Lévys kontinuitetsteorem

Husk: $\mu_n \Rightarrow \mu \iff E[f(X_n)] \to E[f(X)]$ for alle kont., begrensede f

$$\iff \int f(x)\,d\mu_n(x) \to \int f(x)\,d\mu(x) \quad \text{— " —}$$

Teorem: La $\{\mu_n\}$ være en følge av fordelinger og la φ_n være de karakteristiske funksjonene. Hvis $\mu_n \Rightarrow \mu$, så vil φ_n konvergere punktvis mot φ der φ er den karakteristisk funksjonen til μ.

Bevis: $\varphi_n(t) = E[e^{itX_n}] = E[\cos tX_n] + i\,E[\sin tX_n]$

$$\to E[\cos tX] + i\,E[\sin tX] = E[e^{itX}] = \varphi(t)$$

Hva med motsatt implikasjon?

Innledende regnestykke:

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\mu(x)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T}^{T} e^{itx}\,dt\right]d\mu(x) = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{itx}}{ix}\right]_{t=-T}^{t=T} d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{iTx} - e^{-iTx}}{ix}\right]d\mu(x)$$

$\boxed{\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}}$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\Bigg[\underbrace{\frac{e^{iTx} - e^{-iTx}}{2i}}_{\sin Tx}\Bigg]d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Tx}{Tx}\,dx$$

Lemma: La μ være en fordeling med karakteristisk funksjon φ. For $A > 0$ så

$$\mu([-2A, 2A]) \geq A\,\Bigg|\underbrace{\int_{-1/A}^{1/A}\varphi(t)\,dt}_{\approx A\cdot\frac{2}{A} = 2}\Bigg| - 1$$

Bevis: For $T > 0$, har vi

$$\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T}\varphi(t)\,dt\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Tx}{Tx}\,d\mu(x)\right|$$

$$\leq \int_{-2A}^{2A}\underbrace{\left|\frac{\sin Tx}{Tx}\right|}_{\leq 1}d\mu(x) + \int_{2A}^{\infty}\underbrace{\left|\frac{\sin Tx}{Tx}\right|}_{\leq \frac{1}{2TA}}d\mu(x) + \int_{-\infty}^{-2A}\left|\frac{\sin Tx}{Tx}\right|d\mu(x)$$

$$\leq \mu([-2A, 2A]) + \frac{1}{2TA}\mu((2A, \infty)) + \frac{1}{2TA}\mu((-\infty, -2A))$$

$$\leq \mu([-2A, 2A]) + \frac{1}{2TA}\left[1 - \mu([-2A, 2A])\right]$$

Velger $T = \frac{1}{A}$:

$$\frac{A}{2}\left|\int_{-1/A}^{1/A}\varphi(t)\,dt\right| \leq \mu([-2A, 2A]) + \frac{1}{2}\left[1 - \mu([-2A, 2A])\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mu([-2A, 2A]) + \frac{1}{2}$$

Dette gir

$$\mu([-2A, 2A]) \geq A\int_{-1/A}^{1/A}\varphi(t)\,dt - 1$$

Lemma: Anta at $\{\mu_n\}$ er en følge av fordelinger med karakteristiske funksjoner φ_n. Anta også at det for ethvert $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_n(t)\,dt > 1 - \varepsilon/2 \quad \text{for alle } n.$$

Da er følgen $\{\mu_n\}$ stram.

Bevis: Gitt en $\varepsilon > 0$ og velg $\delta > 0$ som ovenfor. Setter vi $A = 1/\delta$, har vi

$$\mu_n([-2A, 2A]) \geq A\int_{-1/A}^{1/A}\varphi_n(t)\,dt - 1 = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_n(t)\,dt - 1$$

$$> 2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - 1 = 1 - \varepsilon.$$

Gitt en $\varepsilon > 0$, finnes det altså en $N = 2A$ slik at $\mu_n([-N, N]) > 1 - \varepsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$, dvs at $\{\mu_n\}$ er stram.

<u>Lévy kontinuitetsteorem</u> La $\{\mu_n\}$ være en følge av fordelinger med kar. funk. φ_n. Anta

(a) $\{\varphi_n\}$ konvergerer punktvis mot en grensefunksjon φ_∞.

(b) φ_∞ er kontinuerlig i 0.

Da har

(i) $\{\mu_n\}$ konvergerer i fordeling mot en fordeling μ_∞.

(ii) φ_∞ er den karakteristiske funksjonen til μ_∞.

<u>Bevis:</u> Vi skal først bruke kontinuiteten av φ_∞ i 0 til å vise at $\{\mu_n\}$ er stram. Gitt en $\varepsilon>0$ finnes det en $\delta>0$ slik at hvis $|t|<\delta$, så er $|1-\varphi(t)|<\frac{\varepsilon}{4}$. Dermed

$$\frac{1}{2\delta}\left|\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_n(t)\,dt\right| = \frac{1}{2\delta}\left(\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_\infty(t)\,dt}\; + \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_n(t)\,dt \overset{\text{DKT}}{-} \int_{-\delta}^{\delta}\varphi_\infty(t)\,dt}\right)$$

$$\geq \underbrace{1}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon}{4} > 1-\frac{\varepsilon}{2}$$

for store nok n, dvs for $n \geq N_0$.

Dette betyr at følgen $\{\mu_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ er stram. Ifølge Helleys teorem finnes det en delfølge $\{\mu_{n_k}\}$ som konvergerer i fordeling mot en μ_∞. Ifølge det vi allerede har sett vil φ_{n_k} konvergere mot den karakteristiske funksjonen til μ_∞. Siden vi per antagelse vet at φ_{n_k} konvergerer mot φ_∞, så må φ_∞ være den karakteristiske funksjonen til μ_∞.

Ved å anvende resonnementet på en vilkårlig delfølge av $\{\mu_n\}$, ser vi at også denne må ha en delfølge som konvergerer μ_∞.

Dette betyr at den opprinnelige følgen vil konvergere mot μ_∞

Oppgaver : 6.6 og 6.8

Oppgave 6.6 : $\{X_n\}$ en følge av uavhengige stok. var., symmetriske.

Vis at $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ er symmetriske.

En stok. var. er sym. hvis og bare hvis φ_X er reell og symmetrisk.

$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) \dots \varphi(X_n(t))$ reell og symmetrisk siden

hver φ_{X_i} er reell og symmetrisk.

Moteksempel på opprinnelig: X, Y symmetriske, men $X+Y$ ikke sym.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $P\{\omega_i\} = 1/3$ $\quad X(\omega_1) = 1$, $X(\omega_2) = -1$, $X(\omega_3) = 0$

$Y(\omega_1) = 1$, $Y(\omega_2) = 0$, $Y(\omega_3) = -2$

$P[X+Y=2] = \frac{1}{3} \quad P[X+Y=-2] = 0$

b) Anta vi at X_n er $\overset{\text{symmetriske}}{\text{uavhengige}}$ og identisk fordelte. Anta også at X_n ikke er null n.o.a. Vis at

$\limsup S_n = \infty$ n.o.a

$\liminf S_n = -\infty$ n.o.a.

Hvis dette ikke er tilfellet, finnes det et intervall $[a,b]$ slik at $P[S_n \in [a,b]] \geq \varepsilon$ for alle n. Dette betyr at $\underset{\downarrow}{N(0,1)}$.

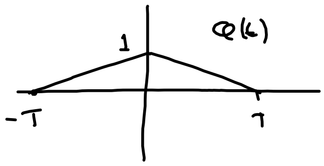
$P[(S_n + \varepsilon\xi) \in [a,b]] \geq \frac{\varepsilon}{2}$ for en tilstrekkelig liten perturbasjon $\varepsilon\xi$

Fra beviset for Lévys inversjonsteorem har vi nå at

$$\frac{\varepsilon}{2} < P[S_n + \varepsilon\xi \in [a,b]] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\varphi_n(t)}_{\to 0 \text{ n.o.a}} e^{-\frac{\varepsilon^2 t^2}{2}} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it}\, dt \xrightarrow{\text{DKT}} 0$$

Vi har at $\varphi_n(t) = \varphi_{X_1}\varphi_{X_2}\dots\varphi_{X_n} = \varphi(t)^n \to 0$ for n.o. t.

6.8 $\varphi(t) = \left(1 - \frac{|t|}{T}\right)^+ \quad , T \geq 0$



La oss prøve å finne ut hvilken f dette er den karakteristiske til.
I så fall er $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx}\,dx$

Da er $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-itx}\,dt$

Regner:
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-itx}\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) e^{-itx}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|t|}{T}\right)\left(\cos(tx) - i\sin(tx)\right)dt = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{0}^{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right)\cos(tx)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right)\cos(tx)\,dt \qquad \begin{array}{ll} u = 1 - \frac{t}{T} & v' = \cos tx \\ u' = -\frac{1}{T} & v = \frac{\sin tx}{x} \end{array}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\frac{\sin tx}{x}\right]_0^T}_{0} + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\sin tx}{x}\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi T}\left[-\frac{\cos tx}{x^2}\right]_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{\pi T x^2}\left[1 - \cos Tx\right] = \frac{1 - \cos Tx}{\pi T x^2}$$

Er det nå sikkert at hvis vi setter $f(x) = \frac{1-\cos Tx}{\pi T x^2}$, så er $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx}\,dx$ lik $\varphi(t)$?

Ja, vi kan bruke til Fourier inversjon til å vise at dette gjelder.

Vi vet at $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-itx}\,dt$

Det betyr at
$$2\pi f(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{itx}\,dt$$

Dette betyr at $2\pi f(-x)$ er den Fouriertransformerte til $\varphi(t)$.

Ved Fourier inversjon

$$\varphi(t) = \cancel{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{2\pi} f(-x) e^{-ixt}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-ixt}\,dx \qquad u = -x$$

$$= \int_{\infty}^{-\infty} f(u) e^{iut}(-du)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iut}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixt}\,dx$$