Stokastiske variable

Definisjon: Anta at $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ er et sannsynlighetsrom. En stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ er en funksjon $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slik at

$$\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

Eksempel: Sekvens av myntkast:

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{hvis det første kastet er mynt} \\ 1 & \text{—"— er krone} \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{—"— andre kastet er mynt} \\ 1 & \text{—"— er krone} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\bar{X}(\omega) = \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n}$$

Lemma: Følgende fire utsagn er ekvivalente for en funksjon $X : \Omega \to \mathbb{R}$

(i) $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ for alle $x \in \mathbb{R}$ (m.a.o. X er en stok. var.)

(ii) $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ —"—

(iii) $\{\omega : X(\omega) \geq x\} \in \mathcal{F}$ —"—

(iv) $\{\omega : X(\omega) > x\} \in \mathcal{F}$ —"—

Bevis for (i)$\Leftrightarrow$(ii):

(i)$\Rightarrow$(ii) Anta at (i) gjelder. For å vise (ii) trenger vi at

$$\{\omega : X(\omega) < x\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overbrace{\{\omega : X(\omega) \leq x - \tfrac{1}{n}\}}^{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$$ (tellbar union av mengder i $\mathcal{F}$).

(ii)$\Rightarrow$(i). Anta at (ii) gjelder. For å vise (i) trenger vi at

$$\{\omega : X(\omega) \leq x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overbrace{\{\omega : X(\omega) < x + \tfrac{1}{n}\}}^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$$ (tellbart snitt av mengder i $\mathcal{F}$).

Løsning: Anta $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ er stokastiske variabler, vis at også disse størrelsene er stokastiske variabler:

(i) aX der $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $X + Y$

(iii) XY

(iv) Z der $Z(\omega) = \begin{cases} \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} & \text{der } Y(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{der } Y(\omega) = 0 \end{cases}$

Bevis: (i) Anta $a > 0$:

$$\{\omega : aX(\omega) \leq x\} = \{\omega : X(\omega) \leq \tfrac{x}{a}\} \in \mathcal{F} \quad (\text{siden } X \text{ er stok. var})$$

Anta så $a < 0$:

$$\{\omega : aX(\omega) \leq x\} = \{\omega : X(\omega) \geq \tfrac{x}{a}\} \in \mathcal{F} \quad (\text{ifølge (iii) i lemmaet})$$

(ii) Mengden $\mathbb{Q}$ av rasjonale tall er tellbar. $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots\}$

Observer at hvis $X(\omega) + Y(\omega) < x$, så finnes det et rasjonalt tall q slik at $X(\omega) < q$ og $q + Y(\omega) < x$, dvs $Y(\omega) < x - q$. Dette medfører at

$$\{\omega : X(\omega) + Y(\omega) < x\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{\omega : X(\omega) < q \text{ og } Y(\omega) < x - q\}$$

$$= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big[\underbrace{\underbrace{\{\omega : X(\omega) < q\}}_{\mathcal{F}} \cap \underbrace{\{\omega : Y(\omega) < x - q\}}_{\mathcal{F}}}_{\mathcal{F}} \Big] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big[\overbrace{\{\omega : X(\omega) < q_n\} \cap \{\omega : Y_n < x - q_n\}}^{\mathcal{F}} \Big] \in \mathcal{F}.$$

(iii) Observer først at hvis Z er en stok. variabel, så er Z^2 det også:

$$\{\omega : Z^2 \leq x\} = \{\omega : -\sqrt{x} \leq Z(\omega) \leq \sqrt{x}\} = \left.\begin{array}{l} \overbrace{\{\omega : Z(\omega) \geq -\sqrt{x}\}}^{\in \mathcal{F}} \\ \cap \underbrace{\{\omega : Z(\omega) \leq \sqrt{x}\}}_{\mathcal{F}} \end{array}\right\} \mathcal{F}.$$

Skitten triks: (polarisering)

$$XY = \frac{1}{2}\underbrace{\Big[\underbrace{\overbrace{(\underbrace{X+Y}_{\text{stok v.}})^2}^{\text{stok var}} - \underbrace{X^2}_{\text{stok var}} - \underbrace{Y^2}_{\text{stok var}}}_{\text{stok.}}\Big]}_{\text{stok. variabel.}}$$

(iv) Observer at det er nok å vise at

$$U(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{Y(\omega)} & \text{når } Y(\omega) \neq 0 \\ & \text{ellers} \end{cases}$$

er stok. var., for da vil

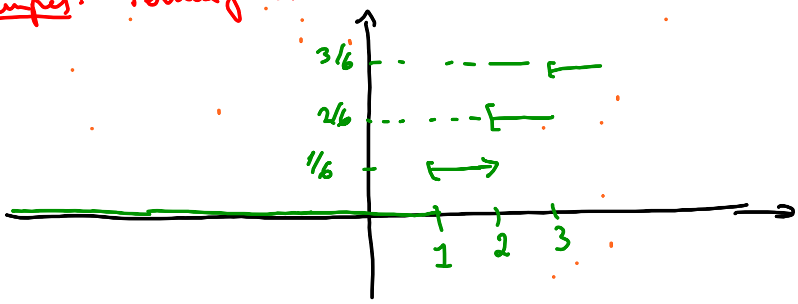
$$Z(\omega) = X(\omega)\, U(\omega) \quad \text{ifølge (iii)}$$

Fordelingsfunksjoner

Definisjon: Anta at X er en stokastisk variabel. Da er fordelingsfunksjonen $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ gitt ved

$$F(x) = P\{\omega : X(\omega) \leq x\} = \text{sannsynligheten for at } X \text{ er mindre } x.$$

Eksempel: Terningkast. $X(\omega)$ antall øyne på terningen.



Oppgaveløsning

Oppgave 1.5: Vis at disse klassene er algebraer, men ikke σ-algebraer.

a) Alle endelige delmengder av $\mathbb{R}$ og deres komplementer.

Algebra:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ siden $\emptyset$ er endelig (null elementer)

(ii) $A \Rightarrow A^c$.

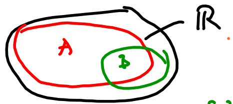
A endelig $\Rightarrow A^c$ endelig komplement

A endelig komplement $\Rightarrow A^c$ endelig.

(iii) $A, B \in \mathcal{A}$, så $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Hvis både A og B er endelige, så er $A \cup B$ endelig.

Hvis minst en av dem har endelig komplement, så har $A \cup B$ også endelig komplement.



Ikke σ-algebra: $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, \dots, A_n = \{n\}, \dots$

$A_n \in \mathcal{A}$ for alle n:

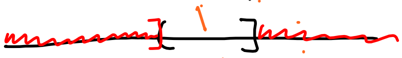
$\bigcup A_n = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N} \notin \mathcal{A}$

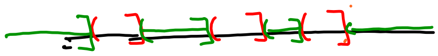
$\mathcal{A}$ er ikke en σ-algebra fordi den ikke er lukket under tellbare unioner.

b) Alle endelig union av intervaller av typen $(a,b], (-\infty, b]$, og (a, ∞)

Hvorfor halvåpne intervaller?

$(a,b]^c = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$





Ikke σ-algebra: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 - \frac{1}{n}] = (0,1)$ ikke lukket under tellbar union

Dvs ikke σ-algebra.

1.6: Anta at $\{A_n\}$ er en følge av tellbare mengder. Da er $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ også tellbar.

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots \}$

$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots \}$

$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \dots \}$

$\vdots$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots \}$ tellbar.

Formelt: $\mathcal{G} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ er tellbar, A^c er tellbart$\}$

σ-algebra:

(i) $\emptyset \in \mathcal{G}$ siden $\emptyset$ er tellbar.

(ii) $A \in \mathcal{G} \Rightarrow A^c \in \mathcal{G}$ følger fra symmetrien i definisjonen.

(iii) Anta $A_n \in \mathcal{G}$ for alle n. To tilfeller:

(i) Minst en A_n har tellbart komplement: $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c \subseteq A_n^c$

(ii) Alle A_n-ene er tellbare. Men da er tellbar. $\Leftarrow$ tellbart

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ også tellbar, så $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$.

1.8 64 terningkast, sannsynligheten for at summen øynene er odde: $1/2$

odde

$\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $1/2$

$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $1/2$

like

1.9: $\Omega = \{KKK, KKM, KMK, KMM, MKK, MKM, MMK, MMM\}$

$P\{ABC\} = \frac{1}{8}$ for enhver rekke ABC av M'er og K'er.

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ = alle delmengder av Ω

$$P(S) = \frac{|S|}{8}.$$

1.16 I, II spiller

A, B, C baller.

ABC, ACB: I vinner $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

BAC, BCA, CAB, CBA: II vinner $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

1.18: $\underbrace{[\quad}_{I_1} x \underbrace{\quad]}_{I_2}$

$1/3$

$2/3$

$P(\text{suksess}) = P([0, 1/3]) + P([2/3, 1])$

$= 1/3 + 1/3 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$