Konvergens av stokastiske variable

Hva skal det bety at en følge $\{X_n\}$ av stokastiske variabler konvergerer mot en stok. variabel X?

(i) $X_n \to X$ punktvis dersom $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ for alle $\omega \in \Omega$.

(ii) $X_n \to X$ nesten sikkert / nesten overalt dersom det finnes en mengde N med $P(N)=0$ slik $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ for alle $\omega \notin N$.

(iii) $X_n \to X$ i sannsynlighet dersom vi for ethvert $\varepsilon > 0$ har

$$P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} \to 0 \text{ når } n \to \infty.$$

(iv) $X_n \to X$ i middel eller i L^1 dersom

$$E[|X_n - X|] \to 0 \text{ når } n \to \infty.$$

(v) $X_n \to X$ i p-te middel eller i L^p dersom

$$E[|X_n - X|^p] \to 0 \text{ når } n \to \infty$$

Mest aktuelt for $p=1$ og $p=2$

(vi) $X_n \to X$ i fordeling dersom $F_n(x) \to F(x)$ i alle punkter der F er kontinuerlig.

Teorem: Anta at $X_n \xrightarrow{\text{i } L^p} X$ for en $p \geq 1$. Da vil $X_n \to X$ i sannsynlighet.

Bevis: Tsjebysjevs ulikhet gir:

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \underbrace{E[|X_n - X|^p]} \to 0.$$

Teorem: Anta at $X_n \to X$ nesten sikkert. Da vil $X_n \to X$ i sannsynlighet.

Bevis: La N være en nullmengde slik at $X_n(\omega) \to X(\omega)$ når $\omega \notin N$.

La

$$Z_n(\omega) = \sup\{|X_k(\omega) - X(\omega)| : k \geq n\}.$$

La $\varepsilon > 0$ være gitt og sett

$$\Gamma_n^\varepsilon = \{\omega : Z_n(\omega) \geq \varepsilon\}.$$

Vi ser at $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n^\varepsilon \subseteq N$. Dermed er $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n^\varepsilon) = 0$, og

$$P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n^\varepsilon\Big) = \lim_{n\to\infty} P(\Gamma_n^\varepsilon)$$ ved kontinuitet ned. Dette betyr at

$$P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} \leq P\{\omega : Z_n(\omega) \geq \varepsilon\} = P(\Gamma_n^\varepsilon) \to 0$$

Altså $P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} \to 0$, så $X_n \to X$ i sannsynlighet.

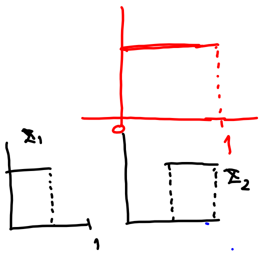
Eksempel: Omvendingen av resultatet ovenfor gjelder ikke!

Har en følge som konvergerer i sannsynlighet, men ikke i ett eneste punkt!

$\Omega = [0,1]$, P Lebesgue-mål

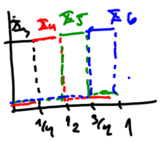
$X_0 = \mathbb{1}_{[0,1]}$

$X_1 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$, $X_2 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$



$X_3 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4}]}$, $X_4 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}$, $X_5 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}$

$X_6 = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1]}$



$X_7 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{8}]}$ ...

$\{X_n\}$ konvergerer mot 0 i sannsynlighet.

$X_n(\omega) \not\to X(\omega) = 0$ for alle ω. siden $X_n(\omega) = 1$ for uendelig mange n.

Setning: La $\{X_n\}$ en følge av utvidede stokastiske variable (tillater verdier $\pm\infty$ i tillegg til tallverdier). Da er følgende funksjoner også utvidede stokastiske variable.

(i) $Y_1(\omega) = \sup\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$

(ii) $Y_2(\omega) = \inf\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$

(iii) $Y_3(\omega) = \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)$

(iv) $Y_4(\omega) = \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)$

(v) $Y_5(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) & \text{der denne grensen eksisterer} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$

Oppgaver

3.3: Anta at $X \geq 0$ er en stok. var. Vis at hvis $E(X) = 0$, så er $X = 0$ n.o.a.

Anta at $P\{\omega : X(\omega) \neq 0\} > 0$. Må vise at i så fall er $E(X) \neq 0$.

Vi har at

$$\{\omega : X(\omega) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : X(\omega) > \tfrac{1}{2^n}\}$$

$$0 < P\{\omega : X(\omega) \neq 0\} = \lim_{n \to \infty} P\{\omega : X(\omega) > \tfrac{1}{2^n}\}$$ kont. av mål.

Dette betyr at det finnes en n slik at $P\{X(\omega) > \frac{1}{2^n}\} > 0$.

Da er $E[X] \geq E\left[\frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{\{X(\omega) > \frac{1}{2^n}\}}\right] = \frac{1}{2^n} P[X(\omega) > \tfrac{1}{2^n}] > 0$.

3.5 Vis at dersom X er integrerbar, så er

$$\lim_{c \to \infty} c P[|X| > c] = 0$$

Vi har

$$c P[|X| > c] \leq c P[\overline{|X|}_0 > c] = c E[\mathbb{1}_{\{\overline{|X|}_0 > c\}}]$$

$$= E[c \mathbb{1}_{\{\overline{|X|}_0 > c\}}] \leq E[\overline{|X|}_0 \mathbb{1}_{\{\overline{|X|}_0 > c\}}]$$

$$= \sum_{n > c} n P\{n < \overline{|X|}_0 \leq n+1\}$$ (denne rekken er konvergent siden $\overline{|X|}_0$ er integrerbar)

$\to 0$ når $c \to \infty$.

Altså $c P[|X| > c] \to 0$.

3.4 Anta at X er en positiv stokastisk variabel med fordelingsfunksjon F. Vis at

$$E[X] = \int_0^\infty (1-F(x))\,dx$$

Uformell idé: $E[X] = \int_0^\infty x\,dF(x) = \int_0^\infty x f(x)\,dx$

$$= \lim_{c\to\infty}\int_0^c x f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(\left[x(F(x)-1)\right]_0^c - \int_0^c 1\cdot(F(x)-1)\,dx\right)$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left[\underbrace{-c\,P[X>c]}_{\to 0} + \int_0^c (1-F(x))\,dx\right]$$

$$= \int_0^\infty (1-F(x))\,dx$$

Hvis vi har en tetthets-funksjon.

Delvis integrasjon: $u = x$, $v' = f(x)$; $u' = 1$, $v = F(x)-1$

$\boxed{1-F(c) = 1-P[X\le c] = P[X>c]}$

Abel summasjon: Anta at $\{a_k\}$ og $\{b_k\}$ er to følger av reelle. La $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ og anta $\lim_{n\to\infty} s_n b_n = 0$. Da er

$$\sum_{k=0}^\infty a_k b_k = \sum_{k=0}^\infty s_k(b_k - b_{k+1})$$

Bevis: Observer at $a_k = s_k - s_{k-1}$ (stemmer også for $k=0$ dersom vi setter $s_{-1}=0$)

Dermed

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^n (s_k - s_{k-1})b_k = \sum_{k=0}^n s_k b_k - \sum_{k=1}^n s_{k-1} b_k$$

$$= \sum_{k=0}^n s_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k b_{k+1} = \underbrace{s_n b_n}_{\to 0} + \sum_{k=0}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1})$$

La $n\to\infty$:

$$\sum_{k=0}^\infty a_k b_k = \sum_{k=0}^\infty s_k(b_k - b_{k+1})$$

Tilbake til stykket: $E[X] = \int_0^\infty (1-F(x))\,dx$

$$E[X] \leftarrow E[X^n] = \sum_{k=0}^\infty \frac{k}{2^n} P\left[\frac{k}{2^n} < X \le \frac{k+1}{2^n}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \underbrace{\frac{k}{2^n}}_{s_k}\left(\underbrace{P\left[X>\frac{k}{2^n}\right]}_{b_k} - \underbrace{P\left[X>\frac{k+1}{2^n}\right]}_{b_{k+1}}\right)$$

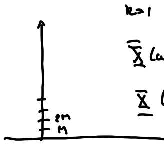
Betingelsen $s_k b_k \to 0$: $\frac{k}{2^n}P\left[X>\frac{k}{2^n}\right] \to 0$ ved 3.5.

$$\overset{\text{Abel}}{=} \sum_{k=0}^\infty \overbrace{\frac{1}{2^n}}^{a_k = \frac{1}{2^n}} \underbrace{P\left[X>\frac{k}{2^n}\right]}_{1-F\left(\frac{k}{2^n}\right)} = \underbrace{\sum_{k=0}^\infty \left(1-F\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\frac{1}{2^n}}_{\text{Riemannsum for } 1-F(x)} \to \int_0^\infty (1-F(x))\,dx$$

Altså $E(X) = \int_0^\infty (1-F(x))\,dx$

3.6 Anta $X \ge 0$ og $M \in \mathbb{R}_+$. Vis at

$$M\sum_{k=1}^\infty P\{X>kM\} \le E \le M\sum_{k=0}^\infty P[X>kM]$$



$$\left.\begin{aligned}\bar{X}(\omega) &= (k+1)M \\ \underline{X}(\omega) &= kM\end{aligned}\right\} \text{ når } kM < X(\omega) \le (k+1)M$$

$$E[X] \ge E[\underline{X}] = \sum_{k=0} kM\,P\{kM < X(\omega) \le (k+1)M\}$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \underbrace{kM}_{s_k,\ a_k = M}\left(\underbrace{P[X>kM]}_{b_k} - \underbrace{P[X>(k+1)M]}_{b_{k+1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^\infty M\,P[X>kM]$$