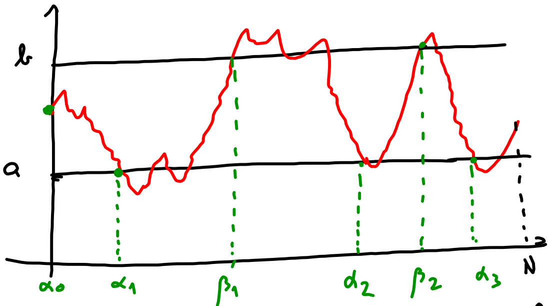
Konvergens av martingaler

Anta at $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ er en følge av tall og la $a<b$.



$\alpha_0 = 0$

$\alpha_1 = \inf\{n : x_n \le a\}$ ellers $N+1$ dersom en slik n ikke finnes

$\beta_1 = \inf\{n > \alpha_1 : x_n \ge b\}$ — " —

$\alpha_2 = \inf\{n > \beta_1 : x_n \le a\}$ — " —

$\beta_2 = \inf\{n > \alpha_2 : x_n \ge b\}$ — " —

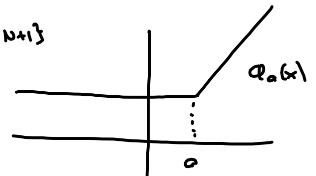
⋮

Antall oppkryssinger: $\nu_N([a,b]) = \sup\{n : \beta_n < N+1\}$

Anta nå at $\{X_n\}_{n\in\{0,1,2,3,\dots,N\}}$ er en submartingal. Vi kan nå definere $\alpha_n(\omega)$ og $\beta_n(\omega)$ for hver $\omega\in\Omega$. Da er α_n og β_n stoppetider.

Vi innfører en ny submartingal $\{\hat X_n\}_{n\in\{0,1,2,\dots,N,N+1\}}$

For $n \le N$, er $\hat X_n = \underbrace{X_n \vee a}_{\max\{X_n,a\}} = \varphi_a(X_n)$



La $\hat X_{N+1} = \hat X_N$.

$$\underbrace{\hat X_N}_{\hat X_{N+1}} - \hat X_0 = (\hat X_{\alpha_1} - \underbrace{\hat X_{\alpha_0}}_{\hat X_0}) + (\hat X_{\beta_1} - \hat X_{\alpha_1}) + (\hat X_{\alpha_2} - \hat X_{\beta_1}) + (\hat X_{\beta_2} - \hat X_{\alpha_2}) + \cdots + (\hat X_{\alpha_{N+1}} - \hat X_{\beta_N})$$

$$= (\hat X_{\alpha_1} - \hat X_{\alpha_0}) + \sum_{n=1}^{N} (\hat X_{\beta_n} - \hat X_{\alpha_n}) + \sum_{n=1}^{N} (\hat X_{\alpha_n} - \hat X_{\beta_n})$$

Tar forventninger

$$E[\hat X_N - \hat X_0] = \underbrace{E[\hat X_{\alpha_1} - \hat X_{\alpha_0}]}_{\ge 0} + E\Big[\sum_{n=1}^{N} (\hat X_{\beta_n} - \hat X_{\alpha_n})\Big] + \underbrace{E\Big[\sum_{n=1}^{N} (\hat X_{\alpha_n} - \hat X_{\beta_n})\Big]}_{\ge 0}$$

$$\ge E\Big[\sum_{n=1}^{N} \underbrace{(\hat X_{\beta_n} - \hat X_{\alpha_n})}_{\ge b-a}\Big] \ge E\Big[\underbrace{(b-a)}_{\text{"størrelse på oppkryss"}} \underbrace{\nu_N([a,b])}_{\text{antall oppkryss.}}\Big] = (b-a)\, E[\nu_N([a,b])]$$

Altså: $$E[\nu_N([a,b])] \le \frac{E[\hat X_N - \hat X_0]}{b-a} \le \frac{E[(X_N - a)_+]}{b-a}$$

fordi $\hat X_N - \hat X_0 = (X_N \vee a) - (X_0 \vee a) \le (X_N \vee a) - a = (X_N - a)_+$

Oppkryssningslemmaet: Hvis $\{X_n\}$ er en submartingal og $a<b$, så er

$$E[\nu_N([a,b])] \le \frac{E[(X_N - a)_+]}{b-a}$$

Definisjon: $\nu_\infty([a,b]) = \lim_{N\to\infty} \nu_N([a,b])$

Korollar: Hvis $\{X_n\}$ er en submartingal og $a<b$, så er

$$E[\nu_\infty([a,b])] \le \frac{\sup E[(X_N - a)_+]}{b-a}$$

Bevis: Vi har

$$E[\nu_\infty([a,b])] = E\Big[\underbrace{\lim_{N\to\infty}}_{\text{voksende}} \nu_N([a,b])\Big] \overset{MKT}{=} \lim_{N\to\infty} E[\nu_N([a,b])] \le \frac{\sup_N E[(X_N - a)_+]}{b-a}$$

<u>Konvergensteoremet for martingaler</u>: Anta at $\{X_n\}$ er en submartingal og at $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty$. Da finnes det en integrerbar X_∞ slik at $X_n \to X_\infty$ n.o.a.

<u>Bevis</u>: La $a<b$. Da er

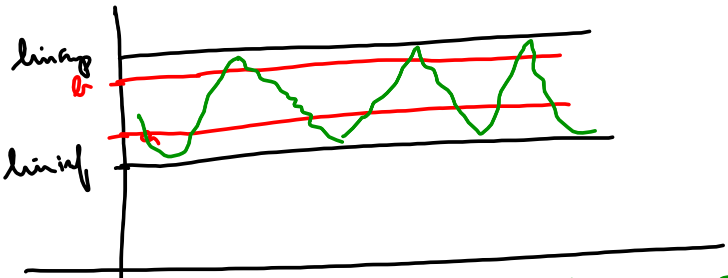
$$E\left(\nu_\infty([a,b])\right) \le \frac{\sup E[(X_n-a)_+]}{b-a} \le \frac{\sup E[|X_n|]+a}{b-a} < \infty .$$

La $\Omega_{a,b} = \{\omega : X_n(\omega)$ har uendelig mange oppkryssinger$\}$.

Da er $P(\Omega_{a,b}) = 0$.

La $\Omega' = \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}} \Omega_{a,b}$, da er $P(\Omega') = 0$.

Observer at hvis $\limsup X_n(\omega) > \liminf X_n(\omega)$, da finnes det rasjonale a,b slik at $\omega\in\Omega_{a,b}$.



Dette betyr at alle ω slik at $\limsup X_n(\omega) > \liminf X_n(\omega)$ ligger i Ω' som har mål 0.

For nesten alle ω er derfor $\limsup X_n(\omega) = \liminf X_n(\omega)$ og dermed eksisterer $X_\infty = \lim X_n$ n.o.a.

La oss vise at X_∞ er endelig og integrerbar:

$$E[|X_\infty|] = E[\liminf |X_n|] \le \liminf E[|X_n|] < \infty \text{ per antagelse.}$$

Uniform integrerbarhet:

Setning: Anta at X er integrerbar. Da er

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{|X|\geq N\}} |X|\,dP = 0$$

dvs at det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes det en N slik at $\int_{\{|X|\geq N\}} |X|\,dP < \varepsilon$.

Bevis:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{|X|\geq N\}} |X|\,dP = \lim_{N\to\infty} \int \underbrace{1_{\{|X|\geq N\}} |X|}_{\leq |X|}\,dP \overset{DKT}{=} \int \underbrace{\lim_{N\to\infty}\left(1_{\{|X|\geq N\}} |X|\right)}_{0} dP = 0$$

Definisjon: Anta at $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ er en familie av stokastiske variable. Vi sier at $\{X_\alpha\}$ er uniformt integrerbar dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en N slik

$$\int_{\{|X_\alpha|\geq N\}} |X_\alpha|\,dP < \varepsilon \quad \text{for alle } \alpha\in I.$$

Setning: La $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ være en familie av stokastiske variable.

(i) Hvis det finnes en integrerbar Y slik at $|X_\alpha| \leq Y$, så er $\{X_\alpha\}$ uniformt integrerbar.

(ii) Hvis $E[X_\alpha^2] < K$ for alle α, så er $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uniformt integrerbar.

(iii) Hvis $\{X_\alpha\}$ er uniformt integrerbar, så er $\{E[|X_\alpha|]\}_{\alpha\in I}$ begrenset.

Bevis (i) Gitt $\varepsilon > 0$, så finnes det en N slik at

$$\int_{[|Y|\geq N]} |Y|\,dP < \varepsilon.$$

Men da

$$\int_{[|X_\alpha|\geq N]} |X_\alpha|\,dP \leq \int_{[|Y|\geq N]} |Y|\,dP < \varepsilon.$$

(ii)

$$\int_{[|X_\alpha|\geq N]} |X_\alpha|\,dP \leq \int_{[|X_\alpha|\geq N]} \frac{|X_\alpha|^2}{N}\,dP \leq \frac{K}{N}.$$

Gitt ε, kan vi velge $N > \frac{K}{\varepsilon}$ og få

$$\int_{[|X_\alpha|\geq N]} |X_\alpha|\,dP < \frac{K}{\frac{K}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

(iii) Anta at $\{X_\alpha\}$ er uniformt integrerbar. Velg $\varepsilon = 1$, da finnes det en N slik at

$$\int_{[|X_\alpha|\geq N]} |X_\alpha|\,dP < 1.$$

Dermed

$$E[|X_\alpha|] = \int_{[|X_\alpha|< N]} |X_\alpha|\,dP + \int_{[|X_\alpha|\geq N]} |X_\alpha|\,dP \leq N+1$$

Setning: $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ er uniformt integrerbar hvis og bare hvis $\{E[|X_\alpha|]\}_{\alpha \in I}$ er begrenset og

(*) $\lim\limits_{P(\Lambda)\to 0} \int_\Lambda |X_\alpha|\, dP = 0$ uniformt i α

dvs at for hver $\varepsilon > 0$ finnes det en $\delta > 0$ slik at når $P(\Lambda) < \delta$, så er $\int_\Lambda |X_\alpha|\, dP < \varepsilon$ for alle α.

Bevis: Anta først at $E[|X_\alpha|] \leq K$ for alle α og at (*) gjelder.

Vi ser at $N\, P[|X_\alpha| \geq N] \leq E[|X_\alpha|] \leq K \Rightarrow P[|X_\alpha| \geq N] \leq \frac{K}{N}$.

Gitt en $\varepsilon > 0$, må vi vise at det finnes en N slik at

$$\int_{[|X_\alpha| \geq N]} |X_\alpha|\, dP < \varepsilon \text{ for alle } \alpha.$$

(*) forteller oss at det finnes δ slik at når $P(\Lambda) < \delta$, så er $\int_\Lambda |X_\alpha|\, dP < \varepsilon$. Velger N så stor at $\frac{K}{N} < \delta$. Da er $P[|X_\alpha| \geq N] \leq \frac{K}{N} < \delta$ og dermed

$$\int_{[|X_\alpha| \geq N]} |X_\alpha|\, dP < \varepsilon.$$

Anta så at $\{X_\alpha\}$ er uniformt integrerbar. Vi vet at $E[|X_\alpha|]$ er begrenset, så det holder å vise (*).

Gitt $\varepsilon > 0$, finner vi først en N slik at $\int_{[|X_\alpha| \geq N]} |X_\alpha|\, dP < \frac{\varepsilon}{2}$.

Velg så $\delta < \frac{\varepsilon}{2N}$. Hvis $P(\Lambda) < \delta$, så er

$$\int_\Lambda |X_\alpha|\, dP \leq \underbrace{\int_{\Lambda \cap \{|X_\alpha| < N\}} |X_\alpha|\, dP}_{\leq N\delta} + \int_{\Lambda \cap \{|X_\alpha| \geq N\}} |X_\alpha|\, dP \leq N \cdot \delta + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Teorem: Anta at $\{X_n\}$ er en følge av stokastiske variable slik at $X_n \to X$ n.o.a eller i sannsynlighet. Da er følgende ekvivalent.

(i) $\{X_n\}$ er uniformt integrerbar

(ii) $X_n \to X$ i L^1, dvs $E[|X_n - X|] \to 0$ når $n \to \infty$.

(iii) $\lim E[X_n] = E[X]$. $= E[\lim X_n]$

Bevis: Planen er å vise at (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

Viser (ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$\lim_{n\to\infty} |E[X_n] - E[X]| = \lim_{n\to\infty} |E[X_n - X]| \leq \lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|] = 0$$

altså er $\lim E[X_n] = E[X]$.