Varians og momenter

Definisjon: Anta at X^n er integrerbar. Da kalles

$$E[X^n]$$

kalles det n-te momentet til X. Det sentraliserte n-te momentet er

$$E[(X-E(X))^n]$$

Variansen til X er det samme som det sentraliserte 2-momentet

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X-E(X))^2]$$

Standardavvik: $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Setning: $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

Bevis: $\mathrm{Var}(X) = E[(X-E(X))^2]$

$$= E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2]$$

$$= E[X^2] - E[\underbrace{2E(X)}_{\text{konstant}}X] + E[E(X)^2]$$

$$= E[X^2] - \underbrace{2E(X)E(X)}_{-2E(X)^2} + E[X^2]$$

$$= \underline{E[X^2] - E(X)^2}$$

Uavhengighet

Teorem: Anta at X, Y er uavhengige stokastiske variable. Dersom X og Y er integrerbare, så er XY integrerbar og
$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Bevis: Anta først at X og Y er diskrete fordelinger:
$$X = \sum_i x_i \mathbb{1}_{\{\omega : X(\omega) = x_i\}}, \quad Y = \sum_j y_j \mathbb{1}_{\{\omega : Y(\omega) = y_j\}}$$

Da er
$$XY = \sum_{i,j} x_i y_j \mathbb{1}_{\{\omega : X(\omega) = x_i \text{ og } Y(\omega) = y_j\}}$$

Sjekker at XY er integrerbar:
$$\sum_{i,j} |x_i y_j| P\{\omega : X(\omega) = x_i \text{ og } Y(\omega) = y_j\}$$
$$= \sum_{i,j} |x_i||y_j| P\{\omega : X(\omega) = x_i\} P\{\omega : Y(\omega) = y_j\}$$
$$= \underbrace{\left(\sum_i |x_i| P\{\omega : X(\omega) = x_i\}\right)}_{\text{endelig}} \underbrace{\left(\sum_j |y_j| P\{\omega : X(\omega) = y_j\}\right)}_{\text{endelig}} < \infty$$

fordi X integrerbar fordi Y er integrerbar

$$E[XY] = \sum x_i y_j P\{\omega : X(\omega) = x_i \text{ og } Y(\omega) = y_j\}$$

$\vdots$ som over

$$\left(\sum_i x_i P\{\omega : X(\omega) = x_i\}\right)\left(\sum y_j P\{\omega : Y(\omega) = y_j\}\right)$$
$$= E[X]\,E[Y]$$

Vi må nå generalisere til generelle stokastiske variable.

Idé: $E[XY] \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} E[\bar{X}_n \bar{Y}_n] = \lim_{n\to\infty} E[\bar{X}_n]E[\bar{Y}_n] = E[X]E[Y]$

Vi har
$$|\bar{X}_n\bar{Y}_n - XY| = |\underbrace{\bar{X}_n\bar{Y}_n - \bar{X}_n Y} + \underbrace{\bar{X}_n Y - XY}|$$
$$\leq |\bar{X}_n\bar{Y}_n - \bar{X}_n Y| + |\bar{X}_n Y - XY|$$
$$\leq |\bar{X}_n| \underbrace{|\bar{Y}_n - Y|}_{\leq \frac{1}{2^n}} + |Y| \underbrace{|\bar{X}_n - X|}_{\leq \frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n} \left| |\bar{X}_n| + |Y| \right|$$
$$\leq \frac{1}{2^n} \left| |\bar{X}_0| + |Y_0| + 2 \right|$$

$E[X] \cdot E[Y]$

$$\left|E[\bar{X}_n]E[\bar{Y}_n] - E[XY]\right| \leq \left|E[\bar{X}_n\bar{Y}_n] - E[XY]\right|$$
$$\leq E\left[|\bar{X}_n\bar{Y}_n - XY|\right] \leq E\left[\tfrac{1}{2^n}(|\bar{X}_0| + |Y_0| + 2)\right] \to 0$$

Altså er $E[X]E[Y] = E[XY]$.

Korollar: Hvis X, Y er uavhengige stokastiske variable, så er
$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$$

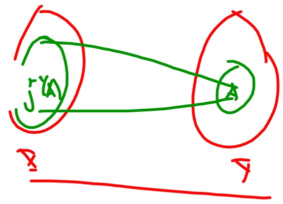
Bevis:
$$\operatorname{Var}(X+Y) = E[(X+Y)^2] - (E[X+Y])^2$$
$$= E[X^2 + 2XY + Y^2] - (E(X) + E(Y))^2$$
$$= E[X^2] + \underbrace{\cancel{2E[XY]}}_{E[X]E[Y]} + E[Y^2] - E(X)^2 - \cancel{2E(X)E(Y)} - E(Y)^2$$
$$= \underbrace{E[X^2] - E(X)^2}_{\operatorname{Var}(X)} + \underbrace{E[Y^2] - E(Y)^2}_{\operatorname{Var}(Y)}$$

Oppgave 2.11: Vis ( ) $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$

(i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$f: X \to Y \quad f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$



Bevis: (i)

$x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B$

$\Leftrightarrow f(x) \in A$ eller $f(x) \in B$

$\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \cup B)$

(ii) $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$

$\Leftrightarrow f(x) \in A$ og $f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ og $x \in f^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

( ) $x \in f^{-1}(A^c) \Leftrightarrow f(x) \in A^c \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A)$

$\Leftrightarrow x \in [f^{-1}(A)]^c$

Oppgave 2.16. $\{X_n\}$ er en følge av stokastiske variabler:

a) Vis at $Y = \sup_n X_n$ er en stokastisk variabel

— " — $Z = \inf X_n$ —— " ——

Nok å vise at $\{\omega : Y(\omega) > \alpha\}$ er målbar for alle α.

Observer at $Y(\omega) > \alpha \Leftrightarrow X_n(\omega) > \alpha$ for minst én n.

Altså

$$\{\omega : Y(\omega) > \alpha\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{\omega : X_n(\omega) > \alpha\}}_{\text{målbar}}$$

målbar siden en tellbar union av målbare mengder er målbar.

For å vise at Z er målbar, er det nok å vise at $\{\omega : Z(\omega) < \alpha\}$ er målbar for alle α.

Observer at $Z(\omega) < \alpha \Leftrightarrow X_n(\omega) < \alpha$ for minst én n

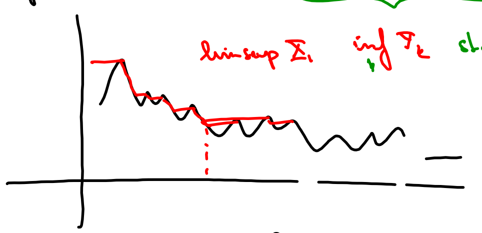
Altså

$$\{\omega : Z(\omega) \quad\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : X_n(\omega) < \alpha\}$$

b) Vis at $\limsup_{n\to\infty} X_n$ $\liminf_{n\to\infty} X_n$ er målbare.

$\limsup X_n =$ $\quad Y_k = \underbrace{\sup\{X_n : n \geq k\}}$ stokastisk variabel

$\limsup X_n$ $\inf_k Y_k$ stokastisk



c) $\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n$ eksisterer$\} \in \mathcal{F}$

"

$\{\omega : \underbrace{\limsup X_n - \liminf X_n}_{\text{U stok. variabel}} = 0\} \in \mathcal{F}$.

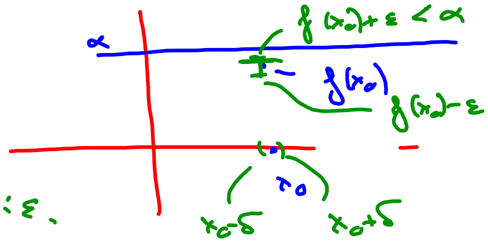
2.17: Vis at en kontinuerlig funksjon $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er en Borel-funksjon, dvs

$\{x: f(x) < \alpha\}$ er en Borelmengde ... må at $\{x: f(x)<\alpha\}$ er en Borel-mengde for alle α.

Borelmengden er den minste σ-algebra som inneholder de åpne mengdene / de åpne intervaller

Holder å vise at $G=\{x: f(x)<\alpha\}$ er åpen. Anta at $x_0\in G$, vi må vise at det finnes en $\delta>0$ slik at $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq G$.

Siden $x_0\in G$, så $f(x_0)<\alpha$.



Velg δ slik at om $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, så er $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Da er $f(x)<\alpha$, så $x\in G$.

Oppgave 2.20: Anta at f og g er Borelfunksjoner. Vis at dersom X og Y er uavhengige, så er $f(X)$ og $g(Y)$ også uavhengige.

Løsning: Vet at $f(X)$ og $g(Y)$ er stokastiske variabler: Må sjekke om

$$P\{\omega: f(X(\omega))\le x \text{ og } g(Y(\omega))\le y\}=P\{\omega: f(X)\le x\}P\{\omega: g(Y)\le y\}$$

Har

$$P\{\omega: f(X(\omega))\le x \text{ og } g(Y(\omega))\le y\}$$

$$=P\{\omega: X(\omega)\in \underbrace{f^{-1}(-\infty,x]}_{\text{Borel mengde}} \text{ og } Y(\omega)\in \underbrace{g^{-1}(-\infty,y]}_{\text{Borel mengde}}\}\quad \text{Th. 2.20}$$

$$=P\{\omega: X(\omega)\in f^{-1}(-\infty,x]\}P\{\omega: Y(\omega)\in g^{-1}(-\infty,y]\}$$

$$=P\{\omega: f(X(\omega))\le x\}P\{\omega: g(Y(\omega))\le y\}$$