Obligatorisk oppgave 2

MEK4320/MEK9320, høst 2011

Innleveringsfrist: Mandag 31. oktober

Bølger på langsomt varierende vilkårlig dyp

Vi betrakter tyngdebølger på vann med varierende dyp. Bunnen er gitt ved $z = -h(x, y)$. Vi antar ikke gruntvannsteori, så kh kan her være vilkårlig stor eller liten.

a) Forklar at det kinematiske bunnkravet kan skrives

$$\nabla\phi \cdot \nabla h = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad z = -h(x, y),$$

og skriv opp de lineariserte Euler likningene uttrykt i overflatehevningen $\eta(x, y, t)$ og hastighetspotensialet $\phi(x, y, z, t)$.

b) Vi antar nå at dybden varierer langsomt i forhold til en lokal bølgelende, dvs.

$$\frac{|\nabla h|}{kh} = \mathcal{O}(\epsilon), \qquad \epsilon \ll 1.$$

Det kan da være naturlig å anta at modulasjonen av bølgetoget skjer på de langsomme skalaene $x_1 = \epsilon x$, $y_1 = \epsilon y$ og $t_1 = \epsilon t$.

Skriv ned likningene fra a) uttrykt i variablene x_1, y_1, t_1 og z slik at ordningsparameteren ϵ kommer eksplisitt fram.

c) Vi antar nå WKB løsninger på formen

$$\phi = [A_0(x_1, y_1, z, t_1) + \epsilon A_1(x_1, y_1, z, t_1) + \cdots]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\chi(x_1, y_1, t_1)}$$
$$\eta = [B_0(x_1, y_1, t_1) + \epsilon B_1(x_1, y_1, t_1) + \cdots]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\chi(x_1, y_1, t_1)}.$$

Vi definerer lokal bølgetallsvektor og lokal frekvens som henholdsvis

$$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y) = \nabla_1 \chi, \quad \omega = -\frac{\partial \chi}{\partial t_1},$$

der $\nabla_1 = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial y_1)$.

Løs likningene fra b) til ledende orden i ϵ. Dette bør (blant annet) gi oss dispersjonsrelasjonen $\omega(\boldsymbol{k})$.

d) Skriv ned strålelikningene for dispersjonsrelasjonen fra c).

e) Bruk Matlab eller liknende[1] til å løse strålelikningene numerisk for følgende tilfeller:

1. **Bølger på skrå ut fra strand**
   La dybden være gitt ved $h(x) = \alpha x$. Se på bølger som beveger seg ut fra stranda, og som nært stranda nesten beveger seg parallelt med x-aksen, bruk for eksempel følgende initialbetingelser:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t=0) &= (0.01, y_0),\\ \boldsymbol{k}(t=0) &= (1, 0.01),\\ \omega(t=0) &= \omega(\boldsymbol{k}(t=0), \boldsymbol{x}(t=0)).\end{aligned}$$

   Plott stråler når $\alpha = 1$ og når $\alpha = 0.1$. Kommenter resultatene.

2. **Bølger over sirkulær grunne**
   La dybden være gitt ved

$$h(x,y) = H_0 \left(1 - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{L^2}}\right).$$

   Plott stråler for bølger som har bølgelengde $\lambda = 100m$ og som kommer inn mot grunnen parallelt med x-aksen. Velg fornuftige verdier for L og H_0 basert på bølgelengden λ. Hvordan varierer bølgelengden når bølgene går over grunnen?

[1] Det letteste er antagelig å bruke innebygde funksjoner for å løse systemer av ode-er, f.eks. `ode45` i Matlab eller `scipy.integrate.ode` i Python.