Konvergens i forventning

Sikre betingelser slik $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[\lim_{n\to\infty} X_n]$

Husk: Hvis $X \ge 0$, så $\lim_{N\to\infty} E[X\wedge N] = E[X]$

Monoton konvergens teorem: Anta at $\{X_n\}$ er en voksende følge av positive stokastiske variable. Da er

$$\lim_{k\to\infty} E[X_k] = E[X]$$

der $X = \lim_{k\to\infty} X_k$

Bevis: Siden $E[X_1] \le E[X_2] \le \qquad \le E[X]$,

så finnes $\lim_{k\to\infty} E[X_k]$ (kan være uendelig) og $\lim_{k\to\infty} E[X_k] \le E[X]$

Det holder derfor å vise at $\lim_{k\to\infty} E[X_k] \ge E[X]$ og siden $E[X\wedge N] \uparrow E[X]$, er det nok å vise at $\lim_{k\to\infty} E[X_k] \ge E[X\wedge N]$ for alle N. Men dette vil følge dersom $\lim_{k\to\infty} E[X_k\wedge N] \ge E[X\wedge N]$.

Dette betyr at det er nok å vise at for enhver $\varepsilon > 0$, er

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} E[X_k\wedge N] \ge E[X\wedge N] - \varepsilon .}$$

Fiksér en N og en $\varepsilon > 0$. La $B_{k,\varepsilon} = \{\omega : (X\wedge N)(\omega) - (X_k\wedge N)(\omega) \ge \varepsilon\}$

Siden $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{k,\varepsilon} = \emptyset$ (fordi $X_k\wedge N \to X\wedge N$), så er

$0 = P(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{k,\varepsilon}) = \lim_{k\to\infty} P(B_{k,\varepsilon})$ (ved kontinuitet av mål). Da er

$$E[X\wedge N] - E[X_k\wedge N] = E[(X\wedge N) - (X_k\wedge N)]$$

$$\le N P(B_{k,\varepsilon}) + \varepsilon \to \varepsilon .$$

Det vil si $\lim E[X_k\wedge N] \ge E[X\wedge N] - \varepsilon$,

som var det vi måtte vise.

Korollar: Anta at $\{X_n\}$ er en avtagende følge av positive stokastiske variable og at $E[X_1] < \infty$. Da er

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$$

der $X = \lim_{n\to\infty} X_n$

Bevis: La $Y_n = X_1 - X_n$, da er $\{Y_n\}$ en voksende følge av positive stokastiske variable. Ved MKT, får vi

$$\lim_{n\to\infty} E[Y_n] = E[\lim_{n\to\infty} Y_n] = E[\lim_{n\to\infty}(X_1 - X_n)]$$

$$= E[X_1 - \lim_{n\to\infty} X_n] = E[X_1] - E[\lim_{n\to\infty} X_n]$$

Dessuten $\lim E[Y_n] = \lim_{n\to\infty} E[X_1 - X_n] = \lim_{n\to\infty}(E[X_1] - E[X_n])$

$$= E[X_1] - \lim_{n\to\infty} E[X_n]$$

Altså $E[\cancel{X_1}] - E[\lim X_n] = E[\cancel{X_1}] - \lim E[X_n]$,

så dermed $E[\lim X_n] = \lim E[X_n]$.

<u>Fatous lemma</u>: Anta at $\{X_n\}$ er en følge av positive stokastiske variable. Da

$$E\left[\liminf_{n\to\infty} X_n\right] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n]$$

<u>Bevis</u>: Husk at $\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\inf_{j\geq n} X_j(\omega)}_{Y_n(\omega)}$ ← voksende følge. ($Y_n(\omega) \leq X_n(\omega)$)

Vi har dermed $E\left[\liminf_{n\to\infty} X_n\right] = E\left[\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega)\right]$

$$\overset{MKT}{=} \lim_{n\to\infty} E[Y_n(\omega)] = \liminf_{n\to\infty} E[Y_n] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n]$$

Sett meg ut: 2.40, 2.41, 2.43, 2.50 (2.42)

Oppgave 2.40: $X_n(\omega)$ = antall kast før n-te kron.

$$M_n(\vartheta) = E\left[e^{\vartheta X_n}\right]$$

Sans. fordel på X_1:

Kast	1	2	3		n
sann	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$		$(1-p)^{n-1} p$
$p=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2^3}$		$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\frac{a_0}{1-r}$$

$$M_1(\vartheta) = e^{\vartheta \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} + e^{2\vartheta} \cdot \frac{1}{4} + e^{3\vartheta} \frac{1}{8} + \cdots + e^{\vartheta n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\vartheta} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\vartheta}}{2}\right)^n = \frac{\frac{e^{\vartheta}}{2}}{1 - \frac{e^{\vartheta}}{2}} = \frac{e^{\vartheta}}{2 - e^{\vartheta}}$$

$$E[X_1] = M_1'(0), \quad E[X_1^2] = M_1''(0), \quad Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

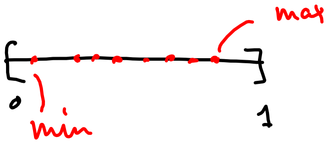
Hva med X_n? $X_n = \underbrace{Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_n}$, der Y_i er antall kast mellom kron nummer $i-1$ og kron nummer i

identisk fordelt (som X_1) og uavhengige.

$$M_n(\vartheta) = E\left[e^{\vartheta X_n}\right] = E\left[e^{\vartheta Y_1 + \vartheta Y_2 + \cdots + \vartheta Y_n}\right] = E\left[e^{\vartheta Y_1} e^{\vartheta Y_2} \cdots e^{\vartheta Y_n}\right]$$

$$= E\left[e^{\vartheta Y_1}\right] E\left[e^{\vartheta Y_2}\right] \cdots E\left[e^{\vartheta Y_n}\right] = E\left[e^{\vartheta X_1}\right]^n = \left(\frac{e^{\vartheta}}{2 - e^{\vartheta}}\right)^n.$$

Oppgave 2.41: Velg n uavhengige punkter i $[0,1]$. Finn fordelingen til max, min og max-min.



Ser på $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Fordeling:

$$F(x) = P[Y \le x] = 1 - P[Y > x] = 1 - P[X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x\}$$

$$= 1 - \underbrace{P[X_1 > x]}_{1-x}\underbrace{P[X_2 > x]}_{1-x} \cdots \underbrace{P[X_n > x]}_{1-x} = 1 - (1-x)^n.$$

Tetthetsfunksjon: $f(x) = F'(x) = -n(1-x)^{n-1}(-1) = n(1-x)^{n-1}$

$$E[Y] = \int_0^1 x\, n(1-x)^{n-1}\, dx$$

Skifter variabel $u = 1-x$, $x = 1-u$, $dx = -du$

$$= n\int_1^0 (1-u)\, u^{n-1} (-du)$$

$$= n\int_0^1 (1-u)\, u^{n-1}\, du = n\int_0^1 [u^{n-1} - u^n]\, du = \frac{1}{n+2}$$

Oppgave 2.43: $A_1, A_2, \dots, A_n$ er uavhengige hendelser, $P(A_i) = p_i$

$N(\omega)$ = antall A_i slik at $\omega \in A_i$.

Finn den genererende funksjon (moment gen.) og regn ut $E[N]$

Regn også ut $E[N]$ på en enklere måte.

Observer at: $N(\omega) = 1_{A_1}(\omega) + 1_{A_2}(\omega) + \dots + 1_{A_n}(\omega)$

$$E[N] = E[1_{A_1}] + E[1_{A_2}] + \dots + E[1_{A_n}] = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

Momentgenererende funksjon: $M(\theta) = E[e^{\theta N}]$

$$= e^0 \cdot P[N=0] + e^{\theta} P[N=1] + \dots + \underbrace{e^{k\theta} P[N=k]} + \dots + e^{n\theta} P[N=n]$$

Hva er sannsynligheten for at ω er med i nøyaktig de k mengdene $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$: $p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k} (1-p_{j_1})(1-p_{j_2}) \cdots (1-p_{j_{n-k}})$

$$e^{k\theta} P[N=k]: \; e^{k\theta} \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k} (1-p_{j_1}) \cdots (1-p_{j_{n-k}})$$

$$= \sum_{i_1 \dots i_k} e^{\theta} p_{i_1} e^{\theta} p_{i_2} \cdots e^{\theta} p_{i_k} (1-p_{j_1}) \cdots (1-p_{j_{n-k}})$$

Dermed

$$M(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1 \dots i_k} e^{\theta} p_{i_1} e^{\theta} p_{i_2} \cdots e^{\theta} p_{i_k} (1-p_{j_1}) \cdots (1-p_{j_{n-k}})$$

$$= (e^{\theta} p_1 + (1-p_1))(e^{\theta} p_2 + (1-p_2)) \cdots (e^{\theta} p_n + (1-p_n))$$

Oppgave 2.50 $X_1, X_2, \ldots$ positive stok.variable med verdier i $\mathbb{N}$, uavhengige og med samme fordeling. Vis

$$E[\min\{X_1,\ldots,X_m\}] = \sum_{n=1}^{\infty} P[X_1 \ge n]^m$$

Ser på fordelingen:

$$P[\min\{X_1,\ldots,X_m\} < n] = 1 - P[\min\{X_1,\ldots,X_m\} \ge n]$$

$$= 1 - P[X_1 \ge n \text{ og } X_2 \ge n \text{ og} \ldots \text{ og } X_m \ge n]$$

$$\overset{\text{uavhengige}}{=} 1 - P[X_1 \ge n]\,P[X_2 \ge n] \cdots P[X_m \ge n]$$

$$\overset{\text{samme fordeling}}{=} 1 - P[X_1 \ge n]^m.$$

Sannsynligheten for likhet:

$$P[\min\{X_1,\ldots,X_m\} = n] = P\{\min\{X_1,\ldots,X_m\} < n+1\} - P\{\min\{X_1,\ldots,X_m\} < n\}$$

$$= \left(1 - P[X_1 \ge n+1]^m\right) - \left(1 - P[X_1 \ge n]^m\right)$$

$$= P[X_1 \ge n]^m - P[X_1 \ge n+1]^m$$

Dermed

$$E[\min\{X_1,\ldots,X_m\}] = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n}_{s_n}\Big(\underbrace{P[X_1 \ge n]^m}_{b_n} - \underbrace{P[X_1 \ge n+1]^m}_{b_{n+1}}\Big)$$

$a_n = 1$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{1}_{a_n} \cdot \underbrace{P[X_1 \ge n]^m}_{b_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P[X_1 \ge n]^m.$$

Abels summasjon

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n (b_n - b_{n+1})$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$