p(x_j, t)$, der $i = 1, 2, 3$ og $j = 1, 2, 3$. Væsken er homogen og har konstant tetthet ρ og konstant dynamisk viskositet μ. Feltene kan dekomponeres i middelfelter $U_i(x_j)$, $P(x_j)$ og fluktuasjonsfelter $u_i'(x_j, t)$, $p'(x_j, t)$ slik at

$$u_i(x_j, t) = U_i(x_j) + u_i'(x_j, t) \tag{17}$$

$$p(x_j.t) = P(x_j) + p'(x_j, t) \tag{18}$$

a) Utled Reynolds-midlet Navier-Stokes likninger og definer Reynolds spenningstensor.

b) Utled en balanselikning for middelstrømmens kinetiske energi $\frac{1}{2}U_iU_i$ og definer produksjonen av turbulent kintisk energi.



Figur 3 viser skjematisk rommet mellom to plan $x_2 = 0$ og $x_2 = 2\,h$ omtalt i teksten.
Hastighetsprofilet $U_1(x_2)$ er skjematisk indikert.
Kartesiske (x_1, x_2)-koordinater referert til i teksten er også vist i figuren.

Det går en fullt utviklet turbulent strømning mellom to plan $x_2 = 0$ og $x_2 = 2h$ (slik som indikert i figur 3) drevet av trykkfallet

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = -\alpha \tag{19}$$

hvor α er en positiv konstant.

(Fortsettes på side 4.)

c) Finn skjærspenningsfordelingen $\tau_{21}(x_2;\alpha;h) \equiv \mu\frac{dU_1}{dx_2} - \rho\overline{u_2'u_1'}$.

   Hint: Merk at skjærspenningen τ_{21} kan skrives som funksjon av x_2 med α *og* h som parametre.

SLUTT