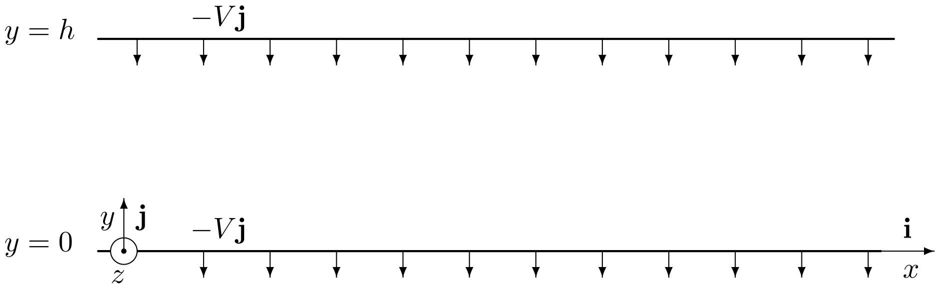
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK4300/9300 — Viskøs strømning og turbulens.
Eksamensdag:	Fredag 11. juni 2010.
Tid for eksamen:	9.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1



Figur 1 viser skjematisk rommet mellom to plan $y = h$, $y = 0$ omtalt i teksten. Lekkasjehastigheten $-V\mathbf{j}$ referert til i oppgaveteksten er indikert. Det kartesiske (x, y, z)-koordinatsystemet som brukes i oppgaven, er også vist i figuren.

Et homogent newtonsk fluid med kontant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν strømmer gjennom rommet mellom to plan $y = 0$ og $y = h$ som skissert i figur 1. Hastigheten i fluidet, $\mathbf{u} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v$, er indusert av følgende randbetingelser

$$u(x, y = 0, z) = 0 \tag{1}$$

$$u(x, y = h, z) = U \tag{2}$$

$$v(x, y = 0, z) = v(x, y = h, z) = -V \tag{3}$$

$$w(x, y = 0, z) = w(x, y = h, z) = 0 \tag{4}$$

Bevegelsen er fullt utviklet. Det er ingen annen bevegelse i fluidet enn den som induseres av ovenstående randbetingelser, og $V > 0$. Vi betrakter et kontrollvolum begrenset av kanalveggene $y = 0$ og $y = h$, og de matematisk definerte planene $x = 0$ og $x = a$, $z = 0$ og $z = b$. Spenningstensoren $\mathcal{P}$ er gitt på kontrollvolumets begrensningsflater som følger

$$\mathcal{P}(0 \le x \le a, y = 0, 0 \le z \le b) = -p_0\mathcal{E} + (\mathbf{ij} + \mathbf{ji})\tau_0 \tag{5}$$

(Fortsettes på side 2.)

$$\mathcal{P}(0 \le x \le a, y = h, 0 \le z \le b) = -p_0\mathcal{E} + (\mathbf{ij} + \mathbf{ji})\tau_1 \tag{6}$$

$$\mathcal{P}(x = 0, 0 \le y \le h, 0 \le z \le b) = \mathcal{P}(x = a, 0 \le y \le h, 0 \le z \le b) \tag{7}$$

$$\mathcal{P}(0 \le x \le a, 0 \le y \le h, z = 0) = \mathcal{P}(0 \le x \le a, 0 \le y \le h, z = b) \tag{8}$$

hvor

$$\mathcal{E} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} \tag{9}$$

og p_0, τ_0 og τ_1 er konstanter.

a) Finn x-komponenten av integral momentum balanse likning ved bruk av de gitte randbetingelser.

b) Finn hastighetskomponentene u og v.

Temperaturen på planet $y = 0$ er T_0 (konstant). Temperaturen på planet $y = h$ er

$$T(x, y = h, z, t) = T_0 + \Delta T \sin(\omega t) \tag{10}$$

hvor ΔT er en konstant. Temperaturlikningen er

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \phi(y) \tag{11}$$

c) Neglisjer dissipasjonen $\phi(y)$ og verifiser at med

$$T(y, t) = T_0 + \Delta T \Theta(y, t) \tag{12}$$

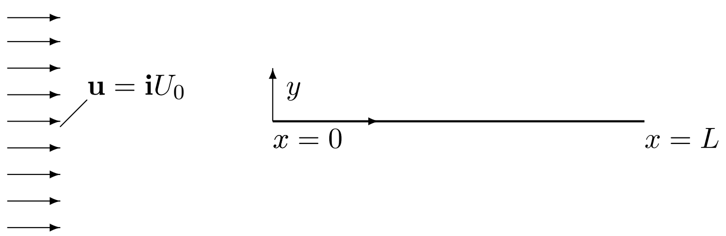
kan løsningen for $\Theta(y, t)$ skrives

$$\Theta(y, t) = \Re\{[A_1 \exp(\alpha_1 y) + A_2 \exp(\alpha_2 y)] \exp(i\omega t)\} \tag{13}$$

$$\alpha_1 = \frac{-V + \sqrt{V^2 + 4i\omega\kappa}}{2\kappa} \tag{14}$$

$$\alpha_2 = \frac{-V - \sqrt{V^2 + 4i\omega\kappa}}{2\kappa} \tag{15}$$

Opgave 2



Figur 2 viser skjematisk en flat plate i $y = 0$ og $0 < x < L$ omtalt i teksten.

(Fortsettes på side 3.)

En fullt utviklet viskøs grensesjiktsstrømning er etablert langs en flat plate. som indikert i figur 2. Hastighetsfeltet i grensesjiktet har en x-component som er approksimert med

$$u(x,y) = U_0\,(1 - \exp(-\alpha(x)y)) \tag{16}$$

U_0 er konstant, og $\alpha(x) = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}$, hvor ν er fluidets konstante kinematiske viskositet.

a) Finn y-komponenten $v(x,y)$ av hastighetsfeltet i grensesjiktet.

b) Finn forskyvningstykkelsen (displacement thickness) $\delta^*(x)$ i grensesjiktet.

Opgave 3

I et newtonsk fluid med konstant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν er det etablert en statistisk stasjonær turbulent strømningstilstand. Hastighetsfeltet betegnes $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ og trykkfeltet $p(\mathbf{x},t)$. Reynolds dekomposisjon av feltene skal innføres slik at

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{x},t)dt\right] \tag{17}$$

$$P(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T p(\mathbf{x},t)dt\right] \tag{18}$$

og dermed $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$, og $p(\mathbf{x},t) = P(\mathbf{x}) + p'(\mathbf{x},t)$.

a) Finn Reynolds-midlet momentum likning og Reynolds-midlet kontinuitetslikning.

b) Finn likningen for middelstrømmens kinetiske energi pr. masseenhet $\frac{1}{2}U_iU_i$.

c) Vis at likningen for turbulensens kinetiske energi pr. masseenhet $\frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'}$ kan skrives

$$\begin{aligned} U_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'}\right] &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{p'u_j'} + \frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'u_j'} - 2\nu\overline{u_i's_{ij}'}\right] \\ &\quad - \overline{u_i'u_j'}S_{ij} - 2\nu\overline{s_{ij}'s_{ij}'} \end{aligned} \tag{19}$$

hvor $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i})$, og $s_{ij}' = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i})$.

d) Hva representerer $\overline{u_i'u_j'}S_{ij}$ og $2\nu\overline{s_{ij}'s_{ij}'}$ fysisk?

SLUTT