Obligatorisk oppgave 1

MEK4320/MEK9320, høst 2011

Innleveringsfrist: Fredag 7. oktober

Oppgave 1: (≈ oppg. 3, kap. 2.8. i kompendium)

Vi har gitt Klein-Gordon likningen på formen:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + q\eta = 0 \tag{1a}$$

som gjelder for $t > 0$ og $-\infty < x < \infty$. Bølger genereres fra den initielle forstyrrelsen

$$\eta(x, 0) = A\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{L}\right)^2}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, 0) = 0. \tag{1b}$$

a) Løs (1a) med initialbetingelsene (1b) ved å bruke Fourier transform. Vis at man kan skrive løsningen på formen

$$\eta(x, t) = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega t)}\, dk.$$

b) Finn en tilnærmet løsning for store x og t.

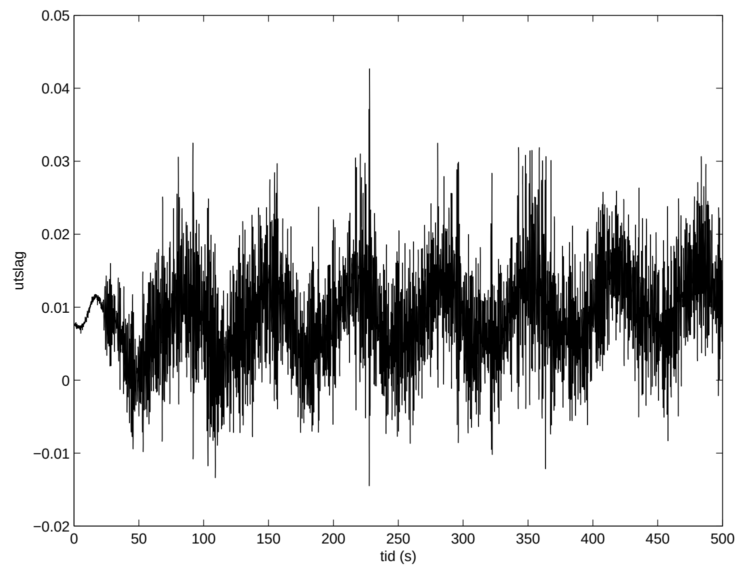
Oppgave 2: Seiching i slepetanken hos Marintek

Følgende sitat er hentet fra Wikipedia:

> *En seiche (uttales sæsj) er en stående bølge i et lukket eller delvis lukket væskereservoar. Seicher og seiche-lignende fenomener er observert i innsjøer, dammer, fjorder og havområder.*
>
> *Begrepet ble første gang framført i vitenskapelig sammenheng av den sveitsiske hydrologen François-Alphonse Forel i 1890. Han hadde observert virkningen i Genfersjøen. Ordet kommer fra et sveitsisk–fransk dialektord som betyr "å svinge fram og tilbake". Dette hadde visstnok lenge vært brukt i området når det var snakk om svinginger i alpesjøene.*

Slepetanken hos Marintek i Trondheim er 270 m lang, 10.5 m bred, og bunnen i tanken er horisontal på hver side av en vertikal terskel. Tanken er 10 m dyp de første 80 m nærmest bølgeskovelen, og 5 m dyp ellers. Man er ofte plaget av svært langsomme svingninger i denne tanken. Vi ønsker å finne periodene til disse egensvigningene.

En tidsserie målt i slepetanken er gjengitt nedenfor og kan lastes ned her http://folk.uio.no/karstent/MEK4320/tidsserie.dat (første kolonne er tiden i sekunder, andre kolonne er overflatehevning målt et tilfeldig sted i tanken). De lange svigningene med omtrent ett minutts periode er seiching, mens det eksperimentet man egentlig ønsket å gjøre er de hurtige svigningene som er så raske at de ikke kommer tydelig fram i figuren. Legg merke til at seichingen har et betydelig utslag i forhold til det egentlige eksperimentet!



a) Les kapittel 2.13 Svigninger i basseng. Vi skal først anta at tanken har konstant dyp, med lengde 270 m og bredde 10.5 m. Regn ut de fem laveste egenfrekvensene for konstant dyp 10 m og konstant dyp 5 m. Se bort fra tankens bredde. Diskuter om vi kan bruke teorien for gruntvannsbølger for å finne de fem laveste egenfrekvensene.

b) Vi skal nå ta hensyn til terskelen. Bruk lineær ikke-dispersiv gruntvannsteori. Se bort fra tankens bredde. Utled en relasjon som bestemmer frekvensene for egensvigningene (frekvens $f = \frac{\omega}{2\pi}$).

Hint: Det kan lønne seg å legge origo ved terskelen. Relasjonen for egenfrekvensene ser sannsynligvis kanskje omtrent slik ut:

$$\sqrt{h_1} \tan \frac{\omega l_1}{\sqrt{g h_1}} = -\sqrt{h_2} \tan \frac{\omega l_2}{\sqrt{g h_2}}$$

c) Du velger selv om du ønsker å løse denne numerisk, eller om du skisserer løsningen grafisk. Begrens søket etter løsninger til frekvenser mindre enn 0.08 Hz.

d) Vi skal nå sammenlikne teorien ovenfor med den målte tidsserien. Vi bruker diskret Fourier transform for å finne et estimat av effektspekteret. I Matlab kan vi gjøre dette slik: Først laster vi tidsserien av overflatehevning inn i variabelen `eta`. Tidsserien varer en total tid `T`. Effektspekteret kan estimeres slik:

```
ft = abs(fft(eta)).^2;
```

Effektspekteret fra frekvens 0 til `fmax` kan plottes ved hjelp av

```
nn = fmax*T; freq = 0:(1/T):fmax;
```

```
semilogy (freq, ft(1:(nn+1))); xlabel ('Hz');
```

Plott effektspekteret både opp til 2.5 Hz, og kun opp til 0.08 Hz. Identifiser frekvensområdene til det eksperimentet man egentlig ønsket å gjøre og de laveste seichemodene. Hvor mange seichemoder klarer du å identifisere fra målingene?

Hva synes du om overensstemmelsen mellom vår ikke-dispersive gruntvannsteori og målingene for de laveste egenperiodene?