Uniform integrerbarhet

Husk: $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ er uniformt integrerbar dersom det for alle $\varepsilon > 0$ finnes en N slik at

$$\int_{[|X_\alpha| \geq N]} |X_\alpha| \, dP < \varepsilon \quad \text{for alle } \alpha.$$

Alternativ: $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ er uniformt integrerbar hvis og bare hvis det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en δ slik at $P(\Lambda) < \delta$, så er

$$\int_\Lambda |X_\alpha| \, dP < \varepsilon \quad \text{for alle } \alpha.$$

Teorem: Anta at $X_n \to X$ i sannsynlighet. Da er følgende ekvivalent:

(i) $\{X_n\}$ er uniformt integrerbar

(ii) $E[|X_n - X|] \to 0$ når $n \to \infty$

(iii) $\lim_{n\to\infty} E[|X_n|] = E[|X|]$.

Bevis. Plan: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\overset{(\text{ok})}{\Rightarrow}$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii) Viser først at X er integrerbar. Siden $X_n \to X$ i sannsynlighet, finnes det en delfølge $\{X_{n_k}\}$ som konvergerer mot X n.o.a. Ved Fatous lemma:

$$\int |X| \, dP = \int \liminf |X_{n_k}| \, dP \leq \liminf \int |X_{n_k}| \, dP < \infty,$$

siden $\{X_{n_k}\}$ er uniformt integrerbar og $\{E[|X_{n_k}|]\}$ da er begrenset.

Gitt en $\varepsilon > 0$, må vi vise $E[|X_n - X|] < \varepsilon$ når n er stor nok.

Siden X er integrerbar og $\{X_n\}$ er uniformt integrerbar, er også $\{X_n - X\}$ uniformt integrerbar. Dette betyr at det finnes en $\delta > 0$ slik at hvis $P(\Lambda) < \delta$, så er $\int_\Lambda |X_n - X| \, dP < \frac{\varepsilon}{2}$. Vi har

$$E[|X_n - X|] = \int_{\{|X - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}} |X_n - X| \, dP + \int_{\{|X - X_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}} |X_n - X| \, dP$$

$$\leq \underbrace{\int_{\{|X - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}} |X_n - X| \, dP}_{} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ved å velge n stor nok, kan vi få $P\{|X - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\} < \delta$.

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iii) Anta $E[|X_n|] \to E[|X|]$, skal vise $\{X_n\}$ uniformt integrerbar.

La M være så valgt at $P[|X| = M] = 0$ og $P[|X_n| = M] = 0$.

Sett

$$X^M = \begin{cases} X & \text{hvis } |X| \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\int_{\{|X_n| \geq M\}} |X_n| \, dP = \int (|X_n| - |X_n^M|) \, dP = E[|X_n|] - E[|X_n^M|]$$

$$= E[|X_n| - \cancel{|X|}] + E[\underbrace{\cancel{|X|} - \cancel{|X^M|}}_{\Downarrow\, 0}] + E[\cancel{|X^M|} - |X_n^M|]$$

Ved DKT vil $E[|X| - |X^M|] \to 0$ når $M \to \infty$, så gitt en $\varepsilon > 0$, kan vi velge M^ε slik at $E[|X| - |X^M|] < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$E[|X_n| - |X|] < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ved å velge } n \text{ stor nok (betingelsen)}$$

$$E[\underbrace{|X^M| - |X_n^M|}_{\to 0}] < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ved å velge } n \text{ stor nok.}$$

Dette betyr at for store nok n (dvs $n \geq N_0$):

$$\int_{[|X_n| \geq M^\varepsilon]} |X_n| \, dP < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Altså er følgen $\{X_{N_0}, X_{N_0+1}, \dots\}$ uniformt integrerbar. Dette medfører at hele følgen er uniformt integrerbar.

<u>Teorem</u>: Anta at $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en submartingal m.h.p. $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

La $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$. Da er følgende ekvivalente:

(i) $\{X_n\}$ er uniformt integrerbar

(ii) $\{X_n\}$ konvergerer i L^1 (dvs finnes X_∞ slik $E[|X_n - X_\infty|] \to 0$)

(iii) $\{X_n\}$ konvergerer n.o.a. mot en grense X_∞ slik at $\{X_1, X_2, \dots, X_\infty\}$ er en $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_\infty\}$-submartingal og

$E[X_n] \to E[X_\infty]$

<u>Bevis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) og (ii) $\Rightarrow$ (iii)

(i) $\Rightarrow$ (ii) Siden $\{X_n\}$ er uniformt integrerbar, er $\{E[|X_n|]\}$-begrenset, så konvergensteoremet for martingaler forteller oss at X_n konvergerer n.o.a. mot en X_∞. Siden $\{X_n\}$ uniformt integrerbar, er denne konvergensen i L^1 ifølge forrige teorem.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Siden X_n konvergerer i L^1, så vi vet at X_∞ er integrerbar. Vi må vise at $\{X_1, X_2, \dots, X_\infty\}$ er en submartingal, dvs vi må vise at $E[X_\infty \mid \mathcal{F}_n] \geq X_n$. Det er nok å vise at

$$\int_\Lambda X_n \, dP \leq \int_\Lambda X_\infty \, dP \quad \text{for alle } \Lambda \in \mathcal{F}_n$$

For $m > n$

$$\int_\Lambda X_n \, dP \leq \int_\Lambda X_m \, dP \xrightarrow[?]{m\to\infty} \int_\Lambda X_\infty \, dP$$

Dette gjelder fordi

$$\left| \int_\Lambda X_\infty \, dP - \int_\Lambda X_m \, dP \right| \leq \int_\Lambda |X_\infty - X_m| \, dP \leq \int 1_\Lambda |X_\infty - X_m| \, dP$$

$$\leq \int_\Omega |X_\infty - X_m| \, dP \longrightarrow 0.$$

9.2, 9.3, 9.5, 9.7, 9.8, 9.9, 9.10

Setting: $Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \qquad Z_n$

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ integrerbare stokastiske variable

$\mathcal{F}_j = \sigma\{Z_1, Z_2, \dots, Z_j\}$

Er på jakt etter en optimal stopptid τ slik at $E[Z_\tau] \geq E[Z_T]$ for alle andre stopptider T.

9.7: Lager en ny prosess X_n:

Hvis vi er ved tiden j i situasjonen ω, så skal $X_j(\omega)$ være den optimale forventede verdien vi kan få ut av spillet.

$$X_n(\omega) = Z_n(\omega)$$

$$X_{n-1}(\omega) = \max\{Z_{n-1}(\omega), E[X_n(\omega) \mid \mathcal{F}_{n-1}]\}$$

$$\vdots$$

$$X_j(\omega) = \max\{Z_j(\omega), E[X_{j+1}(\omega) \mid \mathcal{F}_j]\}$$

$$\vdots$$

$$X_1(\omega)$$

Snells innhylling: X_n.

a) $X_j \geq Z_j$ (direkte fra def)

b) $X_j(\omega)$ er en supermartingal: $X_j \geq E[X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j]$

c) Dersom M_j tilfredsstiller a), b), så $M_j \geq X_j$.

Vi har $X_n = Z_n \leq M_n$. Fortsetter ved baklengs induksjon: Hvis $X_{j+1} \leq M_{j+1}$, så

$$X_j = \max\{Z_j, E[X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j]\} \leq \max\{Z_j, E[M_{j+1} \mid \mathcal{F}_j]\} \leq M_j.$$

9.8 $\tau = \inf\{j : X_j = Z_j\}$ (siden $X_n = Z_n$, vil $\tau \le n$).

a) Vis at $\underbrace{\tau \text{ er stopptid}}$ og $\tau \le n$.

intuitivt rimelig siden vi sjekker om $X_1 = Z_1$, $X_2 = Z_2$, … osv til vi får napp.

b) Vis at $\{X_{j\wedge\tau} : j = 1, \dots, n\}$ er en $\{\mathcal{F}_j\}$-martingal.

Må vise at $E[X_{j+1\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_j] = X_{j\wedge\tau}$, dvs

$$\int_\Lambda X_{j+1\wedge\tau}\, dP = \int_\Lambda X_{j\wedge\tau}\, dP \quad \text{for alle } \Lambda \in \mathcal{F}_j.$$

$$\int_\Lambda (X_{j+1\wedge\tau} - X_{j\wedge\tau})\, dP = \int_{\underbrace{\Lambda\cap[\tau>j]}_{\mathcal{F}_j}} (X_{j+1} - X_j)\, dP$$

$$= \int_{\Lambda\cap[\tau>j]} (X_{j+1} - \underbrace{E[X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j]}_{j<\tau.})\, dP = \int_{\underbrace{\Lambda\cap[\tau>j]}_{\mathcal{F}_j}} X_{j+1}\, dP - \int_{\underbrace{\Lambda\cap[\tau>j]}_{\mathcal{F}_j}} E[X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j]\, dP = 0.$$

Vi skal også vise at $E[X_1] = E[Z_\tau]$.

Vi har
$$E[X_1] = E[X_{1\wedge\tau}] \underset{\text{martingal.}}{=} E[X_{n\wedge\tau}] = E[X_\tau] \underset{\text{definisjon av } \tau.}{=} E[Z_\tau]$$

9.9: Hvis T er en annen stopptid, så $E[Z_T] \le E[Z_\tau]$

Regner litt:

$$\underbrace{E[Z_\tau - Z_T] \ge E[X_\tau - X_T]}_{Z_\tau = X_\tau \text{ men } X_T \ge Z_T} = \int_{[T>\tau]} (X_\tau - X_T)\, dP + \int_{[\tau>T]} (X_\tau - X_T)\, dP$$

$$= -\underbrace{\overbrace{\int_{[T>\tau]} (X_T - X_\tau)\, dP}^{\text{vi}}}_{\ge 0} + \overbrace{\int_{[\tau\ge T]} (X_\tau - X_T)\, dP}^{0}$$

$$= -\underbrace{\int (X_T - X_{T\wedge\tau})\, dP}_{\substack{\text{negativ} \\ \text{supermartingal}}} + \underbrace{\int (X_\tau - X_{T\wedge\tau})\, dP}_{\substack{= 0 \\ \text{martingal}}} \ge 0.$$