MEK4480

Obligatorisk oppgave 1 av 3

Innleveringsfrist

Fredag 26. februar 2021, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

Husk at skriving i LaTeXtar en del tid hvis man ikke har brukt det mye før. Gruppelærer setter stor pris på lesbarheten, men det hjelper ikke hvis du ikke rekker å gjøre ferdig obligen på grunn av at du valgte å skrive i LaTeX!

LYKKE TIL!

1. Suppose $\mathbf{u}$ and $\mathbf{u}'$ are two solutions of the Stokes equations that satisfy the same boundary conditions on S, which is the boundary to the volume V. Show that $2\mu \int_V (e'_{ij} - e_{ij})(e'_{ij} - e_{ij})dV = 2\mu \int_V (\mathbf{e}' - \mathbf{e})(\mathbf{e}' - \mathbf{e})dV = 0$. What does this mean? ($e_{ij}$ is the rate of strain tensor.)

2. Consider a closed region of fluid with volume V bounded by the surface S. Suppose $\mathbf{u}$ and $\mathbf{u}'$ are two solutions of the Stokes equations, with the respective stress field $\mathbf{T}$ and $\mathbf{T}'$. Show that $\oint_S \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T}' \cdot \mathbf{n})dS = \oint_S \mathbf{v}' \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})dS$ where $\mathbf{n}$ is the normal to the surface. What does this proof illustrate?

3. The vector potential is defined as $\mathbf{A} = \frac{\psi}{r\sin(\theta)}\mathbf{e}_\phi$, show how the differential operator $E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\eta^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ with $\eta = cos(\theta)$ appears when deriving the equation for the vorticity $\omega = -\frac{1}{r\sqrt{1-\eta^2}}E^2\psi\mathbf{e}_\phi$ and the stream function $E^2(E^2\psi) = 0$ in spherical coordinates.

4. Prove equation 7-132 (Hints: i) How do you express the unit vectors in spherical coordinates in terms of the unit vectors in rectangular coordinates? ii) Does the force depend on R^*? iii) Find how to describe the Stokes equations in spherical coordinates (check the text book)? How to compute the pressure and its contribution to the force? (Maple/ Mathematica my help the final integration once the problem is defined.)

5. Derive Stokes law for drag force on a sphere with radius a in a flow with constant velocity along the symmetry axis. How does the force change if we have free slip on the substrate of the sphere i.e. the limit of a bubble, $e_{r\theta} = 0$ at $r = a$?

6. We have the sphere with mass m of radius a that sediments by gravity $-g$ in z-direction in a quiescent fluid with viscosity μ and density ρ. i) Determine the constant sedimentation velocity in z-direction ii) Assume the sphere is exposed to a side wind with constant speed U_x along the x-direction. Find the velocity of the sphere along the two directions, x and z.

7. Consider a liquid droplet with viscosity $\hat{\mu}$ that rises at a constant velocity $U\mathbf{e_z}$ through a viscous fluid with viscosity μ, where the flow in both phases are described by Stokes flow. Assume no deformation of the droplet. i) What are the boundary conditions at the free surface ii) Find the stream function inside $\hat{\psi}$ and outside ψ the droplet and plot the streamlines. iii) Find the drag force on the droplet. Discuss the limits when $\lambda = \hat{\mu}/\mu \to 0$ and $\lambda = \hat{\mu}/\mu \to \infty$.