

Kalkulus

Tom Lindstrøm

Kalkulus

4.utgave

Universitetsforlaget

© 4. utgave Universitetsforlaget 2016
3. utgave 2006
2. utgave 1996
1. utgave 1995

ISBN 978-82-15-02710-4

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med rettighetshaverne er enhver eksemplarfremstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Utnyttelse i strid med lov eller avtale kan medføre erstatningsansvar og inndragning og kan straffes med bøter eller fengsel.

Henvendelser om denne utgivelsen kan rettes til:
Universitetsforlaget AS
Postboks 508 Sentrum
0105 Oslo

www.universitetsforlaget.no

Omslag:
Sats: Type-it AS, Trondheim
Trykk og innbinding: 07 Media – 07.no
Boken er satt med:
Papir: 90 g Arctic Matt 1,0

*Til
Nann, Jonas, Pia,
Anders og Kaja*

Forord

Så det er ingen overdrivelse å si at det var Christine A. som endelig satte matematikken inn i sin rette kontekst for Jonas Wergeland, som viste ham forbindelsen mellom matematikken og livet.

— *Jan Kjærstad (1953–),
Forfatteren*

Dette er en innføringsbok i matematikk for universiteter og høyskoler. Den bygger på full fordypning fra videregående skole, altså på de kursene som de siste årene har hatt R1 og R2. Hovedtemaet er differensial- og integralregning i én variabel med anvendelser på differensialligninger og rekker, men boken inneholder også en del temaer som ikke er med i et typisk kalkuluskurs, f.eks. komplekse tall, differensligninger og en del anvendelser i sannsynlighetsteori.

Jeg har forsøkt å skrive en bok som legger omtrent like mye vekt på teori, regneteknikk og anvendelser. Etter min mening er alle disse tre komponentene nødvendige for virkelig å forstå matematikk – teoriforståelse uten regneteknikk har ingen nytteverdi, og anvendelser uten teoriforståelse fører bare til en meningsløs kopiering av formler som man hverken kan begrunne eller tolke. I de senere år har regneteknikk utviklet seg fra kun å gjelde regning med papir og blyant til også å omfatte beregninger med datamaskin og dataprogrammer, og selv om dette ikke skal være en lærebok i numerisk analyse, har jeg prøvd å ta hensyn til denne utviklingen både når det gjelder stoffutvalg og oppgaver.

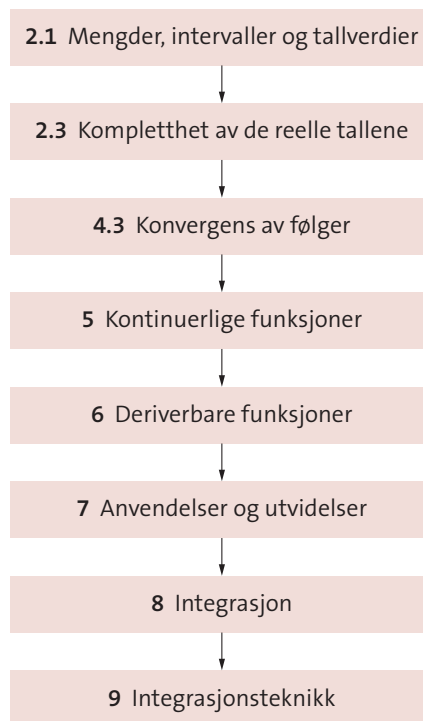
I tillegg til de tre hovedkomponentene teori, regneteknikk og anvendelser har jeg valgt å trekke frem et fjerde aspekt – matematikkens historie og utvikling. Selv om det ikke er så lett å få øye på i matematikkbøker flest, er matematikk faktisk skapt av mennesker, noen ganger i samarbeid, andre ganger i kappestrid. I de historiske epistlene i slutten av hvert kapittel har jeg forsøkt å beskrive både hvordan matematiske teorier vokser frem i vekselvirkning med den generelle historiske utviklingen, og hvordan de er knyttet til sine skapers liv og skjebne.

Selv om boken bygger på matematikken i videregående skole, er det en del overlapp, både fordi jeg (klok av skade) vet at læreplaner kan endre seg raskere enn lærebøker, og fordi man trenger litt overlapp for å sikre en glatt skjøt. Dette forklarer f. eks. hvorfor kapitlet om differensialligninger starter fra bunnen av.

Forskjellige måter å bruke boken på

Da jeg planla boken, var jeg opptatt av å skape en veksling mellom teori, regneteknikk og anvendelser. For mye teori på en gang blir fort tungt for mange studenter, og illustrerende anvendelser hjelper på motivasjonen. Dette er f.eks. en av grunnene til at jeg har plassert seksjonen om differensligninger mellom de mer teoretiske kapitlene om komplekse tall og kontinuerlige funksjoner. Porsjonerer man ut oppgavene med litt omtanke, slipper man på denne måten lange perioder der alle oppgavene har et teoretisk tilsnitt.

Selv om boken er skrevet med en spesiell rytme i tankene, kan den selvfølgelig brukes på annen måte enn å begynne på kapittel 1 og avslutte med kapittel 12. Ønsker man et klassisk kalkuluskurs, er kjernen i boken kapittel 5–9 med de andre kapitlene som mulige anvendelser og utdypninger (jeg vil anslå denne kjernen til 5–6 studiepoeng, så man har god plass til mer stoff i et kurs på 10 studiepoeng). Før man begynner på kapittel 5, bør man imidlertid ta med seg litt om reelle tall og kompletthetsprinsippet fra kapittel 2 samt gjennomgå seksjon 4.3 om konvergens av følger. Et slikt stramt kalkulusopplegg får dermed oppbygningen vist på figuren nedenfor. Vær oppmerksom på at dette opplegget har en svært teoritung start, og at det kan være lurt å supplere med noe enklere stoff fra de første kapitlene.



Med tanke på de ivrigste studentene har jeg skrevet en bok som er teoretisk selvfor-synt. Dersom man godtar det studentene har med seg fra skolematematikken om enkel algebra og elementære funksjoner, gir boken en stringent innføring i teorien for funksjoner av en variabel. Det betyr selvfølgelig ikke at alle studenter skal lese og forstå hvert eneste bevis, og det betyr slett ikke at alle forelesere skal dekke hele teoristoffet

(da vil man raskt oppdage at tiden blir knapp). For mine egne forelesninger har jeg definert en «ryggrad» av teoristoff som jeg alltid dekker, og så supplerer jeg med annet stoff etter tid og omstendigheter. Holder vi oss til kjernestoffet i figuren ovenfor, består denne ryggraden av kompletthetsprinsippet (seksjon 2.3), konvergens av monotone følger (seksjon 4.3), ϵ - δ -bevis (seksjon 5.1), skjæringssetningen (seksjon 5.2), ekstremalverdisetningen (seksjon 5.3), middelverdisetningen (seksjon 6.2), «0/0»-tilfellet av L'Hôpitals regel (seksjon 6.3) og analysens fundamentalteorem (seksjon 8.3 – men her postulerer jeg ofte setning 8.3.1). I tillegg utleder jeg selvfølgelig (men ikke alltid i full detalj) grunnleggende formler for integrasjonsmetoder, omdreiningselementer, løsninger av differens- og differensialligninger osv. Jeg nedprioriterer mer tekniske bevis som grenseverdier av summer, produkter osv. fordi de ofte tar lang tid og bare beviser ting som studentene anser som opplagt uansett. Fordelen med «ryggraden» ovenfor er at den ikke bare består av enkeltbevis, men illustrerer hvordan en matematisk teori bygges opp ved at nye resultater føyes til gamle.

I anvendelsene har mitt hovedmål vært å få studentene til å stille opp stykkene selv. Derfor finnes det bare noen få eksempler der anvendelsene kun fungerer som staffasje rundt et ferdig oppstilt regnestykke – i de fleste tilfellene vil jeg ha med studentene hele veien fra den opprinnelige problemstillingen, via den matematiske formuleringen og den regnetekniske løsningen, frem til drøfting av svaret i den opprinnelige situasjonen. Jeg synes det er bedre med et litt trivielt og dagligdags problem der studentene kan være aktivt med i modelleringen, enn en avansert anvendelse fra vitenskap og teknologi der de bare blir fortalt at en komplisert formel representerer en eller annen viktig sammenheng. Dette betyr nok at denne boken inneholder færre eksempler på «tunge» anvendelser enn mange andre, men samtidig håper jeg at den gir studentene et bedre grunnlag for selv å bruke matematikk som et redskap i andre fag. Det betyr også at anvendelsene i større grad er samlet i noen avsnitt og ikke strødd jevnt utover hele boken – skal man lære å modellere, trenger man å øve seg i situasjoner som ikke skiller seg for mye fra hverandre. Flest anvendelser finner man i kapitlene om differensligninger og differensialligninger og i avsnittene om optimering og koblede hastigheter i begynnelsen av kapittel 7, og personlig føler jeg at noen av disse temaene bør med for å gi et kurs en rimelig balanse mellom teori og praksis.

Historisk sett er kalkulus først og fremst et regneverktøy som ble utviklet av Newton og Leibniz på slutten av sekstenhundretallet, og som viste seg å ha en forbløffende slagkraft sammenlignet med tidligere teknikker. Det er fortsatt nødvendig å beherske dette verktøyet for å lykkes med matematikk og andre realfag, men i våre dager kan de klassiske regneteknikkene kombineres med og suppleres av datamaskinenes regnekraft. Hvordan dette best kan gjøres i undervisningen, er fortsatt et omstridt tema både faglig og didaktisk. Denne boken inneholder en del stoff og oppgaver som egner seg for datamaskiner og avanserte lommeregner, men den legger ikke opp til bruk av en spesiell programpakke eller en spesiell kalkulator. Ved Universitetet i Oslo har vi brukt boken i samspill med alt fra generelle programmeringsspråk (Java og Python) til et spesialisert, symbolbehandlerende matematikkprogram (Maple), men vi har også hatt eksamener uten tillatte hjelpemidler for å kurere ekstreme tilfeller av kalkulatoravhengighet.

Endringer i fjerde utgave

Den synligste endringen i fjerde utgave er at boken har fått ny grafisk utforming. Innholdsmessig er det ingen større strukturelle endringer, men jeg har gått igjennom hele teksten og gjort utallige lokale endringer – forhåpentligvis til det bedre. Jeg har spesielt prøvd å utdype en del forklaringer der jeg synes de tidligere har vært i knappeste laget. Jeg har også lagt til noen nye oppgaver i seksjoner der det var få oppgaver fra før. For ikke å forstyrre nummereringen har jeg plassert disse oppgavene etter de gamle, selv om dette noen ganger bryter litt med den naturlige progresjonen.

«Støtteapparatet» rundt læreboken er blitt forsterket, først og fremst ved at studie-boken kommer i en ny og oppgradert utgave ved Arne Hole. Den nye utgaven ligger tettere opptil læreboken enn før og presenterer en del sentralt lærestoff på en alternativ måte. Den inneholder også en del repetisjonsstoff fra videregående skole for dem som trenger det.

Bokens nettsider

<http://www.universitetsforlaget.no/kalkulus>

inneholder trykkfeillister, oppdateringer og løsningsforslag til oppgaver. I tillegg inneholder de en del stoff som det ikke er blitt plass til i boken, blant annet tre tilleggs-kapitler om henholdsvis vektorregning og parametrisert kurver, flervariabel analyse og enkel lineær algebra samt optimering av funksjoner av flere variable. Dette stoffet er til fri avbenyttelse, og det kan gjøre det enklere for læresteder å bruke boken selv om det er enkelte temaer man savner. Nettsiden lenker også til en serie videoer fra Universitetet i Oslo som dekker sentrale temaer fra boken.

Takk

Det er mange å takke! La meg begynne med en takk til de universitetene og høyskole-
ne som har tillatt meg å benytte deres gamle eksamensoppgaver i denne boken. Disse
oppgavene er merket med forkortelser som burde være lette å forstå; UiB er Universi-
tetet i Bergen, IH er ingeniørhøyskolene osv. Forkortelsen NTNU dekker også oppga-
ver fra de tidligere institusjonene NTH og AVH. Noen steder har det vært nødvendig
å redigere oppgavene litt for å tilpasse dem bokens notasjon og terminologi.

Det var Anne-Berit Tuft i Universitetsforlaget som i sin tid hadde ideen om en
innføringsbok i matematisk analyse for det norske markedet, og uten hennes iver og
entusiasme hadde denne boken aldri blitt til. Etter at Anne-Berit sluttet i forlaget, har
John Homb, Sven Barlinn, Diddi Hernes, Ellen Jakobsen, Geir Tufteland, Erik Juel,
Eli Valheim og Jannicke Bærheim overtatt stafettpinnen. En spesiell takk til Jannicke
som har ansvaret for fjerdeutgaven! En takk også til Dina Haraldsson som transfor-
merte min ubehjelpelige tekstbehandling av førsteutgaven til et profesjonelt råmanus,
og til Torkel Haufmann som gjorde en stor innsats ved å rense manuset for gamle
makroer og klargjøre det for den fjerde utgaven.

På den faglige siden må den største takken gå til Anders Høyér-Berg som leste
utkastet til førsteutgaven med falkeblikk og reddet meg fra utallige pinlige episoder.
Jeg har også satt stor pris på faglige innspill fra blant andre Ebbe Thue Poulsen, Kari
og Per Hag, Bent Birkeland, Halvard Arntzen, Anders Øksendal, Klara Hveberg, Knut
Vedeld, Knut Mørken, Harald Hanche-Olsen og Inger Christin Borge. En stor takk

også til alle dem som har gjort meg oppmerksom på trykkfeil, uklarheter – og det som verre er!

Som tidligere utgaver er også denne tilegnet min familie – Nann, Jonas, Pia, Anders og Kaja. Noen av dem har til og med vært ufornuftige nok til å ta kurs basert på boken!

Blindern, februar 2016

Tom Lindstrøm

Innhold

Forord	7
Forskjellige måter å bruke boken på	8
Endringer i fjerde utgave	10
Takk	10
Innledning: Å studere matematikk	19
Undervisningsformer	19
Matematikkens språk	21
Matematiske resonnementer	22
Hvordan boken er bygd opp	24
Oppgaver til innledningen	25
1 Naturlige tall	27
1.1 Grunnleggende egenskaper	27
Summetegn	28
Oppgaver i seksjon 1.1	32
1.2 Induksjonsbevis	35
Oppgaver i seksjon 1.2	39
1.3 Litt kombinatorikk	41
Sannsynligheter	46
Oppgaver i seksjon 1.3	48
1.4 Pascals trekant og binomialformelen	53
Oppgaver i seksjon 1.4	58
1.5 Polynomer og polynomdivisjon	61
Oppgaver i seksjon 1.5	66
1.6 Historisk epistel: Matematikkens fremvekst og tallteoriens historie	67
Matematikk i oldtiden – de første skriftlige kildene	68
Tallteoriens historie	72
2 Reelle tall	85
2.1 Mengder, intervaller og tallverdier	86
Tallverditegn	88
Oppgaver i seksjon 2.1	90
2.2 Rasjonale og irrasjonale tall	92
Oppgaver i seksjon 2.2	97
2.3 Kompletthet av de reelle tallene	101
Oppgaver i seksjon 2.3	104
2.4 En beskrivelse av de reelle tallene	106

	Oppgaver i seksjon 2.4	109
2.5	Historisk epistel: Fremveksten av de reelle tallene	110
3	Komplekse tall	115
3.1	Regneregler for komplekse tall	117
	Oppgaver i seksjon 3.1	121
3.2	Geometrisk tolkning av komplekse tall	123
	Polarform	124
	Geometrisk tolkning av multiplikasjon	126
	Generelle egenskaper	127
	Oppgaver i seksjon 3.2	130
3.3	Komplekse eksponentialer og de Moivres formel	133
	Oppgaver i seksjon 3.3	137
3.4	Å trekke røtter av komplekse tall	140
	Komplekse annengradsligninger	143
	Oppgaver i seksjon 3.4	146
3.5	Algebraens fundamentalteorem	149
	Reell faktorisering	150
	Oppgaver i seksjon 3.5	153
3.6	Historisk epistel: Komplekse tall og ligningenes historie	156
4	Følger	165
4.1	Homogene differensligninger	166
	Tilfelle 1: To reelle røtter	170
	Tilfelle 2: Én reell rot	173
	Tilfelle 3: To komplekse røtter	174
	Oppsummering	178
	Anvendelser	179
	Oppgaver i seksjon 4.1	182
4.2	Inhomogene differensligninger	185
	$f(n)$ er et polynom	189
	$f(n)$ er på formen $a^n p(n)$	190
	$f(n)$ er på formen $b^n (A \sin(an) + B \cos(an))$	192
	Anvendelser	193
	Oppgaver i seksjon 4.2	197
4.3	Konvergens av følger	205
	Oppgaver i seksjon 4.3	213
*4.4	Kompletthet og konvergens	218
	Oppgaver i seksjon 4.4	223
4.5	Historisk epistel: Fra kaniner til kaos	225
5	Kontinuerlige funksjoner	229
5.1	Kontinuitet	231
	Oppgaver i seksjon 5.1	239
5.2	Skjæringssetningen	243
	Oppgaver i seksjon 5.2	247
5.3	Ekstremalverdisetningen	249
	Oppgaver i seksjon 5.3	253
5.4	Grenseverdier	254

	Oppgaver i seksjon 5.4	263
*5.5	Bevis for algebraens fundamentalteorem	265
5.6	Historisk epistel: Funksjonsbegrepets utvikling	270
6	Deriverbare funksjoner	279
6.1	Derivasjon	279
	Regneregler for deriverte	282
	Logaritmisk derivasjon	287
	Oppgaver i seksjon 6.1	288
6.2	Middelverdisetningen	289
	Oppgaver i seksjon 6.2	294
6.3	L'Hôpitals regel og ubestemte uttrykk	298
	L'Hôpitals regel for «0/0»-uttrykk	298
	L'Hôpitals regel for « ∞/∞ »-uttrykk	301
	Andre ubestemte uttrykk	302
	Utfyllende eksempler	304
	Vekst av potenser, logaritmer og eksponentialfunksjoner	306
	Oppgaver i seksjon 6.3	307
6.4	Kurvedrøfting	310
	Konvekse og konkave funksjoner	313
	Oppgaver i seksjon 6.4	318
6.5	Asymptoter	321
	Vertikale asymptoter	322
	Skråasymptoter	323
	Oppgaver i seksjon 6.5	327
6.6	Historisk epistel: Grenser og infinitesimaler	328
7	Anvendelser og utvidelser	337
7.1	Maksimums- og minimumsproblemer	337
	Oppgaver i seksjon 7.1	343
7.2	Koblede hastigheter	348
	Oppgaver i seksjon 7.2	353
7.3	Newtons metode	356
	*Betingelser for konvergens	359
	Oppgaver i seksjon 7.3	362
7.4	Omvendte funksjoner	365
	Oppgaver i seksjon 7.4	372
7.5	Cotangens	373
	Oppgaver i seksjon 7.5	374
7.6	Arcusfunksjonene	376
	Oppgaver i seksjon 7.6	379
*7.7	Hyperbolske og inverse hyperbolske funksjoner	384
	Inverse hyperbolske funksjoner	386
	Sammenhengen mellom trigonometriske og hyperbolske funksjoner	387
	Oppgaver i seksjon 7.7	388
7.8	Historisk epistel: Naturens språk	389
8	Integrasjon	395
8.1	Geometriske beregninger av areal og volum	396

	Oppgaver i seksjon 8.1	400
8.2	Definisjon av integralet	403
	Oppgaver i seksjon 8.2	409
8.3	Analysens fundamentalteorem	412
	Oppgaver i seksjon 8.3	421
8.4	Det ubestemte integralet	427
	Oppgaver i seksjon 8.4	430
8.5	Riemann-summer	432
	*Ekvivalens av Riemanns og Darboux' definisjoner	435
	Oppgaver i seksjon 8.5	438
8.6	Anvendelser av integralet	439
	Arealberegninger	439
	Omdreiningslegeme om x -aksen	440
	Omdreiningslegeme om y -aksen	443
	Buelengde	447
	Kraft og arbeid	449
	Oppgaver i seksjon 8.6	451
*8.7	Numerisk integrasjon	459
	Trapesmetoden	459
	Simpsons metode	461
	Feilestimer	463
	Oppgaver i seksjon 8.7	465
8.8	Historisk epistel: Fra arealberegning til integrasjon	467
9	Integrasjonsteknikk	477
9.1	Delvis integrasjon	478
	Oppgaver i seksjon 9.1	482
9.2	Substitusjon	485
	Oppgaver i seksjon 9.2	491
9.3	Delbrøkkoppspalting	496
	Oppgaver i seksjon 9.3	506
*9.4	Noen spesielle teknikker	511
	Oppgaver i seksjon 9.4	520
9.5	Uegentlige integraler	523
	Oppgaver i seksjon 9.5	534
9.6	Historisk epistel: Magellanske gjennomfarer	537
10	Differensialligninger	549
10.1	Førsteordens, lineære differensialligninger	550
	Oppgaver i seksjon 10.1	553
10.2	Anvendelser	555
	Oppgaver i seksjon 10.2	561
10.3	Eksistens og entydighet	567
	Oppgaver i seksjon 10.3	571
10.4	Separable differensialligninger	572
	Oppgaver i seksjon 10.4	581
10.5	Annenordens, homogene ligninger med konstante koeffisienter	589
	Tilfelle 1: To reelle røtter	590
	Tilfelle 2: Én reell rot	594

	Tilfelle 3: To komplekse røtter	596
	Oppsummering	599
	Anvendelser	600
	Oppgaver i seksjon 10.5	603
10.6	Annenordens, inhomogene ligninger	606
	Ukjente koeffisienters metode	607
	*Variasjon av parametre	611
	Oppgaver i seksjon 10.6	615
*10.7	Svingninger og resonans	617
	Frie svingninger	617
	Ytre krefter og resonans	620
	Oppgaver i seksjon 10.7	625
*10.8	Numeriske løsninger	626
	Oppgaver i seksjon 10.8	634
10.9	Historisk epistel: Glimt fra differensialligningenes historie	636
11	Funksjonsfølger	645
11.1	Taylor-polynomer	645
	Oppgaver i seksjon 11.1	652
11.2	Taylors formel med restledd	652
	Oppgaver i seksjon 11.2	660
11.3	Punktvis og uniform konvergens	662
	*Dinis teorem	669
	Oppgaver i seksjon 11.3	670
11.4	Integrasjon og derivasjon av funksjonsfølger	672
	*Konsekvenser av Dinis teorem	674
	*Derivasjon under integraltegnet	676
	Oppgaver i seksjon 11.4	679
11.5	Stirlings formel for $n!$	681
	Oppgaver i seksjon 11.5	686
11.6	Historisk epistel: Et teorem med unntagelser	687
12	Rekker	689
12.1	Konvergens av rekker	689
	Oppgaver i seksjon 12.1	695
12.2	Rekker med positive ledd	698
	Integraltesten	699
	Sammenligningstester	702
	Forholdstesten og rottesten	705
	Oppgaver i seksjon 12.2	707
12.3	Alternerende rekker	714
	Oppgaver i seksjon 12.3	715
12.4	Absolutt og betinget konvergens	717
	*Ombytte av ledd	719
	Oppgaver i seksjon 12.4	722
12.5	Rekker av funksjoner	724
	*En kontinuerlig, ingensteds deriverbar funksjon	726
	Oppgaver i seksjon 12.5	730
12.6	Konvergens av potensrekker	732

*Bevis for Abels teorem	738
Oppgaver i seksjon 12.6	740
12.7 Regning med potensrekker	743
Integrasjon og derivasjon	743
Multiplikasjon av rekker	746
Oppgaver i seksjon 12.7	750
12.8 Taylor-rekker	753
Oppgaver i seksjon 12.8	760
12.9 Potensrekker og differensialligninger	766
Oppgaver i seksjon 12.9	768
12.10 Binomiske rekker	771
Oppgaver i seksjon 12.10	775
12.11 Genererende funksjoner	777
Oppgaver i seksjon 12.11	784
*12.12 En virrevandrer vender hjem	787
Virrevandringer i to og tre dimensjoner	794
Oppgaver i seksjon 12.12	795
12.13 Historisk epistel: Fra Madhava til Riemann	797
Fasit	809
Stikkordregister	833

Innledning: Å studere matematikk

... for mathematical proofs, like diamonds, are hard as well as clear, and will be touched by nothing but strict reasoning.

— John Locke (1632–1704), *Second Reply to the Bishop of Worcester*

Det er bare ett menneske som kan lære deg matematikk – og det er du! Andre kan hjelpe deg – de kan undervise deg, løse oppgaver sammen med deg eller skrive bøker du kan lese – men det er bare du som kan omforme det de forteller deg, til et redskap for *din* tanke. For det er det matematikk er; et redskap til å løse problemer og til å forstå verden.

Men matematikk er også noe mer. Det er en flere tusen år gammel tradisjon, en sammenhengende utviklingshistorie som tar opp i seg ideer og oppdagelser fra mange tider og alle verdenshjørner. Det er noe tidløst over matematiske oppdagelser – de over to tusen år gamle bevisene for Pythagoras' læresetning som vi finner i greske, indiske og kinesiske kilder, er like slående i dag som da de ble skrevet ned. Matematikk er et av menneskehetens kollektive mesterverk; en himmelstrebende katedral av tanker og symboler.

Denne boken legger vekt på begge aspektene. Først og fremst tar den sikte på å lære deg teknikker og metoder som du kan bruke til å løse problemer i matematikk og andre fag. Samtidig forsøker den å gi et inntrykk av hvor disse metodene og teknikkene kommer fra, hvordan de har utviklet seg, og hva de brukes til. Uten denne kunnskapen vil faget lett fremstå som en samling av elegante, men ubegripelige knep.

Hva handler så boken om? Tyngdepunktet er integral- og differensialregning, det som på engelsk kalles «calculus», og som vi ikke har hatt noen god betegnelse for. Boken bygger på full fordypning i matematikk fra videregående skole og forutsetter at du kjenner de grunnleggende funksjonene x^a , a^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, og at du kan derivere sammensetninger av disse. Det er også en stor fordel å ha vært borti enkel integrasjon og litt vektorregning i planet. Har du vært lenge borte fra faget, kan det være lurt å repetere litt først, og spesielt lønner det seg å regne en del oppgaver slik at du får formelapparatet inn i fingrene igjen.

Undervisningsformer

Boken kan godt brukes til selvstudium, men de fleste vil få bedre utbytte av den om de følger undervisningen ved et universitet eller en høyskole. Studieopplegget varierer

fra sted til sted, men som regel vil undervisningen være delt i to – *forelesninger* der lærestoffet blir gjennomgått, og *regneøvelser* der oppgavene blir diskutert og løst.

I de senere år er det blitt populært å kritisere forelesninger som undervisningsform, men på sitt beste er de fortsatt en effektiv måte å formidle lærestoffet på. Men du må passe deg litt; du må ikke tro at du forstår stoffet bare fordi du er i stand til å følge med på forelesningene. Det er *oppgavene* som er testen på forståelsen. Får du dem til, kan du være rimelig sikker på at du har forstått stoffet; får du dem *ikke* til, kan du være helt sikker på at du ikke har forstått det. Én opplevelse har alle matematikkstudenter felles; å tro at de har forstått et kapittel, for så å oppdage at de ikke får til en eneste oppgave. Da er det bare en ting å gjøre – lese kapitlet en gang til med større konsentrasjon og et sideblikk til de oppgavene du ikke fikk til.

Forelesningene skal utfylle læreboken. Der boken er detaljrik og utflytende, skal forelesningene trekke opp de store linjene og skille mellom vesentlig og uvesentlig. Der boken er tynn og skissemessig, skal forelesningene utfylle og eksemplifisere. Men forelesningene skal også utfylle boken på en annen måte. Det talte og det skrevne ord har forskjellige kvaliteter; det er ting som det er lett å si og vanskelig å skrive – og omvendt. Muntlig kan man beskrive de store linjene og de grunnleggende ideene uten å fortape seg i ubehagelige detaljer; man kan bruke tonefall og mimikk til å signalisere hva som er vesentlig og hva som er mindre viktig, og man kan vise gjennom eksempler hvordan man selv tenker. Skriftlig kan man være grundigere og mer presis, ta med flere eksempler og knytte forbindelser fremover og bakover i teksten. En bok kan leses flere ganger, en forelesning hører man som regel bare en gang! Selv om mange institusjoner i dag legger ut forelesningsopptak på nettet, er det neppe en god idé å se dem om igjen flere ganger – forelesningene gir deg en innføring; dybdelæring får du gjennom å lese læreboken og gjøre oppgaver.

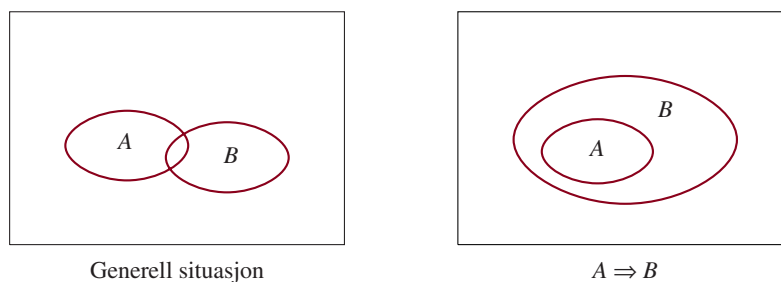
Et godt råd om samspillet mellom lærebok og forelesning: Les igjennom stoffet før du går på forelesning! De færreste av oss makter å holde konsentrasjonen på topp gjennom en hel forelesning, og har du lest lærestoffet på forhånd, vet du hvor vanskelighetene sitter og hvor du må konsentrere deg ekstra. Synes du det er tungt å lese, har mange institusjoner innføringsvideoer du kan se på før du går på forelesning. Rådet om å være forberedt gjelder i enda sterkere grad regneøvelsene; prøv deg alltid på oppgavene på forhånd! Ingen har lært matematikk ved å se på at andre løser oppgaver. Har du prøvd deg på en oppgave, vet du hvor vanskelighetene sitter og kan verdsette løsningen når du ser den – har du *ikke* prøvd deg, blir løsningen bare et regnestykke som alle andre.

Selv om det å lære matematikk til syvende og sist er ditt eget ansvar, kan du få uvurderlig hjelp av andre. Mange liker å lage arbeidsgrupper med 3–4 personer der man diskuterer teorien og løser oppgavene sammen. Bli ikke bekymret om du bruker mye tid på å forklare stoff du allerede har forstått – det er ingen ting som klargjør tankene så godt som å formidle til andre. Ofte vil du nok oppdage at du ikke hadde forstått tingene så godt som du trodde. Argumentet gjelder også den andre veien – føl ikke at du er en klamp om foten selv om de andre bruker mye tid på å forklare ting for deg; de lærer minst like mye av det som du! Men selv om du liker å arbeide i grupper, tror jeg det er lurt at du også arbeider en del alene. Innimellom må stoffet organiseres i hjernen, du må få oversikt over de store linjene og de små detaljene, og du må sette dem sammen til et system som passer for deg. Da trenger du å tenke litt i fred og ro uten at andre hele tiden kommer med innspill, og uten at du må forholde deg til andres måter å tenke på.

Matematikkens språk

Alle fag har sin fagterminologi. Av og til kan det se jålete og unødvendig ut, men i de fleste tilfeller er det påkrevd – vitenskap krever større presisjon og finere distinksjoner enn dagliglivet. Kravet til presisjon er spesielt stort i matematikk på grunn av fagets logiske oppbygning, og i denne boken vil du finne en mengde definisjoner av nye ord og begreper. Av og til vil du nok synes at en definisjon er altfor komplisert, og at det samme kunne vært sagt på en enklere måte. Det kan selvfølgelig tenkes at forfatteren har sovet, men som regel er det en grunn til komplikasjonene; man ønsker å dekke alle muligheter og utelukke enhver feiltolkning. Synes du at en definisjon eller en setning er unødvendig kronglete, er det ikke usannsynlig at den sier noe annet enn det du tror.

I tillegg til nye begreper vil du i en matematikkbok finne logiske uttrykksmåter med et litt annet innhold enn i dagligtalen. Utsagn av typen «Hvis A , så B » er spesielt vanlig i matematikken. Ser du nøyere etter, vil du oppdage at det i dagligtalen finnes ulike slags påstander med denne formen, blant annet hypotetiske utsagn av typen «Hvis jeg var født i steinbukkens tegn, så ville jeg aldri ha strøket i $R2$ ». Det er ikke lett å avgjøre hva denne påstanden egentlig betyr, og slett ikke om den er sann eller gal (hvis den da er noen av delene). De «Hvis A , så B »-utsagnene vi møter i matematikken, er av en annen type – de handler om påstander A og B som kan være sanne eller usanne etter omstendighetene, og de påstår at hver gang A er sann, så vil B også være det. Et eksempel er: «Hvis n er delelig med 14, så er n delelig med 7» – et utsagn som opplagt er sant siden ethvert tall som er delelig med 14 også er delelig med 7. Andre del av figur 1 illustrerer sammenhengen symbolsk – mengden A illustrerer de tilfellene der A er sann, mengden B illustrerer de tilfellene der B er sann, og A er inneholdt i B . Hver gang vi er i en situasjon der A er sann, vil derfor B også være sann. Første del av figuren viser den generelle situasjonen hvor det finnes noen tilfeller der bare A er sann, noen der bare B er sann, noen der begge påstandene er sanne, og noen der ingen av dem er det.



Figur 1

Istedenfor «Hvis A , så B » sier vi også « A medfører B » og « A impliserer B ». Med symboler skriver vi $A \Rightarrow B$, der symbolet \Rightarrow kalles en *implikasjonspil*.

Legg merke til at $A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow A$ betyr to forskjellige ting. Påstanden $A \Rightarrow B$ betyr at hver gang A er sann, så er B det også, mens påstanden $B \Rightarrow A$ betyr at hver gang B er sann, så er A det også. Dette er vanligvis to forskjellige ting: Hvis A er påstanden « n er delelig med 14» og B er påstanden « n er delelig med 7», så er $A \Rightarrow B$ sann, mens $B \Rightarrow A$ er usann (fordi et tall godt kan være delelig med 7 uten å være delelig med 14).

Dersom både $A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow A$ gjelder, er A og B sanne i nøyaktig de samme tilfellene. I så fall sier vi at A og B er *ekvivalente*, og skriver $A \Leftrightarrow B$ (symbolet \Leftrightarrow kalles en *ekvivalenspil*). Vi uttrykker dette også ved å si « A hvis og bare hvis B ». Denne uttrykksmåten er verd å merke seg siden vi skal bruke den mye og den ikke finnes i dagligtalen. Et eksempel er: «En trekant er likebeint hvis og bare hvis to av vinklene er like store».

Det kan være lurt å si noen få ord også om en annen del av matematisk språkbruk. Gjennom hele boken vil du støte på ordene «teorem», «setning», «lemma» og «korollar». Dette er ulike betegnelser på matematiske læresetninger. Logisk sett er det selvfølgelig unødvendig å ha mer enn én betegnelse, men det er valørforskjeller i bruken som ofte kan være til hjelp når du skal orientere deg i teksten. Et *teorem* er et hovedresultat; en sentral læresetning som vil bli brukt om og om igjen. En *setning* er et resultat som godt kan stå på egne bein, men som ikke er så sentral som et teorem. Et *lemma* er en hjelpesetning; et resultat uten egeninteresse, men en nyttig hjelp på veien mot noe større. Et *korollar* er en følgesetning; en umiddelbar konsekvens av et teorem eller en setning vi allerede har bevist. Selvfølgelig er det ikke vanntette skott mellom de forskjellige typene, og det er ofte en smakssak om vi kaller noe et teorem eller en setning. Senere i boken vil du for eksempel støte på skjæringssetningen og middelverdisetningen – to resultater som etter klassifikasjonen ovenfor opplagt burde vært teoremer.

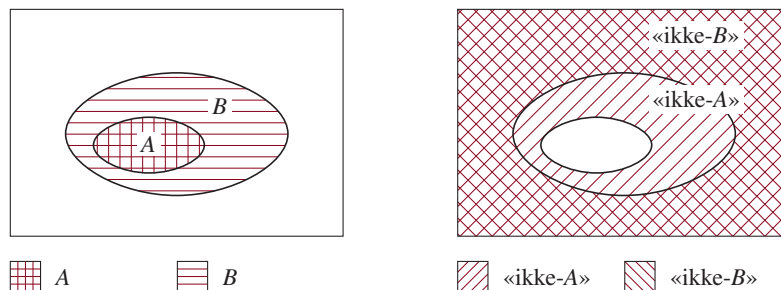
Matematiske resonnerer

Som alle andre fag har matematikk sine egne metoder og teknikker. Ett av særpregene er kravet om fullstendige bevis. En matematisk påstand blir ikke godtatt før den er bevist. Det er ikke nok å argumentere med at ingen har vært i stand til å pønske ut et moteksempel; vi må vise at moteksempler ikke finnes. At matematiske resultater er beviselig sanne, gir faget en enestående stilling som redskapsfag; fysikere, kjemikere, ingeniører og økonomer som bruker matematikk som verktøy, er garantert at redskapen holder mål.

De fleste studenter er villige til å godta at matematiske påstander bør bevises, men de er ikke fullt så villige til å godta at de selv må lese bevisene – de tar da så gjerne foreleserens ord for hva som er sant! Da har de mistet et poeng; matematiske bevis forteller oss ikke bare *at* noe er sant, men også *hvorfor* det er sant. Forstår du ikke hvorfor resultatene er riktige, blir faget et usammenhengende oppsop av løsrevne påstander. Vi er ikke laget for å huske og nyttegjøre oss slike løsrevne fakta; hjernen vår organiserer kunnskapen i meningsbærende strukturer – historier, ideer, resonnerer. Bare en hukommelseskunstner er i stand til å huske alle resultatene i denne boken uten å forstå dem, men setter du deg inn i bevisene, vil du se at det bare er noen få ideer du egentlig behøver å huske; alt det andre kan rekonstrueres fra disse ideene. Selv om du skulle ha greid deg gjennom skolen ved å huske istedenfor å forstå, er tiden nå inne for å legge om arbeidsvanene; på universitetsnivå blir fagstoffet for omfattende og krevende til at du kan stole på hukommelsen alene.

Det får være en trøst at bevis ikke er så mystiske og skremmende som mange tror – i utgangspunktet er det ikke noe annet enn sunn fornuft satt i system. Alt man trenger er en kjede av logiske slutninger fra noe man allerede vet til det man ønsker å vise. Hvert enkelt trinn i kjeden skal være så enkelt at enhver kan overbevise seg om at det er riktig.

Selv om bevis ikke er noe rart og vanskelig, er det to bevisteknikker som kan virke litt forvirrende, og som det er lurt å være klar over på forhånd: kontrapositive bevis og motsigelsesbevis. Anta først at vi skal vise at A medfører B . Da kan vi like godt vise at «ikke- B » medfører «ikke- A ». Dette er lett å forstå hvis du tegner opp A og B i et diagram som i figur 2; at A medfører B , betyr at mengden A ligger inni mengden B , som er det samme som at mengden «ikke- B » ligger inni «ikke- A ». Denne observasjonen er nyttig fordi det av og til er lettere å anta «ikke- B » og vise «ikke- A » enn å gå fra A til B . Bevis av denne typen kalles *kontrapositive bevis*.



Figur 2

La oss se på et eksempel på hvordan denne teknikken brukes i praksis. I kapittel 2 kommer du til å få bruk for denne observasjonen:

Setning: Anta at n er et naturlig tall. Hvis n^2 er et partall, så er n også et partall.

Bevis: Det er ikke så lett å utnytte direkte at n^2 er et partall, så vi ser på det kontrapositive utsagnet isteden. Det sier at hvis n ikke er et partall, så er n^2 ikke et partall – med andre ord at hvis n er et oddetall, så er n^2 et oddetall. Den nye hypotesen er altså at n er et oddetall, og den er det lett å utnytte siden den betyr at $n = 2k + 1$ for et helt tall k . Dermed er

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

som viser at n^2 er et oddetall. Dermed har vi bevist det kontrapositive utsagnet til setningen, og dermed setningen selv. ■

Den andre nyttige bevisteknikken vi skal se litt på, er *bevis ved motsigelse*. Anta at vi ønsker å vise at en påstand A er sann. Vi antar da at A er usann, og viser at dette fører til en umulighet – til en selvmodsigelse. Eneste mulige konklusjon er at A må være sann. Denne teknikken er ofte effektiv fordi den gir oss en ekstra hypotese å arbeide med; i tillegg til det vi vet fra før, får vi også antagelsen om at A er gal.

La oss se på et eksempel på motsigelsesbevis. I kapittel 2 skal vi studere rasjonale og irrasjonale tall. De *rasjonale tallene* er de som kan skrives som en brøk $\frac{a}{b}$ der a og b er hele tall, mens resten kalles *irrasjonale*. Vi skal bruke et motsigelsesbevis til å vise dette resultatet som du kanskje har sett før:

Setning: $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Bevis: For å få frem en motsigelse antar vi at $\sqrt{2}$ er rasjonal. Da kan vi skrive $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ der a og b er naturlige tall, og vi kan anta at brøken $\frac{a}{b}$ er forkortet så mye som mulig slik at a og b ikke har felles faktorer. Kvadrerer vi uttrykket $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, får vi $2 = \frac{a^2}{b^2}$ som kan omformes til $2b^2 = a^2$. Dette viser at a^2 er et partall, og ifølge setningen ovenfor må da a være et partall. Følgelig er $a = 2k$ for et naturlig tall k , og setter vi dette inn i likheten $2b^2 = a^2$, får vi $2b^2 = 4k^2$. Forkorter vi med 2, får vi $b^2 = 2k^2$ som viser at b^2 er et partall, og ifølge setningen ovenfor betyr dette at b er et partall. Men dette er en selvmotsigelse – vi startet med to tall a og b som ikke hadde felles faktorer, og har nå funnet ut at de begge må være delelige med 2. Siden det ikke er noe galt med resten av resonnetet, må denne motsigelsen komme fra antagelsen om at $\sqrt{2}$ er rasjonal, og følgelig er $\sqrt{2}$ irrasjonal. ■

Legg merke til hvordan beviset for den andre setningen bygger på den første. Dette er typisk for matematikk; vi bygger en teori ved å bruke gamle resultater til å bevise nye.

Er du fortsatt usikker på hva et bevis egentlig er, kan du lære det ved å studere bevisene i boken nøye. Et knep som fungerer for noen, er først å lese bevisene grundig, og så legge et papirark over for å se om du kan gjennomføre dem på egen hånd ved neste gangs gjennomlesning. Du oppdager fort at det ikke lønner seg å pugge detaljene utenat; du må gripe fatt i en idé og bruke den til å rekonstruere resten av beviset.

Matematisk teori er ikke teori for teoriens egen skyld. Hensikten er å utvikle metoder og innsikt som kan brukes til å løse problemer. Problemløsning er matematikkens kjerne, og det er de uløste problemene som driver faget videre, både de problemene som oppstår i matematikken selv, og de som kommer fra det praktiske liv og andre fag. Skal du ha nytte av din matematikkutdanning, må du lære deg å løse problemer. Først og fremst gjør du dette ved å løse oppgaver – ved å starte med de enkleste og langsomt gå over til de vanskeligere. Det finnes også bøker som kan hjelpe deg til å utvikle problemløsningsstrategier. Klassikeren på dette området er George Polyas bok *How to Solve It* som anbefales på det varmeste (det er lett å få tak i en billig pocketutgave). Dersom du har lyst til å prøve deg som problemløser på egen hånd, kan du se på oppgavene til slutt i denne innledningen. De kan løses uten avansert matematikk, men de krever en idé (ikke bli deprimert om du ikke får til alle, noen av dem er ganske vanskelige!)

Hvordan boken er bygd opp

Boken består av tolv kapitler som igjen er delt inn i seksjoner. Seksjon 3.2 er således den andre seksjonen i kapittel 3. Der det er naturlig, er seksjonene delt opp i unummererte underavsnitt med egne overskrifter.

Bokens form er litt forskjellig fra det du er vant til – den ligner med hensikt på de matematikkbøkene du finner i mer avanserte kurs. Definisjoner, eksempler, teoremer og andre resultater er nummerert slik at det skal være lett å finne frem til dem. I seksjon 4.1 finner du for eksempel setning 4.1.1, eksempel 4.1.2, lemma 4.1.3, lemma 4.1.4, og så videre. Det kan virke ulogisk å bruke samme nummerering på eksempler, lemmaer og setninger, men erfaringen viser at det blir lettest å finne frem på denne måten. Definisjoner og resultater er rammet inn så de skal være lette å se, men eksemplene er ofte så lange at en ramme bare ville virke forstyrrende. Symbolene ■ og ■ markerer slutten på henholdsvis et bevis og et eksempel.

Noen seksjoner og avsnitt (og noen få bevis) er merket med *. Det betyr at du godt kan hoppe over dem uten å få problemer senere. Mange av de *-merkede avsnittene er vanskelige og ment for de spesielt nysgjerrige og interesserte (for eksempel *4.4, *5.5, 11.5 og *12.12), mens andre (slik som *8.7, *10.8 og 12.11) ligger litt i utkanten av pensum når det gjelder metoder og teknikker. Stort sett dukker ikke stoff fra de *-merkede delene opp andre steder, men seksjon *7.7 er et unntak. De funksjonene som innføres i dette avsnittet (sinh, cosh, tanh, coth og deres inverser), opptrer i en del oppgaver gjennom hele resten av boken, men det er alltid lett å se hvilke oppgaver dette er.

Til slutt i seksjonene finner du oppgavene. Stort sett er de ordnet etter stigende vanskelighetsgrad, men av og til har det vært mer naturlig å samle dem etter tema. Bakerst i boken er det en fasit med svar på oppgaver med oddetallsnummer (pluss noen få til). Det er altså ikke fasit til alle oppgavene, og det skyldes ikke bare at forfatteren er doven. Til eksamen og i arbeidslivet finnes det ingen fasit, og for din egen skyld bør du lære å kontrollere deg selv allerede nå! For det går faktisk an å kontrollere svaret selv om du ikke har fasit. Er oppgaven en ligning, kan du sette prøve; er oppgaven et ubestemt integral, kan du derivere svaret; er oppgaven et bestemt integral, kan du bruke et dataprogram eller en lommeregner til å regne ut en tilnærmet verdi osv. Det finnes også nettsider du kan bruke for å få eksakte svar, f.eks. Wolfram Alpha.

Det er også viktig å bruke fasiten riktig. Mange regner oppgavene tre eller fire ganger inntil de får riktig svar, og raser så lykkelige videre til neste oppgave. Ta deg tid til å stoppe opp og tenke over hvorfor svaret ble riktig den siste gangen, men ikke de første. Noen ganger skyldes det selvfølgelig at du har slurvet, men andre ganger har du skiftet metode for å få riktig svar. Overbevis deg om at du skjønner hvorfor den siste metoden er riktig og den første gal, før du går videre. Du lærer atskillig mer av dette enn av å rase tanketomt gjennom to oppgaver til.

I slutten av hvert kapittel kommer en seksjon som skiller seg fra de andre, en «historisk epistel» som forsøker å sette fagstoffet inn i en videre ramme. Forhåpentligvis vil disse seksjonene hjelpe deg til å få et mer fullstendig bilde av matematikk som fag; både av den lange utviklingsprosessen, den faglige entusiasmen og de mangfoldige anvendelsene. I slutten av hvert kapittel finner du også en liste med litteraturhenvisninger. Det er mye spennende å lese om matematikk som ikke står i pensumbøkene! Husk at akademiske institusjoner har gode biblioteker, og at det kan være mye fint å finne i hyllene på ditt lærested.

Som allerede nevnt avslutter vi denne innledningen med noen problemløsning-soppgaver. Selv om de ikke krever avansert matematikk, er noen av dem ganske vanskelige.

Oppgaver til innledningen

1. Du har to kopper, en med kaffe og en med te. Først tar du en full teskje fra kaffekoppen over i tekoppen og rører godt rundt. Så tar du en full teskje av blandingen tilbake i kaffekoppen. Er det nå mest kaffe i tekoppen eller mest te i kaffekoppen?
2. En trollmann har tre lærlinger. En dag kommer han inn i klasserommet med fem hatter, to svarte og tre hvite. Han ber lærlingene lukke øynene, plasserer én hatt på hvert hode, og skjuler de to siste. Lærlingene sitter på én rekke, og når de åpner øynene, kan de se hattene til dem som sitter foran, men de kan ikke se sin egen hatt eller hattene til dem som sitter bak. Trollmannen spør den bakerste lærlingen: «Vet du far-

gen på hatten din?» Lærlingen svarer nei. Så spør trollmannen den midterste lærlingen og får samme svar. Da smiler den fremste lærlingen og sier. «Men jeg vet fargen på min hatt!» Hvilken farge hadde hatten hennes?

3. Du har et sjakkbrett (8 ganger 8 ruter) og et sett med dominobrikker som er dobbelt så lange som de er brede. Hver dominobrikke dekker nøyaktig to av rutene på sjakkbrettet. Det er lett å se at vi kan dekke sjakkbrettet med 32 dominobrikker. Vi klipper nå bort ruten nederst til venstre og ruten øverst til høyre på sjakkbrettet. Kan vi dekke det nye brettet ved hjelp av 31 dominobrikker?

4. Til en stor internettturnering i sjakk har det meldt seg 42 135 deltagere. Turneringen spilles etter utslagsmetoden. I første runde spilles det 21 067 matcher der vinneren i hver match går videre til neste runde sammen med den deltageren som ikke har fått noen motstander (walk over). I neste runde avvikles det 10 534 matcher der vinnerne går videre til 3. runde osv. Turneringen fortsetter på samme måte (sett opp så mange matcher som mulig og la eventuelt sistemann få walk over) til vinneren er kåret. Hvor mange matcher blir spilt? (Du kan selvfølgelig løse denne oppgaven ved opptellingen, men finnes det en raskere metode som også vil gi deg svaret dersom antall deltagere er et generelt tall N ?)

5. Tre ektepar er på tur. De kommer til en elv som de bare kan krysse ved å bruke en liten båt som ikke tar mer enn to personer. Problemet er at alle ektemennene er så sjalu at de ikke vil la sin kone være i selskap med andre menn uten at de selv er til stede. Er det likevel mulig for alle å krysse elven?

6. Et selskap består av 5 ektepar. Noen av gjestene håndhilser på hverandre, andre gjør det ikke. En av gjestene blir nysgjerrig og spør alle de andre deltagerne hvor mange de har håndhilst på. Han får bare forskjellige svar. Hva svarte hans kone? (Du kan anta at alle oppgir riktig antall, og at ingen har håndhilst på sin egen ektefelle).

7. Et selskap består av 6 gjester. Vis at uansett hvordan selskapet er satt sammen, kan vi alltid finne en gruppe av tre gjester der enten alle kjenner hverandre eller ingen kjenner hverandre.

1 Naturlige tall

De naturlige tallene har Vårherre skapt, alt annet er menneskeverk.
— Leopold Kronecker (1823–91)

I dette og de to neste kapitlene skal vi se litt på ulike tallsystemer – først naturlige tall, så reelle tall og til slutt komplekse tall. Mye av dette stoffet vil være nytt for de fleste, men noe kan nok være kjent fra før. Det kan være lurt å lese grundig igjennom de kjente delene også, slik at vi kan bli enige om en felles språkbruk og notasjon. Har du ikke gjort det allerede, er det også en god idé å lese gjennom innledningen om hvordan man studerer matematikk før du fortsetter. I tillegg til nyttige tips studietips gir den viktig informasjon om hvordan boken er bygd opp og hvordan stoffet presenteres.

1.1 Grunnleggende egenskaper

De tallene vi bruker når vi teller

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

kalles de *naturlige tallene*. Mengden av alle naturlige tall betegner vi med \mathbb{N} ; altså

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

Tar vi også med 0 og negative tall, får vi mengden \mathbb{Z} av *hele tall*:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

De naturlige tallene har vært kjent i alle større kulturer i tusenvis av år, og de er en av grunnsteinene som all matematikk er bygd på. Vi skal ofte bruke notasjon av typen $n \in \mathbb{N}$ og $n \in \mathbb{Z}$ for å uttrykke at n er henholdsvis et naturlig og et helt tall.

En av de viktigste egenskapene ved naturlige tall er delelighet. Forsøker vi å dele ett naturlig tall a med et annet b , så vil i noen tilfeller divisjonen «gå opp», og vi får et helt tall q til svar. I andre tilfeller går divisjonen ikke opp, og vi må nøye oss med et svar som er en brøk eller et desimaltall. Når divisjonen «går opp», sier vi at a er delelig med b . Uttrykt på en annen måte; a er *delelig* med b dersom det finnes et helt tall q slik at $a = qb$. For eksempel er 12 delelig med 3 siden $12 = 4 \cdot 3$, men 13 er ikke delelig med 3 siden det ikke finnes noe helt tall q slik at $13 = q \cdot 3$. Dersom a er delelig med b , sier vi også at b *deler* a .

De tallene som ikke er delelige med noe annet tall, kalles primtall. Mer presist sier vi at et naturlig tall p er et *primtall* dersom $p \geq 2$ og de eneste naturlige tallene som deler p , er 1 og p selv. (Legg merke til at vi ikke regner 1 som primtall.) De minste primtallene er

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$$

På skolen har vi lært å faktorisere naturlige tall som produkter av primtall – for eksempel finner vi lett ut at

$$882 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7.$$

Slike faktoriseringer er nyttige i praktisk regning når vi skal finne fellesnevner til store brøkuttrykk, men de er enda viktigere i teoretiske betraktninger om de hele talls natur. Vi skal ikke komme så mye inn på dette temaet i boken, men det vil likevel være nyttig for oss å ha det grunnleggende faktoreringsresultatet skrevet opp helt presist.

1.1.1 Aritmetikkens fundamentalteorem

Et hvilket som helst naturlig tall $a > 1$ kan skrives som et produkt av primtall:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

Denne faktoriseringen er entydig i den forstand at dersom

$$a = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$$

er en annen fremstilling av a som et produkt av primtall, så er $n = m$, og faktorene q_1, q_2, \dots, q_m er de samme som p_1, p_2, \dots, p_n , bortsett fra at rekkefølgen kan være en annen.

Legg merke til at dersom a er et primtall, så vil det bare være ett tall i produktet på høyresiden ovenfor, nemlig a selv. Vi godtar altså produkter med bare én faktor.

Siden aritmetikkens fundamentalteorem ikke vil spille noen sentral rolle i vår teori, skal vi ikke bevise det her, men regne den praktiske bruken som kjent fra skolematematikken. (Du kan selv bevise det ved å gjøre oppgave 14 og 15 til slutt i seksjonen, men spesielt oppgave 15 er ganske vanskelig.)

To viktige klasser av naturlige tall er partallene og oddetallene. *Partallene* er rett og slett de tallene som er delelige med 2, det vil si

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

mens *oddetallene* er de som ikke er delelige med 2,

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

Partallene kalles også *like* tall og oddetallene *ulike* tall. Legg merke til at ethvert partall kan skrives på formen $2n$ der $n \in \mathbb{N}$, mens ethvert oddetall kan skrives som $2n - 1$ for et naturlig tall n .

Summetegn

Vi skal avslutte denne seksjonen med en kort omtale av summetegnet. Dette er et redskap som ikke har mye med naturlige tall å gjøre, men som vil være så sentralt og nyttig i alle deler av boken, at det kan være greit å få det innført med en gang.

Vi får ofte bruk for å summere lange uttrykk der alle leddene har samme form, f. eks.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + 10^2,$$

der alle leddene er på formen n^2 for et eller annet naturlig tall n , eller

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 43,$$

der hvert ledd er et oddetall, og derfor på formen $2n - 1$. Det blir fort tungvint og uoversiktlig å dra rundt på slike lange remser i beregningene våre, og vi trenger derfor en kortere og mer oversiktlig notasjon. Til dette bruker vi *summetegnet* \sum (egentlig er \sum den greske bokstaven sigma).

La oss først se hvordan vi ville bruke summetegnet i det første eksemplet ovenfor. Det vi ønsker å summere er alle tall på formen n^2 , der n går fra 1 til 10. Ved hjelp av summetegnet skriver vi dette som

$$\sum_{n=1}^{10} n^2$$

og leser det som «summen av n^2 når n går fra 1 til 10». Vi har altså

$$\sum_{n=1}^{10} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2.$$

Tilsvarende kan vi gå fram i det andre eksemplet vårt. I summen $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 43$ inngår alle oddetallene $2n - 1$ fra $n = 1$ til $n = 22$. Vi skriver derfor

$$\sum_{n=1}^{22} (2n - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 43.$$

Det skulle nå være klart hva det generelle mønsteret er; dersom vi for hvert helt tall n har et uttrykk a_n , så betyr rett og slett

$$\sum_{n=k}^m a_n$$

(der $k \leq m$) summen av alle disse uttrykkene fra og med a_k og til og med a_m – det vil si

$$\sum_{n=k}^m a_n = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{m-1} + a_m.$$

I dette uttrykket kaller vi n for *summasjonsindeksen* og k og m for *nedre* og *øvre summasjonsgrense*. Vi kan naturligvis godt bruke en annen bokstav som summasjonsindeks uten å forandre verdien på uttrykket, for eksempel kan vi skrive

$$\sum_{i=k}^m a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{m-1} + a_m.$$

La oss se på noen eksempler.

1.1.2 Eksempel

Skriv summen $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{17}$ ved hjelp av summetegnet.

Siden leddene er på formen x^n , der n løper fra $n = 0$ (husk at $x^0 = 1$) til $n = 17$, får vi

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{17} = \sum_{n=0}^{17} x^n.$$

(Noen vil kanskje innvende at vi jukset litt da vi skrev x^0 istedenfor 1. Riktignok er $x^0 = 1$ når $x \neq 0$, men 0^0 er ikke definert. Når vi arbeider med summetegn, er det imidlertid vanlig å overse denne lille nyansen og alltid tolke 0^0 som 1.) ■

1.1.3 Eksempel

Skriv summen $1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{17}$ ved hjelp av summetegnet.

Dette er akkurat det samme eksemplet som ovenfor, bortsett fra at fortegnet til leddene nå skifter mellom pluss og minus. Et nyttig triks i slike tilfeller er å utnytte at uttrykket $(-1)^n$ skifter mellom $+1$ og -1 etter som n er like eller odde. Bruker vi dette, ser vi at

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{17} = \sum_{n=0}^{17} (-1)^n x^n.$$

(Skriv ut noen ledd av summen til høyre og overbevis deg om at dette virkelig stemmer.) ■

1.1.4 Eksempel

Skriv summen

$$\sum_{n=2}^5 \ln(2n + 1)$$

uten å bruke summetegn.

Alt vi behøver å gjøre, er å sette $n = 2, 3, 4, 5$ inn i uttrykket $\ln(2n + 1)$ og så summere resultatene. Vi får

$$\sum_{n=2}^5 \ln(2n + 1) = \ln 5 + \ln 7 + \ln 9 + \ln 11.$$

Det er tre regneregler for summetegn som det kan være nyttig å kjenne til. Den første sier at vi kan slå sammen to summer som har de samme summasjonsgrensene:

$$\sum_{n=k}^m a_n + \sum_{n=k}^m b_n = \sum_{n=k}^m (a_n + b_n). \quad (1)$$

Den andre sier at vi kan sette en felles faktor utenfor summetegnet:

$$\sum_{n=k}^m c a_n = c \sum_{n=k}^m a_n. \quad (2)$$

Den tredje forteller oss hvordan vi kan slå sammen to deler av den samme summen:

$$\sum_{n=k}^m a_n + \sum_{n=m+1}^l a_n = \sum_{n=k}^l a_n. \quad (3)$$

Det er lett å sjekke at disse reglene holder ved rett og slett å skrive ut hva de betyr. La oss ta den første som et eksempel: Venstresiden av uttrykket er

$$\sum_{n=k}^m a_n + \sum_{n=k}^m b_n = (a_k + a_{k+1} + \dots + a_m) + (b_k + b_{k+1} + \dots + b_m)$$

og høyresiden er

$$\sum_{n=k}^m (a_n + b_n) = (a_k + b_k) + (a_{k+1} + b_{k+1}) + \dots + (a_m + b_m).$$

Det er klart at disse to uttrykkene må være like siden de inneholder nøyaktig de samme leddene. De to andre formlene kan sjekkes på tilsvarende måte.

Det er også viktig å være klar over at to summer som ser forskjellige ut, kan være like. For eksempel er uttrykkene

$$\sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3} \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{14} (-1)^{k+1} x^k \quad (4)$$

like siden de begge beskriver summen

$$-1 + x - x^2 + x^3 + \dots - x^{14}.$$

For å oppdage slike likheter uten å skrive ut summene, er det ofte nyttig å «bytte summasjonsindeks». I (4) kan vi tenke oss at vi starter med summen

$$\sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3}.$$

Vi erstatter så summasjonsindeksen k i dette uttrykket med den nye summasjonsindeksen $i = k + 3$. Siden k løper fra -3 til 11 , må i løpe fra 0 (som tilsvarer $k = -3$) til 14 (som tilsvarer $k = 11$). Erstatter vi k med $i - 3$ i formelen ovenfor, får vi dermed

$$\sum_{i=0}^{14} (-1)^{i-3} x^i.$$

Bruker vi så at $(-1)^{i+1} = (-1)^4 (-1)^{i-3} = (-1)^{i-3}$, blir dette uttrykket til

$$\sum_{i=0}^{14} (-1)^{i+1} x^i.$$

Om vi ønsker, kan vi til slutt bytte navn på summasjonsindeksen og kalle den k istedenfor i , slik at vi får

$$\sum_{k=0}^{14} (-1)^{k+1} x^k.$$

Dermed har vi vist at den høyre og den venstre siden i (4) er like.

Slike regninger ser kanskje litt kompliserte ut til å begynne med fordi det er mange ting å passe på underveis, men med litt trening går de greit. Det er lurt å skaffe seg denne treningen allerede nå ved å regne gjennom oppgavene nedenfor – manipulasjoner med summetegn vil nemlig dukke opp i mange viktige sammenhenger senere i denne boken.

Oppgaver i seksjon 1.1

1. Skriv tallene som produkter av primtall:

- a) 2442
- b) 3600
- c) 17 017
- d) 513
- e) 773

2. Forklar hvordan du kan bruke aritmetikkens fundamentalteorem til å vise at $11 \cdot 17 \cdot 19 \neq 81 \cdot 43$ uten å regne ut.

3. Skriv summene uten summetegn og regn ut verdiene

a) $\sum_{n=1}^6 2^n$

b) $\sum_{k=1}^5 (3k - 2)$

c) $\sum_{n=0}^5 \frac{2}{n+1}$

d) $\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 2^{i+j} \right)$

4. Er disse likhetene riktige?

a) $\sum_{i=0}^3 2^i = 15$

b) $\sum_{i=2}^7 (2i - 1) = \sum_{i=1}^6 (2i + 1)$

c) $\sum_{n=0}^4 a^n b^{3-n} = \sum_{m=-1}^3 a^{3-m} b^m$

5. Skriv summene ved hjelp av summetegn

- a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5$
b) $5 + 7 + 9 + 11 + 13$
c) $4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 64$
d) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 128$
e) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243}$

6. Fyll inn boksene:

a) $\sum_{k=0}^8 (2k + 3) = \sum_{n=1}^9$

b) $\sum_{n=-2}^4 (n + 2)3^n = \sum_{k=0}^6$

c) $\sum_{n=0}^{10} x^n y^{1-n} = \sum_{n=1}^{11}$

7. Sett på summasjonsgrenser:

a) $\sum_{n=1}^6 (n - 1)a^n = \sum ma^{m+1}$

b) $\sum_{n=0}^3 x^{3-n} = \sum x^m$

c) $\sum_{k=19}^{24} a^k = \sum a^{k-1}$

d) $\sum_{n=0}^{20} 3^{n+4} = \sum 81 \cdot 3^n$

8. Gjør uttrykkene enklere ved å bytte summasjonsgrenser:

a) $\sum_{n=-3}^7 (n + 3)a^{n+3}$

b) $\sum_{n=0}^{18} 9 \cdot 3^n$

c) $\sum_{n=1}^{11} \frac{1}{2n + 2}$

9. Vis at formlene (2) og (3) i teksten er sanne.

10. I denne oppgaven er n et fast, naturlig tall. Dersom $a, b \in \mathbb{Z}$ skriver vi $a \equiv b$ hvis $a - b$ er delelig med n .

- a) Vis at hvis $a \equiv b$ og $b \equiv c$, så er $a \equiv c$.
- b) Vis at hvis $a \equiv b$ og $c \equiv d$, så er $a + c \equiv b + d$ og $ac \equiv bd$.
- c) Vis at $a \equiv b$ hvis og bare hvis a og b gir samme rest når de deles med n .

11. Anta at p er et primtall og at $a, b \in \mathbb{N}$. Vis at dersom p går opp i produktet ab , så går p opp i minst ett av tallene a og b . (*Hint:* Bruk aritmetikkens fundamentalteorem.)

12. Vis at det finnes uendelig mange primtall. (*Hint:* Anta at det bare finnes endelig mange primtall $2, 3, 5, \dots, P$, og betrakt tallet $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot P + 1$.)

13. Marit sier til sin nye venninne: «Jeg har tre barn, og hvis du ganger sammen aldrene deres får du 36.» «Og hvis jeg legger sammen aldrene deres, hva får jeg da?» spør venninnen. «Da får du husnummeret vårt», svarer Marit. Venninnen ser på husnummeret, og tenker litt: «Jeg vet fortsatt ikke hvor gamle de er.» «Det gjør ikke noe», sier Marit, «for det er bare den eldste som ikke har lagt seg ennå.» «Men da vet jeg hvor gamle de er», sier Marits venninne og smiler. Hvor gamle er barna, og hvilket husnummer har Marit?

14. I denne og den neste oppgaven skal vi bevise aritmetikkens fundamentalteorem. Vi begynner med den letteste delen: Vis at ethvert naturlig tall større enn 1 kan skrives som et produkt av primtall. (*Hint:* Anta at påstanden ikke er sann, og la N være det minste tallet som ikke kan skrives som et slikt produkt. Utled en selvmotsigelse.)

15. Dette er en fortsettelse av oppgave 14. Vi skal vise at ethvert naturlig tall større enn 1 kan skrives som et produkt av primtall på bare én måte. Anta for motsigelse at dette ikke er riktig, og la N være det minste tallet som kan skrives som et slikt produkt på mer enn en måte.

- a) Vis at N ikke er et primtall.

I resten av denne oppgaven lar vi $N = p_1 p_2 \dots p_m$ og $N = q_1 q_2 \dots q_n$ være to forskjellige primtallsfaktoriseringer av N , og antar at faktorene er ordnet slik at $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_m$ og $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$.

- b) Vis at alle p -ene er forskjellig fra alle q -ene.
- c) Vis at q_1 ikke deler $p_2 p_3 \dots p_m$. (*Hint:* I så fall ville $p_2 p_3 \dots p_m$ ha to forskjellige primtallsfaktoriseringer.)
- d) Vis at $N - p_1 q_1 > 1$.
- e) Vis at $N - p_1 q_1$ har to forskjellige primtallsfaktoriseringer. Forklar hvorfor dette beviser påstanden.

1.2 Induksjonsbevis

Dersom vi begynner å telle fra 1:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

vil vi før eller senere komme frem til et hvilket som helst naturlig tall. Denne enkle egenskapen ved de naturlige tallene ligger bak en viktig bevisteknikk som kalles *induksjonsbevis*. La oss først se på et eksempel.

1.2.1 Eksempel

La oss late som vi nettopp har lært å derivere, og at vi har funnet ut at

$$x' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (x^4)' = 4x^3.$$

Er vi litt smarte, ser vi et klart mønster i disse resultatene, og vi begynner kanskje å lure på om

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

for alle naturlige tall n . Første trinn i å teste denne hypotesen er å undersøke om den holder for $n = 5$. Vi deriverer altså x^5 , og siden vi vet hva den deriverte til x^4 er, så er det naturlig å gjøre dette ved hjelp av produktregelen:

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4,$$

som er akkurat det vi håpet å få. La oss forsøke å gjenta suksessen med x^6 :

$$(x^6)' = (x^5 \cdot x)' = 5x^4 \cdot x + x^5 \cdot 1 = 6x^5,$$

som igjen er akkurat det vi burde få.

Dette ser unektelig ganske lovende ut, men vi kan jo ikke fortsette på denne måten; det er ingen som orker å derivere x^{11237} ved å gjenta denne prosedyren 11231 ganger til! Det vi trenger, er et argument som tar hånd om alle disse regningene en gang for alle.

Vi starter med å legge merke til at de to regningene som ga oss de deriverte til x^5 og x^6 , i prinsippet er helt like. I begge tilfeller startet vi med å vite at $(x^k)' = kx^{k-1}$ (for k lik henholdsvis 4 og 5), og utledet derfra at $(x^{k+1})' = (k+1)x^k$. Denne regningen kan vi like godt gjennomføre med bokstavuttrykk; dersom vi vet at $(x^k)' = kx^{k-1}$ for et eller annet naturlig tall k , så er

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k. \quad (1)$$

Hva betyr dette? Jo, la oss si at for hvert naturlig tall n , så er P_n den påstanden vi forsøker å bevise, altså:

$$P_n: (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Vi har da sjekket at P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 og P_6 er sanne. Dessuten viser (1) at

$$\text{dersom } P_k \text{ er sann for et naturlig tall } k, \text{ så er } P_{k+1} \text{ også sann.} \quad (2)$$

Men nå er det lett å innse at P_n må være sann for alle n . Hvis vi nemlig velger $k = 6$, så vet vi at P_6 er sann, og dermed er P_7 sann ifølge (2). Men da kan vi velge $k = 7$,

og slutte at siden P_7 er sann, så må P_8 også være det. Deretter velger vi $k = 8$, og ser at siden P_8 er sann, så må P_9 være sann osv. Fortsetter vi på denne måten, kommer vi før eller senere frem til et hvilket som helst naturlig tall, og følgelig er P_n sann for alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Bak dette eksemplet ligger det et generelt prinsipp:

1.2.2 Induksjonsprinsippet

Anta at for hver $n \in \mathbb{N}$ har vi gitt et utsagn P_n . Anta videre at vi vet at følgende to krav er oppfylt:

- (i) P_1 er sann.
- (ii) Dersom P_k er sann for en $k \in \mathbb{N}$, så er P_{k+1} også alltid sann.

Da er P_n sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

For å grunnngi dette prinsippet argumenterer vi på samme måte som i eksemplet ovenfor.

Vi tar for oss et annet eksempel på hvordan prinsippet kan anvendes.

1.2.3 Eksempel

Vi vet at summen til en endelig geometrisk rekke er

$$\sum_{i=0}^n x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{for } x \neq 1.$$

La oss se hvordan dette kan bevises ved induksjon. Påstanden P_n blir i dette tilfellet

$$P_n: \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{når } x \neq 1.$$

Når vi bruker induksjonsprinsippet, må vi sjekke to ting – for det første at P_1 er sann, og deretter at P_k medfører P_{k+1} . Å sjekke at P_1 er sann, betyr i dette tilfellet å vise at

$$1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

og det gjør vi lett ved å faktorisere telleren på høyre side og så forkorte:

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} = 1 + x$$

La oss så anta at P_k er sann, det vil si at

$$\sum_{i=0}^k x^i = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}.$$

Vi må vise at P_{k+1} er sann, altså at

$$\sum_{i=0}^{k+1} x^i = \frac{1 - x^{k+2}}{1 - x}.$$

Vi gjør det slik: Først observerer vi at

$$\sum_{i=0}^{k+1} x^i = \sum_{i=0}^k x^i + x^{k+1} = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} + x^{k+1}$$

der det siste skrittet gjør bruk av antagelsen om at P_k er sann. Samler vi det siste uttrykket på felles brøkstrek, får vi

$$\frac{1 - x^{k+1} + x^{k+1} - x^{k+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{k+2}}{1 - x}$$

eller med andre ord,

$$\sum_{i=0}^{k+1} x^i = \frac{1 - x^{k+2}}{1 - x}$$

som er P_{k+1} . Vi har nå vist at P_1 er sann og at P_k medfører P_{k+1} , og kan dermed konkludere med at P_n holder for alle $n \in \mathbb{N}$. ■

La oss ta et eksempel til for treningens skyld.

1.2.4 Eksempel

Bernoullis ulikhet sier at hvis $x \geq -1$, så er

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \tag{3}$$

for alle naturlige tall n . For å bevise dette ved induksjon må vi først vise at ulikheten holder for $n = 1$. Men setter vi $n = 1$ i (3), får vi

$$1 + x \geq 1 + x$$

som opplagt er riktig. Neste trinn er å anta at

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx$$

for et vilkårlig naturlig tall k , og så vise at

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x.$$

Det gjør vi slik:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{k+1} &= (1 + x)^k(1 + x) \geq (1 + kx)(1 + x) \\ &= 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x, \end{aligned}$$

og dermed er vi ferdige. (Spørsmål: Hvor i dette beviset brukte vi forutsetningen om at $x \geq -1$?) ■

I det siste eksemplet innførte vi ikke skrivemåten P_n for den påstanden vi skulle bevise. Det er ikke vanlig når forholdene er så oversiktlige som her.

Av og til må vi forandre litt på fremgangsmåten vår for å få bevist noe ved induksjon; det kan for eksempel tenkes at påstanden vår ikke holder for $n = 1$, men bare for større verdier av n , eller det kan tenkes at vi må dra med oss mer informasjon enn det vi får fra det foregående trinnet i beviset. Da kan det være nyttig å bruke den følgende versjonen av induksjonsprinsippet.

1.2.5 Induksjonsprinsippet (versjon 2)

La n_0 være et naturlig tall, og anta at for hver $n \geq n_0$ har vi et utsagn P_n . Anta videre at vi vet:

- (i) P_{n_0} er sann.
- (ii) Dersom P_m er sann for alle m slik at $n_0 \leq m < k$, så er P_k også sann.

Da er P_n sann for alle naturlige tall $n \geq n_0$.

Begrunnelsen for dette prinsippet er nesten identisk med vårt tidligere argument: Vi vet fra (i) at P_{n_0} er sann. Bruker vi (ii) med $k = n_0 + 1$, så følger det da at P_{n_0+1} er sann. Dermed er P_{n_0} og P_{n_0+1} sanne, og vi kan bruke (ii) en gang til (med $k = n_0 + 2$ denne gangen) for å slutte at P_{n_0+2} er sann. Nå vet vi at P_{n_0} , P_{n_0+1} og P_{n_0+2} er sanne, og dermed får vi at P_{n_0+3} er sann osv.

Det neste eksemplet viser hvordan vi bruker den nye versjonen av induksjonsprinsippet i praksis.

1.2.6 Eksempel

Vi skal bevise den ene halvdel av aritmetikkens fundamentalteorem 1.1.1, nemlig at ethvert naturlig tall $n \geq 2$ kan skrives som et produkt

$$n = p_1 p_2 \dots p_r$$

av primtall. Induksjonshypotesen vår skal naturlig nok være

$$P_n : n \text{ kan skrives som et produkt av primtall.}$$

Før vi begynner, observerer vi at P_n opplagt er sann dersom n er et primtall – vi godtar nemlig produkter med bare én faktor, slik at vi i dette tilfellet kan skrive $n = p_1$, der p_1 ikke er noe annet enn n selv.

Fordi påstanden i dette tilfellet bare skal gjelde for $n \geq 2$, må vi begynne med å sjekke P_2 (og ikke P_1). Men siden 2 er et primtall, har vi allerede sett at P_2 holder.

La oss så anta at P_m er sann for alle m slik at $2 \leq m < k$. Vi må vise at da kan k skrives som et produkt av primtall. Det er to muligheter; enten er k et primtall og da vet vi allerede at P_k er sann, eller så kan k skrives som et produkt $k = m_1 m_2$ av to tall m_1, m_2 som begge er mindre enn k og større enn eller lik 2. Siden P_{m_1} og P_{m_2} er sanne etter antagelsen vår, må m_1 og m_2 kunne skrives som produkter av primtall

$$m_1 = p_1 p_2 \dots p_s$$

$$m_2 = q_1 q_2 \dots q_t.$$

Dermed er

$$k = p_1 p_2 \dots p_s q_1 q_2 \dots q_t$$

som er et produkt av primtall, og vi har vist at P_k er sann. ■

I noen bøker skjelles det sterkt mellom de to variantene av induksjonsprinsippet beskrevet i 1.2.2 og 1.2.5 (varianten i 1.2.5 blir stundom kalt «fullstendig induksjon»), men det er egentlig unødvendig; har man først forstått ideen bak bevismetoden, ser man at det er snakk om minimale variasjoner over samme tema.

Oppgaver i seksjon 1.2

1. Vis ved induksjon at $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Vis ved induksjon at $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Vis ved induksjon at $\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

4. Vis at $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

5. Vis at $n^5 - n$ er delelig med 5 for alle naturlige tall n .

6. Vis at $n(n^2 + 5)$ er delelig med 6 for alle naturlige tall n .

7. Vis at $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ er delelig med 7 for alle $n \in \mathbb{N}$.

8. (UiO) Vis at for alle naturlige tall n er

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

9. a) (UiO) Vis ved induksjon at for alle naturlige tall n er

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \leq 2^n.$$

b) Vis at for alle t slik at $0 < t < 1$, så er

$$\sqrt{1-t} \leq 1 - \frac{t}{2}.$$

c) Bruk resultatet i b) til å vise at

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

10. a) Regn ut $1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, 1+3+5+7+9$. Lag en hypotese om summen av de n første oddetallene.

b) Bevis hypotesen din.

11. La $f(x) = e^{x^2}$. Vis ved induksjon at $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{x^2}$ der $p_n(x)$ er et n -te grads polynom. ($f^{(n)}(x)$ er den n -te deriverte til $f(x)$. Du behøver ikke finne en formel for $p_n(x)$.)

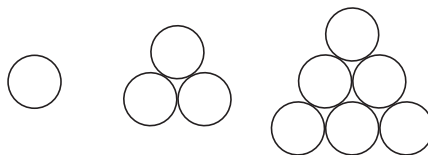
12. (UiO) Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{for } n \geq 1.$$

13. (UiO) Vis at for alle naturlige tall n er

$$\sum_{i=1}^n i2^i = 2 + (n-1)2^{n+1}.$$

14. (UiO) En butikkarbeider har stablet hermetikkbokser oppå hverandre i en slags pyramideform slik at det øverste laget består av én boks, det neste laget av tre bokser plassert i trekant, det neste laget der igjen av seks bokser plassert i trekant osv. (figuren viser de tre øverste lagene sett ovenfra).



a) Vis at antall bokser i det n -te laget ovenfra er

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Vis at det totale antall bokser i de n øverste lagene er

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

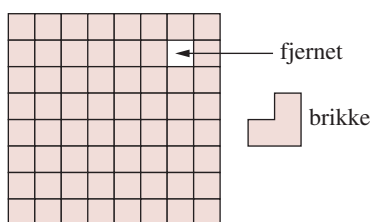
15. Vis at for alle $n \geq 2$ er $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 \leq \frac{n^4}{4} \leq \sum_{k=1}^n k^3$.

16. Hvis n er et naturlig tall, la $s(n)$ være antall måter vi kan skrive n som en sum av naturlige tall. Vi ser for eksempel at $s(4) = 8$, siden 4 kan skrives som en sum på disse måtene

$$4, 3 + 1, 2 + 2, 1 + 3, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1$$

Legg merke til at vi regner med summer med bare ett ledd (slik som 4) og at vi regner summer som $2 + 1 + 1$ og $1 + 2 + 1$ der rekkefølgen er byttet om, som forskjellige. Finn (og bevis!) en enkel formel for $s(n)$.

17. Du har et kvadratisk rutenett med 2^n ruter i begge retninger (figuren viser tilfellet $n = 3$, altså 8 ruter i hver retning).



Én av rutene er fjernet. Vis at du alltid kan dekke de gjenværende rutene med brikker som vist ovenfor. Brikkene har ikke lov til å overlappe eller stikke utenfor rutenettet (men du har selvfølgelig lov til å snu og flytte på dem).

18. Påstand: «I enhver samling av n personer er alle like dumme». Finn feilen i følgende bevisforsøk: «Hvis $n = 1$, er påstanden opplagt sann. Anta at den er sann for $n = k$; vi må vise at den også er sann for $n = k + 1$. Gitt en samling av $k + 1$ personer, må vi altså vise at alle er like dumme. Vi starter med å fjerne en person fra samlingen. Da sitter vi igjen med en samling av k personer som ifølge induksjonshypotesen er like dumme. Bytter vi ut én av disse med den siste personen, får vi igjen en gruppe på k personer som alle er like dumme. Men dermed må alle de $k + 1$ personene være like dumme, og beviset er ferdig.»

19. Du har n linjer i planet, ingen av dem er parallelle, og det er aldri mer enn to av dem som skjærer hverandre i samme punkt. Linjene deler planet inn i A_n forskjellige områder.

a) Vis at

$$A_n = A_{n-1} + n.$$

b) Vis ved induksjon at

$$A_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

20. I en biljardturnering deltar det n spillere. Alle spiller ett parti mot hver av de andre deltagerne.

a) Vis at uansett hvordan det går, vil det etter turneringen være mulig å lage en liste over alle spillerne der hver spiller har slått den neste på listen i deres innbyrdes parti. (NB: Et biljardparti kan ikke ende uavgjort.)

b) (OBS: Dette punktet er vanskelig og kan være enklere å løse uten induksjon!) Vi sier at en gruppe spillere i turneringen *har skilt seg ut* dersom alle spillerne i denne gruppen har slått alle spillerne som ikke er med i gruppen i de innbyrdes partiene. Anta at det *ikke* finnes noen gruppe som har skilt seg ut på denne måten. Vis at uansett hvilke spillere A og B vi plukker ut, så finnes det en liste A, X, Y, Z, \dots, B som er slik at enhver spiller på listen har slått den neste i deres innbyrdes parti (listen behøver *ikke* inneholde alle spillerne i turneringen).

1.3 Litt kombinatorikk

De naturlige tallene bruker vi til å telle med, og å telle er ofte vanskeligere enn vi tror – i hvert fall hvis vi skal telle raskt og effektivt. La oss se på et eksempel. Anta at vi

har 20 kuler, 8 hvite og 12 svarte, og at vi lurer på hvor mange forskjellige mønstre av svarte og hvite kuler vi kan få frem ved å legge kulene etter hverandre langs en linje.



Figur 1.3.1. Ett av kulemønstrene

Én måte å løse dette problemet på er selvfølgelig å finne frem alle mulige mønstre og så telle dem opp på vanlig måte, men det er en liten hake ved denne fremgangsmåten – det viser seg nemlig at det er 125 970 mønstre vi da må holde styr på! Og verre blir det selvfølgelig hvis vi får flere enn 20 kuler. Spørsmålet er klart: Finnes det raskere og mer effektive metoder til å telle antall muligheter? Svaret er ja – det finnes faktisk en hel gren av matematikken som har det som sin hovedoppgave å finne frem til hvor mange kombinasjoner det finnes av ulike typer. Denne grenen kalles *kombinatorikk*, og vi skal nå se litt på noen av de enkleste og vanligste kombinatoriske problemstillingene. Har du vært borti kombinatorikk i videregående skole, finner du nok ikke så mye nytt i denne seksjonen, men eksempel 1.3.9 bør du kanskje ta en titt på.

Vi skal starte med et problem som er litt enklere enn det vi hadde ovenfor. Anta at vi har n kuler som alle har forskjellig farge – hvor mange mønstre kan vi da lage? La oss tenke oss at vi lager mønsteret vårt ved å plukke frem en og en kule fra en haug, og så legge dem etter hverandre i den rekkefølgen vi plukker dem frem. Når vi plukker ut den første kule, har vi selvfølgelig n forskjellige muligheter, men når vi skal plukke ut den neste, har vi allerede brukt opp én kule, så det er bare $n - 1$ igjen å velge mellom. Antall kombinasjoner av de to første kulene er derfor $n(n - 1)$. (Dette er et viktig punkt, så vær sikker på at du skjønner det før du går videre! Prøv å skrive ut alle muligheter for $n = 4$ dersom du ikke ser hva som skjer på annen måte.) Når vi skal plukke ut kule nummer tre, har vi bare $n - 2$ kuler igjen å velge mellom, så antall kombinasjoner av de tre første kulene er $n(n - 1)(n - 2)$. Slik kan vi fortsette, og når vi skal plukke ut den siste kule, ligger det bare én igjen, og vi har altså bare ett «valg». Dette betyr at antallet mønstre vi kan lage er

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Dette uttrykket er så vanlig i kombinatorikken (og i andre deler av matematikken) at det har fått sitt eget navn; vi kaller det *n fakultet* og skriver

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n.$$

Denne definisjonen gir bare mening når $n \geq 1$, men av og til vil uttrykket $0!$ dukke opp på en naturlig måte i formlene våre, og det viser seg da at det er lurt å definere

$$0! = 1$$

selv om det kanskje virker litt merkelig.

La oss oppsummere hva vi nettopp har vist:

1.3.1 Setning

n forskjellige gjenstander kan arrangeres etter hverandre på $n!$ ulike måter.

1.3.2 Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi skrive bokstavene A, B, C, D, E, F etter hverandre?

Siden det er seks forskjellige bokstaver, må svaret være

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Mange synes nok at dette tallet er uventet stort, men det er typisk for kombinatorikken – det er ofte langt flere kombinasjonsmuligheter her i verden enn vi tror på forhånd! ■

Setningen ovenfor hjelper oss tilsynelatende ikke til å finne svaret på det problemet vi startet med; riktignok vet vi nå at 20 kuler kan legges etter hverandre på 20! forskjellige måter, men det er klart at mange av disse måtene vil gi det samme mønsteret – bytter vi for eksempel om på to hvite kuler, har vi fortsatt det samme mønsteret selv om rekkefølgen av kulene nå er annerledes. Den neste problemstillingen vil hjelpe oss til å løse den opprinnelige oppgaven vår.

Vi tenker oss igjen at vi har en samling av n forskjellige kuler. Denne gangen ønsker vi å plukke ut k av disse kulene, og spørsmålet er hvor mange forskjellige måter dette kan gjøres på. (Anta, for eksempel, at vi har tenkt å gi bort k kuler som en presang; spørsmålet er da hvor mange mulige presanger vi har å velge mellom.) Vi går frem som før og tenker oss at vi plukker ut de k kulene en etter en. Den første kulan kan da velges på n måter, den neste på $n - 1$, den deretter på $n - 2$, også videre inntil den k -te, som kan velges på $n - k + 1$ måter. Alt i alt får vi da

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)$$

kombinasjoner. Men nå må vi være litt forsiktige – mange av disse utplukkene vil gi oss den samme presangen bare med kulene plukket ut i forskjellige rekkefølger. Siden de k kulene som utgjør en presang kan plukkes ut i $k!$ forskjellige rekkefølger, så kan vi få hver presang på $k!$ forskjellige måter. Antallet ulike presanger må derfor være

$$\frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)}{k!}.$$

Legg merke til at dersom vi ganger teller og nevner med $(n - k)!$, får vi (sjekk regningen!)

$$\frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Dette uttrykket er også så viktig i kombinatorikken at det har fått sitt eget symbol; vi skriver

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)}{k}$$

og leser symbolet som « n over k ». Tall på formen $\binom{n}{k}$ kalles ofte *binomialkoeffisienter*, og vi skal se hvor dette navnet kommer fra i neste seksjon. Legg merke til at siden vi har definert $0! = 1$, så gir definisjonen mening også for $k = 0$. Vi har

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n - 0)!} = 1.$$

La oss igjen oppsummere resultatene våre.

1.3.3 Setning

Dersom vi ønsker å plukke ut k elementer fra en mengde av n ulike objekter, så kan det gjøres på $\binom{n}{k}$ forskjellige måter.

Vi ser på et eksempel:

1.3.4 Eksempel

Hvor mange forskjellige Lotto-rekker finnes det?

En Lotto-rekke består av 7 forskjellige tall mellom 1 og 34. Ifølge setningen ovenfor er det $\binom{34}{7}$ måter å plukke ut 7 tall fra 34 på, så antallet Lotto-rekker er

$$\binom{34}{7} = \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 5\,379\,616,$$

altså nesten fem og en halv million. ■

Vi kan nå løse det problemet vi startet denne seksjonen med.

1.3.5 Korollar

Hvis vi har n kuler hvorav k er hvite og $n - k$ er svarte, så kan vi legge dem etter hverandre i $\binom{n}{k}$ forskjellige mønstre.

Bevis: La oss tenke på problemet på en litt annen måte. Dersom vi starter med n svarte kuler lagt etter hverandre, så kan vi få frem et hvilket som helst mønster ved å velge ut k kuler og male dem hvite. Men plukke ut k kuler av n kan vi gjøre på $\binom{n}{k}$ måter, og følgelig må det finnes $\binom{n}{k}$ forskjellige mønstre. ■

1.3.6 Eksempel

Har vi 8 hvite og 12 svarte kuler, får vi dermed

$$\binom{20}{8} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 125\,970$$

forskjellige mønstre. ■

Men hva skjer dersom vi har flere farger på kulene våre? Det neste resultatet gir et generelt svar.

1.3.7 Setning

Anta at vi har n objekter av r forskjellige typer; n_1 identiske objekter av type 1, n_2 identiske objekter av type 2, og så videre inntil n_r identiske objekter av type r . Da kan disse objektene arrangeres etter hverandre i

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

forskjellige mønstre.

Bevis: Vi vet at n objekter kan ordnes etter hverandre på $n!$ forskjellige måter. Vi kan imidlertid bytte om på identiske objekter uten å forandre mønsteret, og det finnes $n_1!$ måter å bytte om på objekter av type 1, $n_2!$ måter å bytte om på objekter av type 2, ... og $n_r!$ måter å bytte om på objekter av type r . Alt i alt finnes det da $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!$ forskjellige rekkefølger som gir det samme mønsteret, og antallet forskjellige mønstre må derfor være

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_r!}.$$

■

Legg merke til at vi kunne ha brukt argumentet ovenfor til å vise korollar 1.3.5 direkte uten å gå veien om setning 1.3.3.

1.3.8 Eksempel

Hvor mange forskjellige «ord» (de behøver ikke å gi mening) kan vi få ved å bytte om på bokstavene i ordet KULTURUKE?

I dette ordet er det i alt 9 bokstaver: 3 U-er, 2 K-er og én hver av L, T, R og E. Ifølge setning 1.3.7 er det da

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 30\,240$$

muligheter.

■

La oss også ta med et eksempel som krever litt mer oppfinnsomhet.

1.3.9 Eksempel

Du jobber som kokk på et gatekjøkken der man serverer pizza, hamburger og kylling. Gatekjøkkenet får besøk av en gjeng på 16 personer som hver bestiller en av de tre rettene, og du får inn en lapp på kjøkkenet der det står hvor mange bestillinger det er av hver type. Mens du gjør i stand maten, begynner du å lure på hvor mange forskjellige bestillinger som er mulig fra en gruppe på 16 personer (som kokk er du selvfølgelig bare interessert i hvor mange retter det er av hver type, og ikke hvilken rett hver enkelt gjest har bestilt).

La oss ta utgangspunkt i hvordan du ville ta imot en slik bestilling. En grei måte ville være å ta blokken din, dele den i tre deler ved hjelp av to loddrette streker, og

la hver av de tre delene representere henholdsvis pizza, hamburger og kylling. Hver gang en person bestiller pizza, setter du et kryss i den første delen; hver gang noen bestiller hamburger, setter du et kryss i den andre delen; og hver gang noen bestiller kylling, setter du et kryss i den tredje delen. Hvis du får inn en bestilling på 3 pizzaer, 8 hamburgere og 5 kylling, ville altså blokken din se ut som på figuren.



Figur 1.3.2.

Hver bestilling svarer altså til en sekvens av 18 tegn – 16 (identiske) kryss og to (identiske) streker. Fra teorien ovenfor vet vi at det finnes

$$\binom{18}{2} = \frac{18!}{16!2!} = 153$$

forskjellige slike mønstre, og følgelig finnes det 153 mulige bestillinger fra en gruppe på 16 personer. ■

Sannsynligheter

Det er en så nær sammenheng mellom kombinatorikk og sannsynlighetsregning at det er naturlig å avslutte denne seksjonen med noen få ord om sannsynlighetsbegrepet. Skal vi være helt generelle, er dette slett ikke lett; filosofer og statistikere strides ennå friskt om hva sannsynlighet «egentlig» er i mange sammenhenger. Vi skal imidlertid holde oss til situasjoner som er nær knyttet til kombinatoriske problemstillinger, og da er det ikke så vanskelig å gi en rimelig beskrivelse av hva vi mener med ordet «sannsynlighet». La oss starte med et eksempel:

1.3.10 Eksempel

Vi står foran siste runde i et terningspill og trenger minst en femmer for å vinne. Hva er sannsynligheten for gevinst?

Siden det er seks mulige utfall av et terningkast, og to av disse utfallene (5 og 6) vil gi oss seieren, så er sannsynligheten for gevinst $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ■

Dette eksemplet er så enkelt at du neppe lærer noe nytt av det, men det gir oss en konkret situasjon å henge begrepene på. I eksemplet er det 6 mulige utfall av terningkastet – 2 gunstige og 4 ugunstige for det målet vi ønsker å oppnå. Sannsynligheten for å lykkes er da gitt ved formelen

$$\frac{\text{antallet gunstige utfall}}{\text{totalt antall utfall}} = \frac{2}{6}$$

Vi skal bruke den samme definisjonen i mer kompliserte sammenhenger; sannsynligheten for å lykkes er antallet gunstige utfall delt på det totale antallet utfall. Legg merke til at en forutsetning for at denne definisjonen skal være fornuftig, er at alle utfall i utgangspunktet er like sannsynlige – dersom noen hadde jukset med terningen

vår slik at sjansen for å få en ener var atskillig større enn sjansen for å få en sekser, ville ikke resultatet i eksempel 1.3.10 vært riktig.

La oss nå se hvordan definisjonen vår virker i et litt mer komplisert tilfelle:

1.3.11 Eksempel

Vi skal kaste en terning to ganger, og lurer på hva som er sannsynligheten for å få minst én sekser. Det totale antall utfall må være 36 siden det er seks mulige utfall av det første terningkastet, seks mulige utfall av det andre, og antall kombinasjoner da blir $6 \cdot 6 = 36$. Neste spørsmål er hvor mange *gunstige* utfall det er – altså hvor mange utfall som inneholder minst én sekser. Det viser seg at det i slike situasjoner ofte er lettere å regne ut hvor mange *ugunstige* utfall det er, altså hvor mange utfall det er som *ikke* inneholder *noen* sekser: Siden det første kastet kan unngå å være en sekser på 5 forskjellige måter, og det samme gjelder for det andre kastet, så må det finnes $5 \cdot 5 = 25$ kombinasjoner der ingen av kastene er en sekser. Dette betyr at det finnes $36 - 25 = 11$ gunstige utfall, og følgelig er sannsynligheten for minst én sekser lik

$$\frac{11}{36} = 0.3055 \dots$$



Sammenhengen mellom sannsynlighetsregning og kombinatorikk er selvfølgelig den at det ofte er nyttig å bruke kombinatoriske metoder til å finne ut hvor mange (gunstige) utfall det er i et sannsynlighetsteoretisk problem. La oss se på et eksempel der vi får bruk for våre kombinatoriske kunnskaper.

1.3.12 Eksempel

Hva er sannsynligheten for å få utdelt fire ess i poker?

En pokerhånd består av 5 kort delt ut fra en vanlig kortstokk på 52 kort. Det totale antallet pokerhender er dermed lik antallet måter man kan plukke ut 5 kort fra 52 på, det vil si $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ (husk setning 1.3.3). Hvor mange gunstige utfall finnes det så? Siden alle essene må være med, er det bare ett kort vi kan velge fritt. Dette kortet kan være et hvilket som helst av de 48 kortene i stokken som ikke er ess. Antallet gunstige utfall er altså 48, og vår sannsynlighet blir

$$\frac{48}{\binom{52}{5}} = \frac{48}{2\,598\,960} = 1.846 \dots \cdot 10^{-5}.$$



Helt til slutt skal jeg minne om to nyttige regler for å regne ut sammensatte sannsynligheter, nemlig sum- og produktregelen. Siden du kjenner dem videregående skole, skriver jeg dem opp litt uformelt:

1.3.13 Sum- og produktregelen

Anta at du skal regne ut sannsynligheten for en hendelse P som kan skje på n forskjellige måter med sannsynlighet henholdsvis p_1, p_2, \dots, p_n . Dersom disse måtene ikke overlapper, er sannsynligheten for hendelsen P lik summen

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

Anta så at du skal regne ut en hendelse Q . For at denne hendelsen skal inntreffe, må n forskjellige ting skje, og disse har sannsynlighet henholdsvis q_1, q_2, \dots, q_n . Da er sannsynligheten for Q lik produktet

$$q_1 q_2 \dots q_n$$

I praksis må vi ofte bruke en kombinasjon av disse to reglene. Her er et eksempel:

1.3.14 Eksempel

Favorittlaget ditt i fotball kjemper om å rykke opp i Tippeligaen. Dersom det vinner neste kamp, anslår du sannsynlighet for å rykke opp til å være 0.9, hvis det spiller uavgjort tror du at sannsynligheten for opprykk er 0.5, og hvis det taper er sannsynligheten 0.2. Du tror at sannsynligheten for at laget vinner neste kamp er 0.6, mens sannsynligheten for uavgjort er 0.2. Hva er sannsynligheten for at laget rykker opp dersom anslagene dine er riktig?

Vi legger merke til at opprykk kan skje på tre forskjellige måter som ikke overlapper: Laget kan rykke opp etter å ha vunnet neste kamp, etter å ha spilt uavgjort i neste kamp og etter å ha tapt neste kamp. Kaller vi disse sannsynlighetene p_v , p_u og p_t , forteller sumregelen oss at sannsynligheten for opprykk er $P = p_v + p_u + p_t$. For å regne ut p_v , p_u og p_t , må vi bruke produktregelen. Vi ser at $p_v = 0.6 \cdot 0.9 = 0.54$; laget må vinne neste kamp (sannsynlighet 0.6) og deretter klare opprykk (sannsynlighet 0.9). Tilsvarende er $p_u = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1$ og $p_t = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$. Sannsynligheten for opprykk er dermed $P = 0.54 + 0.1 + 0.04 = 0.68$ hvis anslagene dine er riktige. ■

Oppgaver i seksjon 1.3

1. På hvor mange måter kan du ordne 7 hvite og 6 røde kuler etter hverandre?
2. Hvor mange forskjellige «ord» kan du lage ved å bytte om bokstavene i UKULELE?
3. Finn antall arrangementer av bokstavene i ordet KOMMUTATIV.
4. På hvor mange måter kan du arrangere bokstavene i ordet RETTELSE?
5. En jente på tivoli skal velge 3 forskjellige premier av 30 mulige. Hvor mange valg har hun?
6. a) (UiO) I en fotballklubb er det 17 spillere. 2 av de 17 kan bare spille keeper og de 15 andre anvendes bare som utespillere. Hver gang det skal spilles kamp skal

det tas ut et lag på 1 keeper og 10 utespillere til kampen. Anta at alle utespillere kan spille på en hvilken som helst plass på laget (bortsett fra å spille keeper), slik at et hvilket som helst utvalg på 10 av de 15 utespillerne kan tas ut til kampen. På hvor mange måter kan laget tas ut?

- b) Klubben skal i løpet av en sesong spille 11 kamper mot forskjellige andre klubber. På hvor mange måter kan vår fotballklubb ta ut lagene som skal spille disse 11 forskjellige kampene? (Her kan godt samme lag benyttes til flere forskjellige kamper.) Dersom vi ikke ønsker å benytte samme lag til flere kamper, hvor mange muligheter har vi da?
- c) Etter endt sesong utarbeider klubben en tabell som viser hvor mange mål hver enkelt spiller har scoret i løpet av sesongen. Anta de to keeperne ikke scorer noen mål, men at de øvrige 15 spillerne scorer minst én gang hver. Anta at klubben scorer tilsammen 25 mål i løpet av sesongen. Hvor mange muligheter har vi da for innholdet av en slik tabell?

7. På en Vikinglotto-kupong skal du krysse av 6 tall blant 48. Hvor mange muligheter har du?

8. I tillegg til de 7 vinnertallene trekkes det i lotto ut 3 tilleggstill. Vis at det finnes $\binom{34}{7} \binom{27}{3}$ mulige utfall av en lotto-trekning

9. På en lottokupong kan du også krysse av 8, 9, 10, 11 eller 12 ruter istedenfor de vanlige 7, men da må du betale henholdsvis 8, 36, 120, 330 eller 792 ganger så mye som om du bare fyller inn 7 kryss. Forklar hvor disse tallene kommer fra.

10. I tillegg til de 7 gevinsttallene blir det i lotto også trukket ut 3 tilleggstill. For å vinne andrepremien trenger du 6 gevinsttall pluss et tilleggstill. Beregn sannsynligheten for å vinne andrepremien.

11. (UiO) Vi har 34 kuler som er identiske, bortsett fra at 7 er røde og 27 er hvite.

- a) På hvor mange forskjellige måter kan vi ordne kulene?
- b) Vi er interessert i å ordne kulene slik at ingen røde kuler blir liggende ved siden av hverandre. Vis at tallet på slike ordninger er lik antall måter å ordne 7 røde og 21 hvite kuler på, og beregn dette tallet.
- c) Beregn sannsynligheten for at en lottorekke inneholder minst to tall som følger etter hverandre (f. eks. 11 og 12).

12. På hvor mange måter kan 9 like skjorter pakkes i 4 forskjellige kofferter?

13. En isbar selger 8 forskjellige typer kuleis. Et fotballag med 15 gutter kommer inn og bestiller en type hver. Hvor mange forskjellige bestillinger er mulig?

14. På hvor mange måter kan 7 identiske kuler fordeles på 3 ulike bokser når hver boks skal inneholde minst én kule?

15. En restaurant har 7 forskjellige pizza-typer. En venninnegjeng på 12 skal bestille hver sin pizza. Hvor mange forskjellige bestillinger finnes det?

16. En kvinne ønsker å kjøpe ialt 15 aksjer i de tre selskapene A , B og C .

- a) Hvor mange muligheter har hun?
- b) Dersom hun ønsker å ha minst 5 aksjer i A og ikke mer enn 4 i C , hvor mange muligheter har hun da?

17. (UiO) Fem rettferdige mynter kastes uavhengig av hverandre.

- a) Hva er sannsynligheten for at alle gir «mynt»?
- b) Hva er sannsynligheten for at vi får minst tre «mynt»?

Anta nå at to av myntene er falske i det de har «kron» på begge sider, mens de tre andre er rettferdige. Disse fem myntene kastes.

- c) Hva er nå sannsynligheten for at vi får minst tre «mynt»?

Av de fem myntene (2 falske, 3 rettferdige), trekker vi tilfeldig ut 2 mynter og kaster disse.

- d) Vis at sannsynligheten for at begge blir «kron» er $\frac{19}{40}$.

18. (UiO) Et av «mygglagene» i fotball i Røa Idrettslag består av 15 gutter i alderen 9–10 år. I kamper er 7 av disse på banen samtidig, men blir skiftet ut slik at alle 15 får spille omtrent like mye uansett om de er gode eller mindre gode, og uansett om laget ligger an til å vinne eller tape. Laget har bestemt seg for å stille opp en weekend i en fotballturnering i Larvik, og det er nødvendig at 3 av foreldrene blir med sammen med laglederen for å holde noenlunde styr på guttene. Ingen av spillerne kommer fra samme familie.

Da ingen av foreldrene melder seg frivillig til å bli med på turen, blir en enig om at de 3 foreldrene skal velges ut ved loddtrekning. La oss nummerere spillerne fra 1 til 15 slik at spillere nr. 1 til 10 har to foreldre som kan brukes til oppgaven. Spiller nr. 11, 12 og 13 har moren som eneforsørger, mens spiller nr. 14 og 15 har faren som eneforsørger. Disse fem spillerne har derfor bare én av foreldrene som kan brukes til oppgaven.

Anta at navnene til de 25 foreldrene skrives på lapper som legges i en eske. Deretter trekkes de 3 foreldrene ut som et tilfeldig utvalg.

- a) Hva er sannsynligheten for at faren til spiller nr. 1 må bli med på turen?
- b) Hva er sannsynligheten for at begge foreldrene til spiller nr. 1 må bli med på turen?
- c) Anta at moren til spiller nr. 11 blir trukket ut først. Plutselig får faren til spiller nr. 15 likevel lyst til å bli med på turen, men tør ikke melde seg frivillig. Hva er sannsynligheten for at han blir trukket ut?

Faren til spiller nr. 1 mener det er urettferdig at begge foreldrene til en spiller risikerer å måtte bli med på turen. Han foreslår derfor at trekningen foregår i to trinn. Først trekker en ut 3 spillere av de 15 som skal ha med seg en av foreldrene på turen. Hvis noen av disse er spiller nr. 1 til 10, trekkes i annet trinn en av foreldrene tilfeldig.

- d) Hva er nå sannsynligheten for at faren til spiller nr. 1 må bli med på turen?

19. (UiO) n er i denne oppgaven et positivt heltall. En håndballspiller har n nummererte baller som hun skyter mot mål. Hun noterer hvilke baller som treffer mål og hvilke som bommer.

- Hvor mange mulige resultater er det av forsøket, og hvor mange mulige resultater er det med akkurat k baller som treffer ($0 \leq k \leq n$)?
- En keeper prøver å redde skuddene som treffer mål. Hun noterer derfor hvor mange skudd som går utenfor, hvor mange som blir reddet og hvor mange som går i mål. Hvor mange resultater er nå mulig for forsøket?
- La S være en mengde med n elementer, og la R være mengden av delmengder av S . Vis at antall par (A, B) av elementer i R , slik at $A \subseteq B$ som delmengder i S , er 3^n .
- Vis at

$$\sum_{j=0}^n 2^j \binom{n}{j} = 3^n.$$

20. Av en produksjon på 100 skruer blir 5 plukket ut til kvalitetskontroll.

- På hvor mange måter kan disse 5 skruene velges?
- Blant de hundre skruene er 10 defekte. Hva er sannsynligheten for at kontrollutvalget ikke inneholder noen defekte skruer?
- Hva er sannsynligheten for at kontrollutvalget inneholder minst én defekt skrue?

21. I en promillekontroll stopper politiet 50 av 500 bilister på en vei. Hvis vi regner med at 2 % av bilistene kjører med promille, hva er sannsynligheten for at minst én promillekjører blir stoppet?

22. Et «hus» i poker består av 3 kort av en type pluss 2 kort av en annen (f.eks. 3 åtter og to knekter). Hva er sannsynligheten for å få utdelt et hus?

23. I en befolkning på 4 millioner lider 0.5 % av en spesiell sykdom. Vi plukker ut 1000 personer fra befolkningen på en tilfeldig måte. Hva er sannsynligheten for å få med minst én person som lider av sykdommen?

24. Lene har meldt seg på et spørreprogram på TV. Hun har studert spørsmålene i programmet nøye og har funnet fram til sannsynligheter for at hun skal greie å svare riktig. I første runde er det fem spørsmål, og Lene må svare riktig på alle sammen for å gå videre til neste runde. Spørsmålene i denne runden er ganske lette, og Lene tror at sannsynligheten for å kunne svare riktig på et spørsmål er $p = 0.95$.

- Hva er sannsynligheten for at Lene klarer å svare riktig på alle fem spørsmålene?
- I andre runde får Lene 10 spørsmål og må svare riktig på minst 8 av dem. Spørsmålene i denne runden er vanskeligere, og Lene regner med at sannsynligheten for å svare riktig på et spørsmål nå er $q = 0.75$. Forklar hvorfor det er 45 forskjellige måter å plukke ut 2 av de 10 spørsmålene på. Bruk dette til å vise at Lene har en sannsynlighet på omtrent 0.28 for å svare riktig på nøyaktig åtte av spørsmålene i denne runden.

- c) Finn sannsynligheten for at Lene skal klare seg gjennom både første og andre runde.

25. (UiO) Vis at for alle hele tall $n \geq 2$ er

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

26. I denne oppgaven betyr «å lage en terning» at du på hver sideflate til en terning skriver ett av tallene 1, 2, 3, 4, 5 eller 6. Du kan godt bruke samme tall på mer enn en side. Terningene du lager blir altså «jukse-terninger». Anta at vi har laget to slike terninger A og B . Vi kaster begge terningene og sier at A vinner dersom den viser et høyere tall enn B . Vi sier at « A slår B » dersom A har størst sannsynlighet for å vinne når A og B spiller mot hverandre. Er det mulig å lage terninger A , B og C slik at A slår B , B slår C og C slår A ? (I alle terningene skal selvfølgelig hver side ha sannsynlighet $1/6$ for å vende opp).

27. N personer spiller om $2m$ mynter på følgende måte: Person 1 kaster først alle myntene. Hvis nøyaktig halvparten av dem er kron, vinner han alle. Hvis ikke går turen videre til person 2 som gjør akkurat det samme, osv. Dersom ingen av de N personene vinner i første omgang, går turen tilbake til person 1, og spillet fortsetter. Hva er sannsynligheten for at person k vinner?

28. Du er med i et underholdningsprogram på TV og blir bedt om å velge mellom tre lukkede skap. Ett av skapene inneholder en pengepremie som tilfaller deg hvis du velger dette skapet, de to andre er tomme (og gir ingen gevinst om du velger dem). Programlederen vet hvilket skap som inneholder premien, og etter at du har valgt, åpner han ett av de andre skapene og viser deg at det er tomt. Han tilbyr deg å bytte til det tredje skapet. Bør du akseptere?

29. (UiO) En omorganisering av n elementer er et ombytte som flytter alle elementene slik at ingen beholder sin opprinnelige plass. La a_n være antall mulige omorganiseringer av n elementer.

- a) Vis at $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Skriv opp alle omorganiseringer av elementene (A, B, C) og av elementene (A, B, C, D) . Vis rekursjonsformelen

$$a_n = (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}.$$

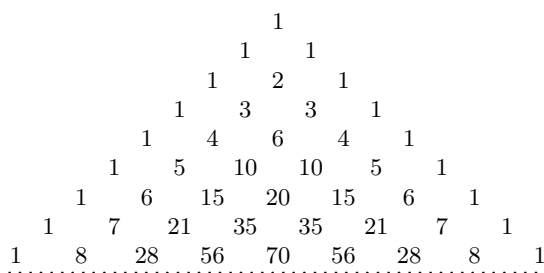
- b) Vis ved induksjon at

$$a_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right], \quad n \geq 1.$$

30. Du har x svarte og y hvite kuler.

- a) Anta at du ønsker å plukke ut n kuler, og at k skal være svarte og $n-k$ hvite. Vis at dette kan gjøres på $\binom{x}{k} \binom{y}{n-k}$ måter.

- b) Vis at det totale antallet måter å plukke ut n kuler på er $\binom{x+y}{n}$.



Figur 1.4.1

c) Forklar hvorfor

$$\sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}.$$

(Denne formelen ble bevist av den kinesiske matematikeren Shih-Chiech Chu i 1303.)

1.4 Pascals trekant og binomialformelen

Vi vet alle at

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

men hva er $(a + b)^n$ for høyere verdier av eksponenten n ? Det er lett å regne ut at

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

og nå begynner du kanskje å se hva mønsteret er; dersom vi multipliserer ut $(a + b)^n$, får vi først a^n , så et ledd av typen $a^{n-1}b$, så ett av typen $a^{n-2}b^2$, så ett av typen $a^{n-3}b^3$, og så videre bortover til b^n . Spørsmålet er bare hvilke tall som skal stå foran hvert av leddene.

Disse tallene kalles *koeffisientene*, og de kan finnes på en rask og effektiv måte ved hjelp av trekanten på figur 1.4.1. La oss først finne ut hvordan denne trekanten er bygd opp. Vi ser at første og siste tall på hver linje alltid er et ett-tall. Videre legger vi merke til at de andre tallene på figuren alltid er summen av de to tallene som står på skrå rett ovenfor – for eksempel er det første 21-tallet i linje 8 summen av tallene 6 og 15 på linje 7. Har vi først innsett dette systemet, kan vi fortsette trekanten så langt nedover vi måtte ønske (prøv å fylle ut to linjer til).

Men hvordan kan vi så bruke figur 1.4.1 til å regne ut uttrykk av typen $(a + b)^n$? Ser vi på den tredje, fjerde og femte linjen, gjenkjenner vi koeffisientene fra formlene for $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ og $(a + b)^4$ ovenfor. Dette mønsteret er allmenngyldig. Ønsker vi for eksempel å finne hva $(a + b)^7$ er, så går vi inn i den åttende linjen ($8 = 7 + 1$) i trekanten. Der finner vi tallene 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1, og det betyr at

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Generelt er tallene i den $(n + 1)$ -te linjen koeffisientene til leddene i $(a + b)^n$.

1.4.1 Eksempel

Regn ut $(x - 2y)^5$.

Setter vi $a = x$ og $b = -2y$, så gir sjette linje i trekanten

$$\begin{aligned}(x - 2y)^5 &= x^5 + 5x^4(-2y) + 10x^3(-2y)^2 \\ &\quad + 10x^2(-2y)^3 + 5x(-2y)^4 + (-2y)^5 \\ &= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5.\end{aligned}$$

■

Figur 1.4.1 blir ofte kalt *Pascals trekant* etter den franske religionsfilosofen, matematikeren og fysikeren Blaise Pascal (1623–62), men den var kjent lenge før hans tid.

Pascals trekant er nyttig når vi skal regne ut en ikke altfor høy potens av $a + b$, men den er ikke så effektiv hvis vi bare er interessert i ett enkelt ledd, for eksempel koeffisienten til leddet $a^{1037}b^2$ i formelen for $(a + b)^{1039}$. Det er også en del teoretiske spørsmål som Pascals trekant ikke er så velegnet til å besvare. Det vi trenger, er en formel som forteller oss hva koeffisienten til $a^{n-i}b^i$ blir når vi regner ut $(a + b)^n$.

1.4.2 Binomialformelen

Når vi multipliserer ut $(a + b)^n$, er koeffisienten til $a^{n-i}b^i$ lik binomialkoeffisienten $\binom{n}{i}$. Altså er

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots \\ &\quad + \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + \dots + nab^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

Et toleddet uttrykk av typen $a + b$ kalles et *binom*, og det er nå lett å skjønne hvor binomialkoeffisientene har fått navnet sitt fra – de er rett og slett koeffisientene som fremkommer når vi regner ut en potens av et binom. Formelen ovenfor kalles av og til *Newtons binomialformel* etter Isaac Newton (1642–1727), men formelen var kjent før ham, blant annet av Pascal.

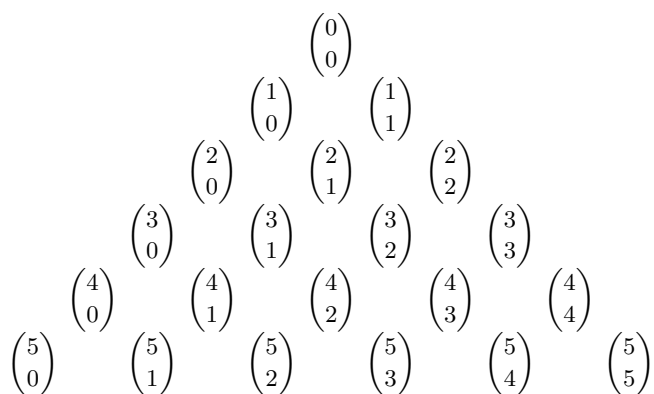
1.4.3 Eksempel

Vi kan nå regne ut koeffisienten til $a^{1037}b^2$ i uttrykket for $(a + b)^{1039}$ som vi spurte om ovenfor. Den er lik

$$\binom{1039}{2} = \frac{1039 \cdot 1038}{1 \cdot 2} = 539\,241.$$

■

Sammenligner vi resultatene vi får om vi multipliserer sammen binomer både ved hjelp av binomialformelen og ved hjelp av Pascals trekant, ser vi at tallene i Pascals trekant må være binomialkoeffisienter (se figur 1.4.2). Hvis du er litt mer ærgjerrig,



Figur 1.4.2

$$\begin{array}{ccc} \binom{n}{i-1} & & \binom{n}{i} \\ & \binom{n+1}{i} & \end{array}$$

kan du forsøke å bevise dette ved å bruke induksjon – du vil da få bruk for lemma 1.4.4 nedenfor.

Resten av dette avsnittet skal vi bruke til å bevise binomialformelen, og vi skal faktisk se på to helt forskjellige bevis; et induksjonsbevis og et kombinatorisk bevis. Induksjonsbeviset er kanskje lettest å forstå, men det kombinatoriske beviset forklarer mye bedre hvorfor det akkurat er binomialkoeffisientene fra kombinatorikken som dukker opp i binomialformelen.

Før vi går løs på induksjonsbeviset, trenger vi en hjelpesetning. Legg merke til at denne setningen gjenspeiler måten Pascals trekant er bygd opp på; den sier nemlig at hver av binomialkoeffisientene i figur 1.4.2 er summen av de to binomialkoeffisientene som står på skrå rett ovenfor:

1.4.4 Lemma

For alle naturlige tall n og i , $n \geq i$, er

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}. \quad (1)$$

Bevis: La oss bevise denne likheten med et kombinatorisk resonnement: Vi vet at $\binom{n+1}{i}$ er antall mønstre vi kan ordne $n+1$ baller i, når i av dem er hvite og resten er svarte. Slike mønstre er av to typer, de som starter med en hvit ball, og de som starter med en svart. Hvor mange er det som starter med en hvit ball? Vel, har vi brukt opp én hvit ball til å starte med, så er det n baller igjen å ordne, og av dem er $i-1$ hvite. Siden disse ballene kan ordnes på $\binom{n}{i-1}$ måter, må det finnes $\binom{n}{i-1}$ mønstre som starter med en hvit ball. Tilsvarende, hvis vi har brukt en svart ball til å starte med, kan de gjenværende i hvite og $n-i$ svarte ballene ordnes på $\binom{n}{i}$ måter, så det må finnes

$\binom{n}{i}$ mønstre som starter med en svart ball. I alt finnes det da

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$$

mønstre som ballene kan ordnes etter, og dette tallet må derfor være lik $\binom{n+1}{i}$ (som er det totale antall mønstre). ■

Det finnes også en annen måte å bevise dette lemmaet på som mange sikkert vil foretrekke; man kan simpelthen regne ut de to uttrykkene i (1) og se at de er like (gjør det!).

Vi er nå klare for det første beviset for binomialformelen, men la oss gjøre en liten observasjon før vi setter i gang. Ifølge binomialformelen er koeffisientene til a^n - og b^n -leddene i uttrykket for $(a+b)^n$ lik henholdsvis $\binom{n}{0}$ og $\binom{n}{n}$. Siden begge disse binomialkoeffisientene er lik 1, ser vi altså at a^n - og b^n -leddene alltid har koeffisienten 1.

Induksjonsbevis for binomialformelen: Vi sjekker først at formelen holder for $n = 1$. I dette tilfellet er høyresiden av formelen lik

$$\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} a^{1-i} b^i = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b$$

som opplagt er lik venstresiden. Vi antar nå at binomialformelen gjelder for $n = k$, det vil si at

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} b^i,$$

og vi skal vise at den da holder for $n = k+1$, altså at

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} b^i.$$

Sagt på en annen måte: vi skal vise at koeffisienten til leddet $a^{k+1-i} b^i$ er lik $\binom{k+1}{i}$.

Ifølge induksjonsantagelsen er

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\ &= (a+b) \cdot \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} b^i \\ &= (a+b) \cdot \left[a^k + k a^{k-1} b + \frac{k(k-1)}{2} a^{k-2} b^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \binom{k}{i} a^{k-i} b^i + \dots + k a b^{k-1} + b^k \right]. \end{aligned}$$

Vi må undersøke hva slags ledd vi får når vi multipliserer ut dette uttrykket. Først observerer vi at det bare er én måte å få et ledd av typen a^{k+1} på; vi må ta a fra

den første parentesen og gange med a^k -leddet fra den andre. Det betyr at koeffisienten til a^{k+1} blir 1 – akkurat som vi ønsker oss (husk observasjonen vi gjorde før vi startet dette beviset). På helt tilsvarende måte ser vi at koeffisienten til b^{k+1} også er 1. Ledd av typen $a^{k+1-i}b^i$, som inneholder begge faktorene a og b , kan vi derimot få frem på to forskjellige måter; vi kan enten ta a fra første parentes og gange med leddet $\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$ fra andre parentes, eller vi kan ta b fra første parentes og gange med leddet $\binom{k}{i-1}a^{k+1-i}b^{i-1}$ fra andre parentes. Til sammen gir dette oss leddet $[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}]a^{k+1-i}b^i$. Men ifølge lemma 1.4.4 er $\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$, så leddet vårt kan også skrives $\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i$ – akkurat som vi ønsket. Vi har dermed vist at dersom binomialformelen gjelder for $n = k$, så gjelder den også for $n = k + 1$, og induksjonsbeviset er ferdig. ■

Før vi går løs på det andre beviset for binomialformelen, kan det være lurt å se litt på hva som egentlig skjer når vi ganger ut parenteser. Hvis vi starter med uttrykket

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2,$$

så ser vi at på høyresiden har vi summen av alle mulige produkter der vi har plukket én faktor fra den første parentesen på venstresiden, og én faktor fra den andre parentesen. Multipliserer vi ut

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) = a_1a_2a_3 + a_1a_2b_3 \\ + a_1b_2a_3 + a_1b_2b_3 + b_1a_2a_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3 + b_1b_2b_3,$$

ser vi det samme mønsteret; høyresiden består av alle mulige produkter av tre faktorer der den første faktoren er hentet fra første parentes, den andre faktoren fra andre parentes, og den tredje faktoren fra tredje parentes. Det er lett å overbevise seg om at dette mønsteret gjelder generelt – dersom vi multipliserer ut

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n),$$

får vi summen av alle mulige produkter med n faktorer der første faktor er hentet fra første parentes, andre faktor fra andre parentes, og så videre.

Kombinatorisk bevis for binomialformelen: Vi ønsker å vise at

$$(a + b)^n = (a + b)(a + b) \dots (a + b) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Dersom vi multipliserer ut produktet på venstre side, får vi – etter hva vi nettopp har diskutert – summen av alle mulige produkter der vi har plukket ut én faktor fra hver av de n parentesene. I dette tilfellet har vi de samme a -ene og b -ene i alle parentesene, så vi kan slå sammen ledd som har det samme antallet a - og b -faktorer. Koeffisienten foran leddet $a^{n-i}b^i$ blir dermed antallet produkter som inneholder nøyaktig $(n - i)$ a -er og i b -er. Dette tallet må være lik antall måter vi kan plukke ut i b -er fra n parenteser på – altså $\binom{n}{i}$ (husk setning 1.3.3). Men dermed har vi vist at koeffisienten til $a^{n-i}b^i$ er $\binom{n}{i}$, og beviset er ferdig. ■

Oppgaver i seksjon 1.4

- Fyll ut to linjer til på figur 1.4.1.
- Bruk Pascals trekant til å regne ut:
 - $(a + b)^4$
 - $(x + y)^7$
 - $(1 - x)^5$
- Regn ut
 - $(a + 2b)^5$
 - $(2x - 3y)^4$
 - $(1 + \sqrt{2})^4$
 - $(1 - \sqrt{3})^5$
- Finn koeffisienten til x^3y^{134} i $(x + y)^{137}$.
- Finn koeffisienten til b^{47} i $(b + 3)^{50}$.
- Bevis lemma 1.4.4 ved å skrive ut og trekke sammen $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$.
- Vis at de to utgavene av Pascals trekant på figur 1.4.1 og figur 1.4.2 er like.
 - Bruk binomialformelen til å vise $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.
 - Gi et kombinatorisk bevis for denne formelen basert på følgende observasjoner: Anta at jeg har en samling med n ting. Da kan jeg plukke ut en delmengde av nøyaktig k ting på $\binom{n}{k}$ forskjellige måter. På den andre siden er det totale antallet delmengder lik 2^n .
- Vis at

$$3^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$
- Hvor ligger tallene på formen $\binom{k}{1}$ i Pascals trekant? Hvor ligger tallene på formen $\binom{k}{2}$? Generelt, hvis i er et fast tall og k varierer, hvor finner du tallene $\binom{k}{i}$?
 - Kontroller gjennom noen eksempler at likheten

$$\sum_{k=i}^n \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$$
 ser ut til å holde. Kan du forklare denne sammenhengen ut fra oppbygningen av Pascals trekant?
 - Bevis formelen i b) ved induksjon på n .

d) Vis at formelen i b) kan omskrives til

$$\sum_{k=i}^n k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1) = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-i+1)}{i+1}.$$

e) Vis hvordan formelen i d) kan brukes til å finne uttrykk for summene $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$, og så videre. (*Hint*: Start med formelen

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

og nøst deg oppover i potensene.)

11. Et matematisk institutt holder til i en høyblokk der det er to heiser. Ved arbeidstidens slutt skal alle ned til utgangen, og heisene stopper ofte for å ta på flere passasjerer. Av og til går to heiser nedover nesten samtidig, og Tom og Klara diskuterer om det da lønner seg å ta den siste heisen (kall den B) istedenfor den første (kall den A) siden det er mindre sjanse for at B må stoppe på veien ned. Vi skal anta at heisene fungerer på denne måten: Heisene kjører nedover i den opprinnelige rekkefølgen inntil de kommer til en etasje der noen står og venter. Da stopper den første heisen A og tar med de ventende, mens den andre heisen B kjører forbi. Neste gang er det B som stopper, mens A kjører forbi osv.

- a) Vis at A kommer først ned dersom det står folk og venter i et like antall etasjer, mens B kommer først ned om det står folk og venter i et odde antall etasjer. (Vi antar at det på denne tiden ikke er noen som skal av andre steder enn ved utgangen.)
- b) Vi antar nå at det er n etasjer mellom oss og utgangen (altså n steder der folk kan stå og vente). Vi antar også at sannsynligheten for at det står noen og venter når den første heisen kommer til en etasje er p . Vis at sannsynligheten for at heis A kommer først ned er

$$P = \sum_{\{k \text{ er et partall}\}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

og at sannsynligheten for at heis B kommer først ned er

$$Q = \sum_{\{k \text{ er et oddetall}\}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- c) Vis at $P - Q = (1 - 2p)^n$.
- d) Vis at hvis n er et partall, så er det alltid størst (eller lik) sannsynlighet for at heis A kommer først ned, men at hvis n er et oddetall og $p > 1/2$, så er det størst sjanse for at heis B kommer først.
- e) Dersom $n = 10$ og $p = 3/4$, hva er da sannsynligheten for at heis A kommer først?

12. I 1826 publiserte Niels Henrik Abel denne generaliseringen av binomialformelen: For alle reelle tall a, x, z og alle naturlige tall n er

$$(a+x)^n = x^n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a(a+iz)^{i-1}(x-iz)^{n-i}.$$

- Vis at for $z = 0$ faller Abels formel sammen med binomialformelen.
- I resten av denne oppgaven skal vi vise Abels formel ved induksjon. Vis først at formelen gjelder for $n = 1$.
- Anta at formelen gjelder for $n = k$. Integrer med hensyn på x på begge sider, og vis at du får

$$\frac{(a+x)^{k+1}}{k+1} = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \frac{a(a+iz)^{i-1}(x-iz)^{k-i+1}}{k-i+1} + C$$

der C er en integrasjonskonstant.

- Bestem verdien til konstanten C ved å sette inn $x = (k+1)z$ i formelen ovenfor og bruke induksjonsantagelsen.
- Vis at

$$\binom{k}{i} \frac{k+1}{k-i+1} = \binom{k+1}{i},$$

og bruk dette til å vise at formelen i c) kan skrives som

$$(a+x)^{k+1} = x^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} a(a+iz)^{i-1}(x-iz)^{k+1-i} + D$$

der $D = a(a+(k+1)z)^k$.

- Vis at du nå har Abels formel for $n = k+1$, og forklar hvorfor dette avslutter beviset.

13. I denne oppgaven er $p > 2$ et primtall. Er a og b hele tall, skal vi skrive $a \equiv b$ dersom $a - b$ er delelig med p .

- Anta at m og n er hele tall, slik at n ikke er delelig med p . Vis at dersom pm/n er et helt tall, så er det delelig med p . (*Hint:* Bruk aritmetikkens fundamentalteorem.)
- Vis at dersom $0 < k < p$, så er $\binom{p}{k}$ delelig med p .
- Vis at $(a+1)^p \equiv a^p + 1$ for alle hele tall a .
- Vis ved induksjon på a at $a^p \equiv a$ for alle naturlige tall a . Forklar hvorfor formelen også gjelder når a er null eller negativ.
- Vis at dersom a ikke er delelig med p , så er $a^{p-1} \equiv 1$. Dette kalles *Fermats lille sats*, og er et meget nyttig verktøy i tallteorien.
- Vis at dersom n ikke er delelig med 5, så er $n^8 - 1$ delelig med 5.
- Vis at $3n^7 + 4n$ er delelig med 7 for alle $n \in \mathbb{Z}$.

1.5 Polynomer og polynomdivisjon

Polynomer er en type funksjoner du sikkert har vært borti før. Typiske eksempler er

$$P(x) = 7x^4 - 3x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x + 13$$

(som er et fjerdegradspolynom) og

$$Q(x) = -3x^5 + \pi x^2 - 102$$

(som er et femtegradspolynom). Generelt er et n -te gradspolynom et uttrykk på formen

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

der a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 er gitte tall og $a_n \neq 0$. Legg merke til at (noen av) tallene a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 kan være negative, og da får vi minus istedenfor pluss mellom leddene. Det kan også hende at noen av tallene a_{n-1}, \dots, a_0 er lik 0, og da vil det se ut som polynomet «mangler» enkelte ledd, slik som $Q(x)$ ovenfor ser ut til å mangle ledd av fjerde, tredje og første grad. Legg også merke til at et nullte-gradspolynom ikke er noe annet enn et tall a_0 .

Polynomer ligner på mange måter på heltall. Dette viser seg først og fremst i hvordan vi kan dele polynomer med hverandre (såkalt polynomdivisjon), og i hvordan vi kan skrive polynomer som produkt av polynomer av lavere grad (akkurat som vi kan faktorisere heltall i mindre heltall). I denne seksjonen skal vi se nærmere på disse temaene. Kanskje har du allerede vært borti dem i videregående skole, og da kan du sannsynligvis bare hoppe over denne seksjonen.

Polynomdivisjon er en teknikk for å dele et polynom med et annet polynom. Som du snart vil se, ligner den mye på den teknikken vi bruker for å dele et flersifret tall med et annet tall. Det er kanskje greiest å begynne med et eksempel.

1.5.1 Eksempel

Vi skal dele $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4$ med $Q(x) = x^2 - 2x + 4$. Vi setter først opp dette som et vanlig divisjonsstykke:

$$2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 : x^2 - 2x + 4 =$$

Først skritt i utregningen er å se hvilken størrelse vi må gange divisoren $x^2 - 2x + 4$ med for at det høyeste leddet i svaret skal stemme med det høyeste leddet til dividenden $2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4$. I vårt eksempel er dette $2x^2$, og vi fører dette på denne måten:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 : x^2 - 2x + 4 = 2x^2 \\ 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 \end{array}$$

Legg merke til at uttrykket på den nederste linjen er det vi får når vi ganger divisoren $x^2 - 2x + 4$ med $2x^2$. Vi trekker nå den nederste linjen fra den øverste:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 : x^2 - 2x + 4 = 2x^2 \\ -(2x^4 - 4x^3 + 8x^2) \\ \hline 8x^3 - 11x^2 + x + 4 \end{array}$$

Vi gjentar nå prosedyren. Denne gangen må vi finne hvilken størrelse vi må gange $x^2 - 2x + 4$ med for å få det høyeste leddet lik $8x^3$. Det er $8x$, og vi skriver:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 : x^2 - 2x + 4 = 2x^2 + 8x \\ -(2x^4 - 4x^3 + 8x^2) \\ \hline 8x^3 - 11x^2 + x + 4 \\ -(8x^3 - 16x^2 + 32x) \\ \hline \end{array}$$

Som ovenfor trekker vi den nederste linjen fra den nest nederste:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 : x^2 - 2x + 4 = 2x^2 + 8x \\ -(2x^4 - 4x^3 + 8x^2) \\ \hline 8x^3 - 11x^2 + x + 4 \\ -(8x^3 - 16x^2 + 32x) \\ \hline 5x^2 - 31x + 4 \end{array}$$

Vi gjentar prosedyren enda en gang. Denne gangen må vi finne hvilken størrelse vi må gange $x^2 - 2x + 4$ med for å få høyeste ledd lik $5x^2$. Det er 5 , og vi skriver:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 : x^2 - 2x + 4 = 2x^2 + 8x + 5 \\ -(2x^4 - 4x^3 + 8x^2) \\ \hline 8x^3 - 11x^2 + x + 4 \\ -(8x^3 - 16x^2 + 32x) \\ \hline 5x^2 - 31x + 4 \\ -(5x^2 - 10x + 20) \\ \hline \end{array}$$

Vi trekker fra den nederste linjen og får:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 : x^2 - 2x + 4 = 2x^2 + 8x + 5 \\ -(2x^4 - 4x^3 + 8x^2) \\ \hline 8x^3 - 11x^2 + x + 4 \\ -(8x^3 - 16x^2 + 32x) \\ \hline 5x^2 - 31x + 4 \\ -(5x^2 - 10x + 20) \\ \hline -21x - 16 \end{array}$$

Uttrykket $-21x - 16$ på nederste linje har nå lavere grad enn divisoren $x^2 - 2x + 4$ og polynomdivisjonen er da ferdig. Vi kaller «svaret» $K(x) = 2x^2 + 8x + 5$ for (*den ufullstendige*) *kvotienten* og uttrykket $R(x) = -21x - 16$ på nederste linje for *resten* (sammenlign med vanlig divisjon). Hva betyr så disse uttrykkene? Jo, de betyr at

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4}{x^2 - 2x + 4} = 2x^2 + 8x + 5 + \frac{-21x - 16}{x^2 - 2x + 4}$$

(sjekk dette ved å trekke sammen høyresiden!). Ganger vi med $x^2 - 2x + 4$ på begge sider, får vi

$$2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 = (2x^2 + 8x + 5)(x^2 - 2x + 4) + (-21x - 16)$$



Resultatet i Eksempel 1.5.1 gjelder helt generelt; dersom vi har to polynomer $P(x)$ og $Q(x)$ der $P(x)$ har høyere grad enn $Q(x)$, så kan vi ved å bruke metoden ovenfor finne to polynomer $K(x)$ og $R(x)$, der $R(x)$ har lavere grad enn $Q(x)$, slik at

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Ganger vi med $Q(x)$, får vi

$$P(x) = K(x)Q(x) + R(x)$$

Vi skriver opp dette resultatet som en setning:

1.5.2 Setning

Anta at $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer og at graden til $Q(x)$ er minst én. Da finnes det polynomer $K(x)$, $R(x)$ der graden til $R(x)$ er ekte mindre enn graden til $Q(x)$, slik at

$$P(x) = K(x)Q(x) + R(x) \quad \text{for alle } x$$

Legg merke til at dersom graden til $P(x)$ er mindre enn graden til $Q(x)$, kan vi velge $K(x) = 0$ og $R(x) = P(x)$.

Vi tar ikke med beviset for denne setningen selv om det er forholdsvis enkelt (man kan f.eks. bruke induksjon på graden til $P(x)$ – se oppgave 9). I stedet tar vi med et eksempel til der vi nå bare viser det ferdige resultatet av polynomdivisjonen (prøv deg selv før du ser på resultatet!).

1.5.3 Eksempel

Vi skal bruke polynomdivisjon til å dele $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ på $Q(x) = x - 2$. Vi får:

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 4x + 5 : x - 2 = x^2 + 5x + 6 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ 5x^2 - 4x + 5 \\ \underline{-(5x^2 - 10x)} \\ 6x + 5 \\ \underline{-(6x - 12)} \\ 17 \end{array}$$

Altså er

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{x - 2} = x^2 + 5x + 6 + \frac{17}{x - 2}$$



Hva skal så polynomdivisjon brukes til? Det viser seg at polynomdivisjon er en teknikk som dukker opp mange steder i matematikken, men i denne boken skal vi hovedsakelig bruke den til å løse ligninger og integrasjonsoppgaver. Som en liten forsmak på hvordan polynomdivisjon brukes til å løse integrasjonsoppgaver, kan vi tenke oss at vi skal regne ut integralet

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{x - 2} dx$$

Ifølge Eksempel 1.5.3 kan dette integralet skrives

$$\int \left(x^2 + 5x + 6 + \frac{17}{x - 2} \right) dx$$

og nå er det ikke så vanskelig å regne ut:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{x - 2} dx &= \int \left(x^2 + 5x + 6 + \frac{17}{x - 2} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 6x + 17 \ln |x - 2| + C \end{aligned}$$

Dette eksempelet er spesielt enkelt fordi vi har et førstegradspolynom i nevneren. For å håndtere nevnerer av høyere grad, må vi kombinere polynomdivisjon med delbrøkopp spalting (dette får du lære om i seksjon 9.3).

I resten av denne seksjonen skal vi se på sammenhengen mellom polynomdivisjon og ligningsløsning. Utgangspunktet er hva som skjer når polynomdivisjonen «går opp», det vil si når resten blir null. Her er et eksempel:

1.5.4 Eksempel

Vi skal dele $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ på $Q(x) = x^2 + x - 1$. Vi får:

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3 : x^2 + x - 1 = x^2 + 2x - 3 \\ -(x^4 + x^3 - x^2) \\ \hline 2x^3 - x^2 - 5x + 3 \\ -(2x^3 + 2x^2 - 2x) \\ \hline -3x^2 - 3x + 3 \\ -(-3x^2 - 3x + 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

Dermed går divisjonen opp, og vi har

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3}{x^2 + x - 1} = x^2 + 2x - 3$$

Ganger vi med $x^2 + x - 1$ på begge sider, får vi

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3 = (x^2 + x - 1)(x^2 + 2x - 3)$$

Dette er en svært nyttig opplysning dersom vi ønsker å løse fjerdegradsligningen

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Denne ligningen kan nemlig nå skrives

$$(x^2 + x - 1)(x^2 + 2x - 3) = 0$$

Siden et produkt bare er null dersom en av faktorene er null, betyr dette at x er en løsning av ligningen $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3 = 0$ hvis og bare hvis x er en løsning av en av de to ligningene $x^2 + x - 1 = 0$ og $x^2 + 2x - 3 = 0$. Disse annengradsligningene kan vi løse på vanlig måte (gjør det!), og vi finner dermed at fjerdegradsligningen $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3 = 0$ har løsningene:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 1$$



Denne sammenhengen mellom polynomdivisjon og ligningsløsning kan vi utnytte mer systematisk. Anta at vi deler et polynom $P(x)$ på førstegradspolynomet $x - a$ (der a er et tall). Siden resten skal ha lavere grad enn divisoren $x - a$, må den være en konstant r (se Eksempel 1.5.3 ovenfor dersom du synes dette er forvirrende). Det betyr at

$$P(x) = K(x)(x - a) + r \quad \text{for alle } x$$

Setter vi $x = a$ i dette uttrykket, får vi:

$$P(a) = r$$

Det betyr at dersom a er en rot i polynomet $P(x)$, så må r være lik 0. Omvendt, hvis r er lik null, så er a en rot i polynomet $P(x)$. Vi har dermed vist følgende setning.

1.5.5 Setning

Et tall a er rot i polynomet $P(x)$ hvis og bare hvis $P(x)$ er delelig med $x - a$.

Her er et eksempel som viser hvordan denne setningen kan brukes i praksis.

1.5.6 Eksempel

Vis at $x = 3$ er en rot i ligningen $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$ og finn de andre røttene.

Vi lar $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$. For å vise at 3 er en rot i ligningen $P(x) = 0$, setter vi inn:

$$P(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 18 = 27 - 36 - 9 + 18 = 0$$

For å finne de andre røttene, deler vi nå $P(x)$ med $x - 3$ (fra setningen ovenfor vet vi at denne divisjonen kommer til å gå opp):

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 4x^2 - 3x + 18 : x - 3 = x^2 - x - 6 \\
 \underline{-(x^3 - 3x^2)} \\
 -x^2 - 3x + 18 \\
 \underline{-(-x^2 + 3x)} \\
 -6x + 18 \\
 \underline{-(6x + 18)} \\
 0
 \end{array}$$

Altså er

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x - 3} = x^2 - x - 6$$

eller med andre ord

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = (x^2 - x - 6)(x - 3)$$

Siden annengradsligningen $x^2 - x - 6 = 0$ har løsningene $x = -2$ og $x = 3$, betyr dette at de andre røttene i ligningen $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$ er -2 og 3 (legg merke til at 3 altså er en dobbeltrot i ligningen $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$). Vi kan nå faktorisere tredjegradspolynomet $x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ slik

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = (x^2 - x - 6)(x - 3) = (x - 3)^2(x + 2)$$



Dersom vi kjenner to eller flere røtter i polynomet, kan vi effektivisere prosedyren ovenfor litt. Vet vi f.eks. at $x = 1$ og $x = -2$ er røtter i $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, kan vi dele $P(x)$ på produktet $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$ for å finne den siste roten. Vi får da (utfør regningene selv!)

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 2} = x - 3$$

Den tredje roten er altså $x = 3$.

Vi har nå studert hvordan polynomdivisjon i praksis kan brukes til å faktorisere polynomer og løse ligninger. I seksjon 3.5 skal vi komme tilbake til disse spørsmålene fra en mer teoretisk synsvinkel og studere hva slags faktoriseringer det alltid er mulig å gjennomføre.

Oppgaver i seksjon 1.5

1. Utfør polynomdivisjon $P(x) : Q(x)$ og kontroller svaret:

a) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4$, $Q(x) = x - 3$

b) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 2$, $Q(x) = x^2 + 2x - 1$

2. Regn ut integralene:

a) $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} dx$

b) $\int \frac{x^2}{x + 1} dx$

3. Vis at $x = 1$ er en rot i polynomet $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Finn de andre røttene.

4. Vis at $x = 1$ og $x = -3$ er røtter i polynomet $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6$. Finn de andre røttene.

5. $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer av grad m og n .

a) Vis at dersom $m > n$, så er $P(x) + Q(x)$ et polynom av grad m .

b) Vis at dersom $m = n$, så er $P(x) + Q(x)$ et polynom av grad mindre enn eller lik m . Når er graden ekte mindre enn m ?

c) Vis at produktet $P(x)Q(x)$ et polynom av grad $m + n$.

6. Vi sier at a er en *dobbeltrot* i polynomet $P(x)$ dersom $P(x)$ er delelig med $Q(x) = (x - a)^2$. Vis at dersom a er en *dobbeltrot* i polynomet $P(x)$, så er a en rot i det deriverte polynomet $P'(x)$. Vis også at dersom a er en rot, men ikke en dobbeltrot, så er a ikke en rot i $P'(x)$.

7. Bruk setning 1.5.5 til å vise at polynomet $P(x) = x^n - a^n$ er delelig med $x - a$. Vis så at $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$.

8. $P(x)$ er et polynom og a, b er to forskjellige tall. Vis at dersom $P(x)$ er delelig med både $x - a$ og $x - b$, så er $P(x)$ delelig med produktet $Q(x) = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$.

9. Bevis setning 1.5.2. (Hint: Tenk deg at divisoren $Q(x)$ er et vilkårlig polynom som du holder fast under hele beviset, og bruk induksjon på graden til dividenden $P(x)$. Tenk på hva som egentlig skjer i det første skrittet i metoden for polynomdivisjon.)

1.6 Historisk epistel: Matematikkens fremvekst og tallteoriens historie

Alt er tall.

— *Pythagoras (ca. 580–ca. 500 f. Kr)*

Tallenes opprinnelse fortaper seg i forhistorisk mørke. Mens de eldste skriftlige nedtegnelsene vi har, er 5–6000 år gamle, viser arkeologiske funn at mennesker har ført enkle regnskaper i over 35 000 år. Blant de eldste funnene er et bavianben med tellemerker fra Lebembo-fjellene i Swaziland og et ulveben fra Tsjekkia. Vi kan ikke med sikkerhet si hva disse forhistoriske gjenstandene er blitt brukt til, men deres tallrikdom og utforming gjør det klart at de ikke bare har hatt dekorative formål.

Et av de mest diskuterte funnene er Ishango-benet fra Edwardsjøen på grensen mellom Kongo og Uganda. Dette møysommelig dekorerte benet er mer enn 8000 år

gammelt, og fordi det ble funnet sammen med andre etterlatenskaper etter et folk som plutselig ble utryddet av et vulkanutbudd, kan det settes inn i en kulturell sammenheng. Tellemerkene på Ishango-benet er gruppert i avdelinger av ulik størrelse, og det gjør det mulig å teste forskjellige tolkningsforsøk. En av de mest plausible tolkningene er at tellemerkene holder regnskap med månefasene – som i alle andre tidlige sivilisasjoner har astronomiske hendelser hatt en umiddelbar praktisk og religiøs betydning for Ishangofolket.

Også fra historisk tid vet vi at regnekunst ikke nødvendigvis er knyttet til skriftspråk. InkaIndianerne i det nordvestlige hjørnet av Sør-Amerika regjerte over et enormt område som strakk seg fra Equador til Santiago i Chile. Til tross for at inkaene manglet skriftspråk, var riket sentralstyrt med en omfattende administrasjon. For å overføre informasjon mellom provinsene og sentraladministrasjonen utviklet inkaene *quipu'en* – et intrikat system av snorer og knuter som var lett å frakte, og som kunne romme enorme mengder tallmessig informasjon.

Men de matematiske innslagene i tidlige sivilisasjoner var ikke bare knyttet til det praktiske og det magiske – vi finner dem også i lek og håndarbeid. Både i byggekunst og tekstiler ser vi dekorasjoner som viser dyp geometrisk innsikt, og fra samfunn som har forblitt isolerte opp til våre dager, kjenner vi spill og puslespill av matematisk karakter.

Man kan diskutere om disse aktivitetene skal regnes med til matematikken eller til matematikkens røtter, men en slik diskusjon er egentlig meningsløs – uansett hva man måtte mene, er de en nødvendig forutsetning for at matematikk i snevrere betydning skal vokse frem. Fagets mangfoldige utspring i lek og kunst, i det praktiske og det religiøse liv, gjenspeiler seg i de ulike fasettene av dagens matematikk. I de senere år har studiet av matematikkens utvikling i tidlige og «primitive» sivilisasjoner utviklet seg til et eget fagfelt – *etnomatematikk*. En innføring finner du i Aschers bok [1] (tall i hakeparentes henviser til litteraturlisten til slutt i kapitlet).

Matematikk i oldtiden – de første skriftlige kildene

De første skriftlige opptegnelsene om matematikk er knyttet til de store elvekulturene i Egypt, Mesopotamia, India og Kina. I alle disse områdene vokste det frem komplekse sivilisasjoner for 4–5000 år siden. I vekslende grad kjenner vi hovedtrekkene i disse sivilisasjonenes historie – deres skriftspråk, statsdannelser, kunst og håndverk.

Hovedkildene til vår kunnskap om egyptisk matematikk er Moskva-papyrusen fra ca. 1850 f. Kr. og Rhind-papyrusen fra ca. 1650 f. Kr. Disse kildene viser at egyptisk matematikk ikke var en samling enkeltresultater, men en systematisk lærebygning med regler og metoder. Selv om oppgavene gjerne har en praktisk formulering, går det klart frem at papyrusene hovedsaklig er ment for teoretisk utdanning. Dette peker på en av de viktigste forutsetningene for at systematisk vitenskap skal utvikle seg – at en samfunnsklasse løsriver seg fra den daglige kampen for føden og konsentrerer seg om å videreføre og systematisere samfunnets kunnskaper. I alle de store elvekulturene finner vi preste- og skriverklasser som leder an i utviklingen.

En annen forutsetning for at matematikk skal vokse frem, er et praktisk behov for matematiske kunnskaper. Allerede «historieskrivningens far», den greske historikeren Herodot (ca. 484–ca. 425 f. Kr.), hadde en teori om den praktiske drivkraften bak egyptisk geometri:

«De erklærte også at Sesostris delte jorden i Egypt mellom innbyggerne, slik at alle fikk et kvadratisk jordstykke av samme størrelse, og at hans største skatteinntekt var leien som landholderne betalte ham hvert år. Hvis elven rev med seg en del av en manns område, henvendte han seg til kongen og fortalte hva som hadde hendt, og kongen sendte da ut personer for å undersøke og måle det nøyaktige omfanget av tapet, og deretter ble mannen bare avkrevd en leie som var proporsjonal med det forminskede jordstykke. På denne måten, tror jeg, ble geometrien først kjent i Egypt, og derfra kom den til Hellas.»

Et høydepunkt i egyptisk geometri er formelen for volumet til en avkortet pyramide. Denne formelen er mer avansert enn storparten av egyptisk matematikk, men det er kanskje ingen overraskelse at egypterne hadde greie på pyramider!

Egypterne drev ikke bare med geometri. Et underlig innslag i deres matematikk var brøkrengningen. Med unntak av brøken $2/3$ (som de hadde et eget symbol for), godtok egypterne bare brøker på formen $1/n$ der n er et naturlig tall (stambøker). Mer kompliserte brøker måtte skrives som summer av stambøker, og i Rhind-papyrusen har man tabeller over hvordan dette kan gjøres – blant annet finner man at den brøken vi ville kalle $2/17$, kan skrives som $1/12 + 1/51 + 1/68$ (man kan lure på hvorfor de ikke rett og slett skrev $1/17 + 1/17$). Å regne med slike brøker krever god tallforståelse.

Parallelt med utviklingen i Egypt vokste det frem en blomstrende kultur rundt elvene Eufrat og Tigris. Dette området ble i oldtiden kalt Mesopotamia, og geografisk faller det nærmest sammen med dagens Irak. Den politiske utviklingen i Mesopotamia var mindre stabil enn i Egypt; den opprinnelige, sumeriske befolkningen ble rundt år 2000 f. Kr. fortrent av babylonerne, som selv etter hvert mistet mye av sin makt, først til assyrerne og så til perserne. Babylonernes språk var helt ulikt sumerernes, men de overtok allikevel kileskriften som sumererne hadde utviklet. Det meste av det vi vet om mesopotamsk matematikk, kjenner vi fra leirtavler skrevet under babylonernes første storhetstid (1900–1650 f. Kr.), men det finnes også tekster som går tilbake til sumerisk tid (se Fribergs artikler [21]).

Sin største innsats gjorde nok babylonerne innenfor astronomien, og både i tidsregning og gradangivelser ser vi ennå i dag innflytelsen fra deres sekstitallsystem. Rent matematisk er det kanskje en annen oppdagelse som overrasker mest. En leirtavle, som har fått navnet Plimpton 322, inneholder en oversikt over tripler av naturlige tall x, y, z slik at $x^2 + y^2 = z^2$. Sagt på en annen måte gir denne tabellen en oversikt over rettvinklede trekantene med heltallige sider. Nå vet vel alle som har regnet litt med Pythagoras' læresetning at $3^2 + 4^2 = 5^2$, men hvor mange andre slike *pythagoreiske tripler* finnes det? Det er lett å se at om vi ganger hvert av de tre tallene 3, 4 og 5 med det samme naturlige tallet n , så får vi et nytt pythagoreisk trippel $x = 3n, y = 4n, z = 5n$, men det finnes også tripler som ikke er på denne formen, for eksempel $x = 5, y = 12, z = 13$.

Det viser seg at det finnes en generell metode for å generere alle pythagoreiske tripler: Velg to naturlige tall, s og t , og la $x = s^2 - t^2, y = 2st, z = s^2 + t^2$. Da er x, y, z et pythagoreisk trippel, og alle pythagoreiske tripler fremkommer på denne måten. Gjennom sin oppbygning antyder tabellen på Plimpton 322 at babylonerne har kjent denne sammenhengen (den første fullstendige beskrivelsen av metoden finner vi i Euklids *Elementer* fra ca. 300 f. Kr.). Hvis dette er tilfelle, må det regnes som starten på det matematiske fagfeltet som kalles *tallteori* – læren om de hele tallenes

egenskaper. Du finner et lettlest og godt kapittel om babylonsk matematikk i Aaboes bok [43].

Den første store sivilisasjonen vi kjenner til på det indiske subkontinentet, er induskulturen langs Indus i det nåværende Pakistan. Den vokste frem rundt 2500 f. Kr. og forsvant 7–800 år senere (sannsynligvis som en følge av den ariske innvandringen i India). Induskulturens skriftspråk er hittil ikke tydet, og vi må basere vår kunnskap på arkeologiske funn.

Det mest bemerkelsesverdige ved induskulturen er byene. Ikke bare var de store (både Harappa og Mohenjo Daro er anslått til å ha hatt rundt 40 000 innbyggere), men de hadde omfattende kloakkanlegg, og det var bad i de fleste husene. Det finnes også store, offentlige bassenger som kan ha vært fellesbad, men som også kan ha hatt en religiøs funksjon. Husene er bygget i teglsten og er ofte i to etasjer. Å bygge og opprettholde byer av denne størrelsen krever ikke bare en velutviklet ingeniørkunst, men også et effektivt landbruk som kan skaffe føde til bybefolkningen.

Siden vi ikke forstår skriften, kan vi bare trekke indirekte slutninger om matematikken i den gamle Indusdalen. Funn av lodd og målestenger viser at de har hatt et velutviklet målesystem. Tar vi loddet på 27.6 gram (ca. 1 unse) som enhet, har de andre loddene størrelse 0.05, 0.1, 0.5, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 og 500. Disse størrelsene holder seg uforandret over hundrevis av år og over store områder. Det er også funnet målestaver med stor nøyaktighet, og den grunnleggende måleenheten (1 industomme = 3.35 cm) finnes igjen i langt senere sivilisasjoner.

De første skriftlige kildene om indisk matematikk er knyttet til hinduismens hellige bøker – vedaene. Vedaene ble sannsynligvis skrevet ned mellom 1000 og 500 f. Kr., men dateringen er usikker, og skriftene baserer seg uansett på en langt eldre, muntlig tradisjon. Matematikken i vedaene og deres tillegg har hovedsaklig et religiøst formål – for eksempel brukes pythagoreiske tripler i konstruksjonen av altere for å få rette vinkler og riktige proporsjoner. Dette betyr ikke nødvendigvis at matematikken i India utelukkende var knyttet til religionsutøvelse, men den verdslige delen kan ha gått tapt fordi den ikke naturlig passet inn i vedaene.

Et omdiskutert tema er i hvilken grad elementer fra induskulturen ble tatt opp i den videre utviklingen. Tidligere har man ment at ariernes inntog (en stund etter 2000 f. Kr.) førte til en fullstendig omveltning i India, men nyere funn tyder på at dette synet er overdrevet. Blant annet kan deler av Indusdalens religion ha gått inn i som en komponent i hinduismen. Også i matematikken er det mulig å finne slike spor – tidlig vedisk matematikk legger stor vekt på konstruksjonen av teglstensaltere, et tema som var atskillig mer aktuelt i Indusdalen enn i tidlige ariske sivilisasjoner.

Rundt 500 f. Kr. vokste det frem to nye religioner i India, buddhismen og jainismen. Dette førte til at de hinduistiske ritualene fikk mindre betydning, og at matematikken fikk en mer praktisk dreining. Kildene fra denne perioden er få, men vi vet for eksempel at indierne rundt år 300 f. Kr. løste kombinatoriske problemer ved hjelp av det vi ville kalle binomialkoeffisienter. Pascals trekant finnes i et verk av Halayudha fra rundt år 1000 e. Kr., men den ble aldri riktig utnyttet i indisk matematikk.

Også i Kina vokste det tidlig frem sivilisasjoner langs Huangho og Yangtsekiang. Den store kulturelle blomstringstiden i oldtidens Kina var Chou-perioden fra ca. 1000 til 221 f. Kr. Selv om riket i prinsippet var et kongedømme, lå makten i realiteten hos de lokale fyrstene. Etter en del urolige århundrer fikk fyrsten i staten Chin overtaket og samlet i 221 f. Kr. Kina til et keiserdømme. For å sikre makten satte den første keiseren i gang en hardhendt utrenskning som ikke innskrenket seg til personer – i år

213 befalte han at de fleste bøker skulle brennes. Heldigvis ble ikke bokbrenningen så effektiv som keiseren hadde håpet, men store deler av en rik kulturell tradisjon forsvant for alltid.

Blant de skriftene som overlevde, var den eldste kinesiske matematikktæksten vi kjenner: *Chou Pei Suan Ching* (*Den aritmetiske klassikeren om solurets viser og himmelens sirkulære stier*). Dateringen er vanskelig, og ulike deler kan ha blitt skrevet til forskjellige tider, men hele verket bør ha vært ferdig rundt 5–200 f. Kr. Her finner vi blant annet et bevis for Pythagoras' læresetning – selv om setningen var kjent langt tidligere i Babylonia og India (og sikkert også i Kina), er dette et av de eldste bevisene som er bevart. Et enda betydeligere verk er *Chiu Chang Suan Shu* (*Ni kapitler om den matematiske kunst*) som ble skrevet ned under Han-dynastiet (206 f. Kr. til 221 e. Kr.), men som i hvert fall delvis bygger på eldre tradisjoner. *Chiu Chang Suan Shu* ble grunnstenen i klassisk, kinesisk matematikk på samme måte som Euklids *Elementer* ble det i Europa, og mange av de senere skriftene er formet som kommentarer til *Chiu*.

Et særpreg ved kinesisk matematikk er bruken av pinner og regnebrett til å utføre beregninger. *Chiu Chang Suan Shu* inneholder for eksempel en effektiv oppskrift for å regne ut kvadratrøtter ved hjelp av regnebrett. På regnebrettene regnet kineserne også med negative tall over tusen år før disse tallene ble akseptert i Europa. (Så sent som på sekstenhundretallet hadde ledende europeiske matematikere problemer med å akseptere negative tall.)

Sammen med kulturene ovenfor er det også naturlig å nevne mayakulturen i Mellom-Amerika. Selv om denne kulturen nådde sitt høydepunkt senere (fra 300 til 900 e. Kr.), er våre opplysninger om den av det samme sparsomme slaget fordi så mye materiale ble ødelagt både under den etterfølgende nedgangstiden og av de spanske erobrerne på 1500-tallet. Vi kjenner mayaenes tallsystem, og vi vet at de utførte astronomiske beregninger med forbløffende presisjon, men siden kildene bare angir resultatene og ikke fremgangsmåten, vet vi lite om hvordan de regnet. Det er for øvrig verd å merke seg at mayaene hadde arvet sitt tallsystem fra en tidligere høykultur som blomstret mellom 800 og 400 f. Kr. Også i Mellom-Amerika var altså matematikken vel utbygget før vår tidsregning.

Gjennomgangen ovenfor yter ikke matematikken i oldtidskulturene full rettferdighet. De matematiske kunnskapene og ferdighetene var langt mer omfattende enn det vi kan komme inn på i en rask skisse. Ønsker du å vite mer, er det mange kilder å øse av. På norsk gir Øksendals hefte [42] en lettlest innføring i tallsystemenes historie fra forhistorisk tid til idag, mens Onstad [34] konsentrerer seg om ligningsteoriens utvikling. Du finner også mye stoff fra oldtiden i Viggo Bruns gamle bok [7] og i Audun Holmes nyere [25]. På engelsk finnes det flere gode matematikkhistorier beregnet på studenter (f. eks. Boyer og Merzbach [6], Burton [11], Eves [20] og Katz [30]), og alle har kapitler om matematikken i oldtiden. Josephs bok [28] er et indignert oppgjør med dem som ønsker å starte matematikkhistorien med de gamle grekerne og negligjere eldre (og særlig østlige) tradisjoner. Det finnes også en rekke spesialverker både om de enkelte kulturer og om oldtidsmatematikken generelt. Du vil finne referanser til disse i de generelle matematikkhistoriene.

Selv om matematikktradisjonene ovenfor er imponerende, står de oss likevel fjernt – vi kjenner så lite til menneskene som skapte dem og forholdene de levde under. Fordi kildematerialet er ufullstendig, kan vi bare gjette oss til måtene de argumenterte på, motivasjonen som drev dem, og stillingen de hadde i samfunnet. Vi vet også lite om hvordan de ulike kulturene påvirket hverandre – selv der det er påvist handels-

forbindelser (som mellom innbyggerne i Indusdalen og sumererne i Mesopotamia), vet vi ikke i hvilken grad det også ble utvekslet ideer og ferdigheter.

Den første matematikktradisjonen der vi virkelig kjenner enkeltmenneskers innsats og kan følge utviklingen fra århundre til århundre, er den greske. Også i denne tradisjonen er det store hull; mange viktige verk er gått tapt, og det er ofte vanskelig å skille myte og virkelighet. Likevel har vi en relativt god oversikt over gresk matematikk fra firehundretallet før Kristi fødsel. Det er forøvrig viktig å være klar over at betegnelsen *gresk matematikk* omfatter langt mer enn matematikken i det egentlige Hellas – den dekker hele det hellenistiske kulturområdet rundt det østlige Middelhavet.

Selv om mye av inspirasjonen bak gresk matematikk stammer fra Athens storhetstid og skolene til Platon (427–347 f. Kr.) og Aristoteles (382–322 f. Kr.), var det i Alexandria i Egypt at den matematiske tradisjonen holdt seg lengst. Den skolen som ble opprettet rundt 300 f. Kr. (muligens av Euklid), varte til den kvinnelige matematikeren og filosofen Hypatia (ca. 370–415 e. Kr.) ble myrdet av en flokk kristne fanatikere. Det er også viktig å være klar over at den greske vitenskapen ikke vokste ut av ingenting; Thales fra Milet (ca. 625–ca. 545 f. Kr.) dro på studiereise til Egypt, og Pythagoras (ca. 580–ca. 500 f. Kr.) skal i tillegg ha vært i Mesopotamia. Det er også mulig at det har vært direkte kontakt mellom gresk og indisk matematikk etter at Aleksander den store i 326 f. Kr. nådde Indusdalen, men dette kan vi bare spekulere om.

De neste matematikktradisjonene der enkeltskjebner trer frem og vi kan begynne skimte den faglige utviklingen, er de kinesiske og indiske i århundrene etter Kristus. På 7–800-tallet kommer så fremveksten av den arabiske matematikkskolen. I likhet med den greske sprer denne seg langt utenfor sitt opprinnelige geografiske område og inneholder representanter fra Sentral-Asia i øst til Spania i vest. Vi skal komme inn på alle disse tradisjonene i forbindelse med de relevante kapitlene i denne boken. I resten av denne seksjonen skal vi holde oss til temaet i dette kapitlet – de naturlige tallene.

Tallteoriens historie

Læren om de naturlige tallene kalles *tallteori*. Selv om grekerne gjorde sin største innsats innenfor geometrien, produserte de også tallteoretiske resultater av stor interesse. Det store verket som systematiserer og oppsummerer mye av den tidlige greske matematikken, er Euklids *Elementer* fra rundt 300 f. Kr. *Elementene* ble raskt en klassiker som utkonkurrerte alle sine forgjengerne, men vi vet likevel ingen ting om Euklids liv bortsett fra at han i en periode virket i Alexandria, og at han sannsynligvis var utdannet i Athen.

Elementene er først og fremst et geometriverk, men Bok 7, 8 og 9 (av 13) handler om tallteori. Her finner vi for eksempel Euklids algoritme for å finne den største felles faktoren til to tall. I dag inngår denne algoritmen som den første, grunnleggende teknikken i de fleste tallteorikurs. Euklid gir et slående bevis for at det finnes uendelig mange primtall (se oppgave 12 i seksjon 1.1), og han viser en variant av aritmetikkens fundamentalteorem. I *Elementene* finner vi også den formelen for pythagoreiske tripler som babylonerne kan ha brukt til sine tabeller. (Ønsker du å se nærmere på *Elementene*, er de fire første bøkene i Thyra Eibes danske oversettelse utgitt på nytt [19]).

Den store tallteoretikeren i gresk matematikk er imidlertid Diofant. I likhet med Euklid vet vi ingen ting om hans liv – sannsynligvis levde han i Alexandria rundt 250 e. Kr., men selv det er usikkert. Hans navn er knyttet til *diofantiske ligninger*, det vil si ligninger som

$$7x - 4y^2 = 1$$

der vi ser ut til å ha for mange ukjente, men der vi til gjengjeld krever at løsningene skal være hele tall (Diofant selv arbeidet med rasjonale løsninger). Oppgaven er å finne alle slike løsninger, eller å vise at det ikke er noen. Vår gamle kjenning $x^2 + y^2 = z^2$ er en diofantisk ligning. Diofants hovedverk *Arithmetika* er delvis bevart (vi kjenner 10 av 13 bøker – de fire siste bare i en arabisk oversettelse som kan være basert på Hypatias bearbeidelse), og som vi senere skal se, har det spilt en stor rolle i matematikkhistorien.

Diofant levde mot slutten av den greske matematikkens storhetstid, og det skulle gå godt over tusen år før han fikk en verdig etterfølger i vest. I India og Kina, derimot, blomstret tallteorien gjennom resten av oldtiden og langt inn i middelalderen.

Den første store indiske matematikeren vi kjenner navnet på er Aryabatha I (romertallet skyldes ikke at han var kongelig, men at det kom nok en Aryabatha senere), som var født i 476 e. Kr. Han var hovedsaklig astronom, og hans største matematiske innsats er kanskje innenfor trigonometrien der han blant annet innførte sinus- og cosinus-funksjonene. I forbindelse med sine astronomiske arbeider ble Aryabatha I ledet til studiet av Diofantiske ligninger av typen $by = ax \pm c$, der a , b og c er kjente, positive tall. Indierne løste slike ligninger ved hjelp av en reduksjonsteknikk de kalte *kuttaka*. Ideen var å erstatte den opprinnelige ligningen med en ny ligning av samme type der koeffisientene a , b og c er mindre. Ved å gjøre dette flere ganger kom man frem til løsningen. Brahmagupta I (f. 598) utvidet teknikken til også å omfatte en del ligninger med annengradsledd.

Den store mesteren innenfor tallteori i middelalderens India er imidlertid Bhaskara II (1114–1185), også kjent som Bhaskaracharya. Hans sykliske metode til å løse ligninger på formen $ax^2 + bx + c = y$ ble først gjenoppdaget i Vesten i 1657. I overensstemmelse med indisk tradisjon gir Bhaskaracharya sine verker en poetisk form, og en av hans viktigste bøker er rettet til datteren Lilavati («Vakre jomfru med strålende øyne, fortell meg, siden du forstår omvendingsmetoden, hvilket tall det er som ganget med 3, så forhøyet med $3/4$ av produktet, så dividert med 7, forminsket med $1/3$ av kvotienten, multiplisert med seg selv, forminsket med 52, tatt kvadratroten av, addert til 8 og dividert med 10, gir tallet 2?»). Etter Bhaskara gikk indisk matematikk inn i en nedgangsperiode, og da den blomstret opp igjen i Kerala et par århundre senere, var det andre temaer som fikk mest oppmerksomhet (vi skal komme tilbake til dette i kapittel 12).

I middelalderen var kinesisk teknologi og vitenskap ledende i verden. Mange av de oppdagelsene som skulle revolusjonere Europa i overgangen fra middelalder til nyere tid (krutt og boktrykkerkunst, for å nevne to), var i bruk i Kina lenge før de ble oppdaget her. Marco Polos (1254–1324) beretninger fra Kina vakte en enorm oppsikt i Europa, men de ble ofte betraktet som overdrivelser eller ren fantasi.

Også kinesisk matematikk hadde en gullalder i denne perioden, og det ble gjort fremragende arbeider innenfor astronomi, geometri, ligningsteori og tallteori. Allerede i *Chiu Chang Suan Shu* (se ovenfor) finner vi viktige tallteoretiske resultater, for eksempel Euklids algoritme og klassifiseringen av alle pythagoreiske tripler. Et annet viktig tema i kinesisk tallteori er kongruensproblemer. Anta vi er gitt et naturlig tall n .

Da vil ethvert annet naturlig tall m ha en rest lik $0, 1, 2, \dots, n - 2$ eller $n - 1$ når det deles med n . Dersom resten er r , sier vi at m er *kongruent med r modulo n* og skriver

$$m \equiv r \pmod{n}.$$

I et kinesisk matematikkverk (*Sun Tsu Chuan Suan Ching*) fra det tredje århundre etter Kristus, kan vi finne problemstillinger av følgende type: «Finn m dersom vi får 2 som rest når vi deler med 3, 3 som rest om vi deler med 5, og 2 som rest hvis vi deler med 7». I notasjonen ovenfor skal altså $m \equiv 2 \pmod{3}$, $m \equiv 3 \pmod{5}$ og $m \equiv 2 \pmod{7}$. Problemer av denne typen dukker ofte opp i astronomi og kalenderstudier. Sin endelige behandling innenfor kinesisk matematikk fikk de av Chin Chiu-Shao (ca. 1202–ca. 1261) i hans hovedverk *Sushu chiu-chang* (*Ni avsnitt om matematikk*) fra 1247. Hovedresultatet kalles fortsatt i dag «det kinesiske restteoremet». Det sier at slike problemer alltid har en løsning forutsatt at de tallene vi regner modulo (3, 5 og 7 i eksemplet ovenfor) ikke har felles faktorer.

I de fleste historier finnes det skurker og helter, og det gjelder også matematikk-historien. Men få matematikere har et så dårlig ettermæle som Chin Chiu-Shao. Han var beryktet for sin arroganse og pågåenhet, og i sitt omflakkende liv som soldat og embetsmann etterlot han seg en rykteflom om forførelser og giftmord. Han beriket seg uhemmet på statens bekostning, og i et klageskrift til keiseren blir han beskrevet som «farlig som en tiger eller en ulv, og giftig som en slange eller en skorpion». Men Chins karakter hadde også en annen side – han var en av sin tids ledende astronomer og arkitekter, han var en fremragende musiker, og han var en av middelalderens største matematikere. Noe av forklaringen på Chins karakter og karriere finner vi kanskje i de urolige tidene; det kinesiske rike stod under et stadig press fra mongolene (som skulle komme til å erobre det under Khubilai-khan i 1280), og Chin tilbragte ti år som front-soldat under stadige grensefeider. Ifølge ham selv var matematikk hans eneste trøst og glede i disse årene (senere skal han i tiltagende grad ha funnet trøst i kvinnelige medmusikanter).

Kineserne var også blant de første til å oppdage Pascals trekant. I en bok fra 1261 gjengir Yang Hui figuren, men den har sannsynligvis vært kjent flere hundre år tidligere. Kineserne brukte trekanten systematisk i sin ligningsteori.

Du vil finne mer detaljerte opplysninger om indisk og kinesisk tallteori i bøkene til Joseph [28] og van der Waerden [41]. Blant de generelle matematikkhistoriene er trolig Katz' [30] den beste på dette punktet.

Gjennom Romerrikets fall og de store folkevandringene forsvant de siste restene av en aktiv matematikktradisjon i Europa. Kunnskapene ble nok til en viss grad holdt i live i klosterscholene, men istedenfor nyvinninger måtte man konsentrere seg om å begrense forfallet.

Grekerne arvtagere ble ikke europeerne, men araberne. Etter at profeten Muhammed hadde skapt den nye religionen islam på begynnelsen av 600-tallet, fikk de arabiske folkene en ny enhet og et nytt formål. De tidligere småstatene ble raskt samlet til ett rike, og ekspansjonen begynte. Allerede i 641 erobret de det gamle lærdomsetet Alexandria. Selv om det berømte biblioteket sannsynligvis ikke fantes lenger, var byen fortsatt full av gamle, greske manuskripter. Arabiske lærde satt raskt igang et systematisk studium, og de viktigste tekstene ble oversatt til arabisk. Innenfor matematikken fikk Euklids *Elementer* en sentral plass; det ble utgitt en rekke arabiske oversettelser og flere kommentarer. Men det arabiske rike vokste ikke bare mot vest; på begynnelsen av 700-tallet nådde den østlige ekspansjonen frem til Indusdalen. Også indiske

astronomi- og matematikkbøker ble oversatt til arabisk, blant annet Brahmaguptas *Brahma Sputa Siddhanta*.

Det var særlig i den østlige delen av det islamske maktområdet at vitenskapen stod sterkt. Kalifen Harun al-Rashid (766–809 – i vest best kjent fra *Tusen og en natt*) etablerte et bibliotek i Bagdad basert på manuskripter fra Athen og Alexandria, og hans etterfølger, kalif al-Mamun, startet et «visdomshus», Bayt al-Hikma, som fungerte som et forskningssenter i over 200 år. Bagdad ble midtpunktet for islamsk vitenskap og kultur, men det var også intens virksomhet i andre deler av det store riket.

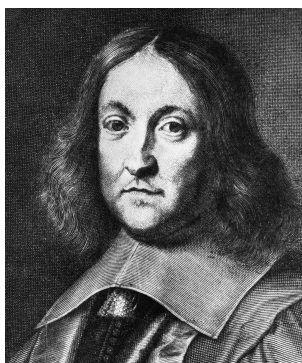
På arven fra Hellas og India bygde arabiske forskere sin egen vitenskap. I matematikk gjorde de sin hovedinnsats innenfor geometri, trigonometri og særlig algebra (ordet «algebra» er en forvanskning av det arabiske «al-jabr» som betyr å sette sammen). Tallteori ser ikke ut til å ha hatt noen sentral plass i arabisk matematikk, men de var blant de første som brukte induksjon og studerte Pascals trekant. Matematikere som al-Karaji (som døde i 1019) og Ibn al-Haytham (965–1039) summerte uttrykk av typen $\sum k^p$ ved hjelp av induksjonsargumenter. Riktignok skrev de ikke ut induksjonstrinnet i full generalitet slik vi gjør i dag, men de beviste de første trinnene ved hjelp av en prosedyre som opplagt kunne fortsettes så lenge man ønsket. (Formelt fullverdige induksjonsbevis finner vi muligens først hos den jødiske matematikeren Levi ben Gerson (1288–1344) som levde i Frankrike.) Pascals trekant finner vi hos al-Samawal (1125–1180), men han henviser til tidligere arbeider av al-Karaji. Alt tyder på at Pascals trekant ble tatt i bruk omtrent samtidig i Kina og i den arabiske verden.

Også når det gjelder arabisk matematikk er bøkene til Joseph [28], van der Waerden [41] og Katz [30] et godt utgangspunkt. Et velskrevet og tilgjengelig spesialverk er Berggren [4].

På 11–1200-tallet begynte den arabiske vitenskapen å forfalle. Delvis skyldtes dette storpolitiske problemer; det arabiske riket kunne ikke holdes sammen mot et stadig sterkere ytre press, og i 1258 stormet mongolene Bagdad, drepte kalifen og ødela byen. Men forfallet skyldtes også indre forhold – stridigheter mellom ulike sekter og dynastier delte i realiteten riket lenge før kalifen falt. Islam tok også etter hvert en strengere og mer innadvendt kurs som ikke oppfordret til verdslige studier i samme grad som før.

I Europa gikk utviklingen i motsatt retning. Ved årtusenskiftet hadde forholdene falt til ro etter folkevandringstiden, stabile statsdannelser hadde oppstått, handelen var kommet i gang, og folk hadde igjen overskudd til noe mer enn å kjempe for livet og føden. De romanske og gotiske katedralene er storslagne tegn på en ny kulturell blomstringstid, og denne oppblomstringen ga seg også utslag i boklige sysler. I 1088 ble Universitetet i Bologna stiftet, og snart dukket det opp universiteter over store deler av Europa. Greske og arabiske tekster ble studert og oversatt, og etter hvert kom de til å danne grunnlaget for en spirende, ny vitenskap. Dessverre var ikke de europeiske oversetterne like systematiske som de arabiske hadde vært, og store deler av den arabiske vitenskapen ble aldri kjent i Europa og måtte oppdages på nytt.

Blant de gamle verkene som ble trukket frem og oversatt var Diofantos *Arithmetica*. I 1575 foretok den tyske matematikeren Xylander (1532–1576 – Xylander er en latinisering av det mer tykklingende *Holzmann*) en oversettelse til latin, og deretter kom en parallellutgave på gresk og latin av Bachet de Méziriac (1581–1638) i 1621. Bachets utgave kom i hendene på en fransk jurist og hobbymatematiker ved navn Pierre de Fermat, og dermed var den moderne tallteorien skapt.



Figur 1.6.1. Pierre de Fermat

Pierre de Fermat (1601–1665) levde hele sitt liv i og rundt byen Toulouse i Sør-Frankrike. Han var utdannet jurist og innehadde diverse juridiske stillinger, men det var matematikk som var hans store lidenskap. I en tid da den vitenskapelige debatten ofte utartet til krangel og fornærmelser, unngikk Fermat strid så godt han kunne. Han reiste lite og publiserte enda mindre, og vi kjenner hans resultater dels gjennom brev og dels gjennom notater som ble offentliggjort etter hans død. Til tross for dette må Fermat regnes som en av tidenes største matematikere – han var en av opphavsmennene til analytisk geometri og sannsynlighetsregning, han var en viktig forløper for differensialregningen, han ga viktige bidrag til optikken, men først og fremst ga han tallteoretiske ideer og problemer som de ennå arbeider med.

La oss gi en smakebit på Fermats resultater. Primtallene fra 3 og oppover kan deles i to klasser; de som gir 1 som rest når de deles på 4:

$$5, 13, 17, 29, 37, 41, \dots$$

og de som gir 3 som rest:

$$3, 7, 11, 19, 23, 31, \dots$$

I terminologien vi innførte ovenfor, er de første tallene kongruente med 1 modulo 4, mens de andre er kongruente med 3. Albert Girard (1595–1632) hadde observert at alle tallene i den første rekken kan skrives som en sum av to kvadrattall ($5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, $29 = 2^2 + 5^2$, $37 = 1^2 + 6^2$, $41 = 4^2 + 5^2$), mens ingen tall i den andre rekken kan skrives som en slik sum. Fermat beviste at dette gjelder generelt – et primtall større enn 2 kan skrives som en sum av to kvadrater hvis og bare hvis det er kongruent med 1 modulo 4. (Dette resultatet har flere slektninger – Joseph Louis Lagrange (1736–1813) viste i 1770 at *alle* naturlige tall kan skrives som en sum av fire kvadrater, og Carl Friedrich Gauss (1777–1855) karakteriserte i 1801 de tallene som kan skrives som en sum av 3 kvadrater.)

Ironisk nok er Fermat mest berømt for en påstand som ingen tror han beviste. Han hadde for vane å skrive kommentarer i marginen til sin utgave av Diofants *Arithmetica*, og utenfor det stedet der Diofant karakteriserer alle pythagoreiske tripler, skriver Fermat at han har funnet et vidunderlig bevis for at det ikke finnes naturlige tall x , y og z slik at

$$x^n + y^n = z^n$$

når $n \geq 3$, men at margin ikke er stor nok til at han kan skrive det ned. Erttiden har gitt denne påstanden navnet *Fermats formodning* (på engelsk kalles den gjerne *Fermat's Last Theorem*). Vi vet at Fermat hadde et bevis for $n = 4$ og sannsynligvis også for $n = 3$, men etter at generasjoner av matematikere har forsøkt å finne et bevis for det generelle tilfellet, er det bare de mest innbitte romantikerne som tror at Fermat virkelig fant noe som alle andre har oversett.

Fermats problem ble først løst på 1990-tallet. Sommeren 1993 annonserte den engelske matematikeren Andrew Wiles (født 1953) at han hadde bevist Fermats formodning, men noen måneder senere ble det funnet et alvorlig hull i Wiles' argumentasjon. Høsten 1994 leverte Wiles inn to nye artikler (den ene i samarbeid med sin tidligere student Richard Taylor) der han tettet hullet i argumentkjeden, og de to nye artiklene ble våren 1995 publisert i det anerkjente tidsskriftet *Annals of Mathematics*. Wiles' bevis er langt og komplisert og løser problemet på en måte Fermat ikke kunne ha forestilt seg. Du kan lese mer om løsningen av Fermats problem i Simon Singhs bok [40] (se også [18] og [3] for tidligere løsningsforsøk).

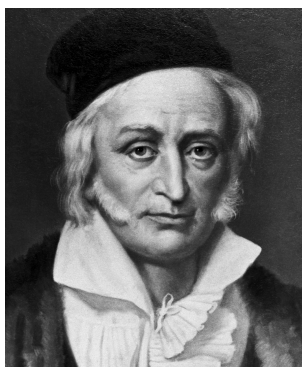
Fermats tallteoretiske oppdagelser vakte nok oppsikt i samtiden, men det skulle gå nesten hundre år før han fant en verdig arvtager i Leonhard Euler (1707–1783). Euler er en av matematikkhistoriens største og mest allsidige begavelser, og vi skal møte ham i større bredde senere i boken. Euler generaliserte Fermats arbeid på flere måter, han publiserte det første beviset for Fermats formodning for $n = 3$, og han fant en viktig sammenheng mellom primtallene og den såkalte zeta-funksjonen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

(ζ er den greske bokstaven zeta). Denne sammenhengen viser seg å være det skarpeste våpen vi har i studiet av primtallenes fordeling. (Noen glimt av Eulers tallteori får du i kapittel 10 av [16]; når du først er i gang, bør du også lese resten av boken!)

En del av Eulers tallteoretiske ideer oppstod gjennom hans mangeårige brevveksling med vennen Christian Goldbach (1690–1764). I et av brevene fremsatte Goldbach en formodning som hverken Euler eller noen annen har klart å vise, nemlig at ethvert partall større enn 2 kan skrives som en sum av to primtall. Et av de beste resultatene så langt tilhører den kinesiske matematikeren Jing Run Chen (1933–1996) som i 1966 viste at ethvert tilstrekkelig stort partall kan skrives som en sum av to tall der det ene er et primtall og det andre har maksimalt to primfaktorer. I 2013 beviste den peruanske matematikeren Harald Helfgott (1977–) *Goldbachs svake formodning* som sier at ethvert oddetall større enn 5 kan skrives som en sum av tre primtall. Det er forøvrig blitt skrevet en roman med Goldbachs formodning og en noe forskrudd matematiker i hovedrollene [15]!

Til tross for innsatsen til Euler og hans yngre samtidige Joseph Louis Lagrange (1736–1813) og Adrien-Marie Legendre (1752–1833), var tallteorien fortsatt en samling enkeltresultater da 1700-tallet gikk ut. Men allerede i 1801 kom det store gjennombruddet; med sin *Disquisitiones Arithmeticae* grunnla Carl Friedrich Gauss (1777–1855) tallteorien som en systematisk disiplin. Det er meningsløst å rangere matematikere som om de skulle være sjakkspillere eller tennisstjerner, men i enhver avstemning om tidenes største matematiker ville Gauss ganske sikkert ha havnet i toppen sammen med Newton og Arkimedes.



Figur 1.6.2. Carl Friedrich Gauss

Gauss var født i enkle kår i Braunschweig i Tyskland. Hans farfar hadde trukket inn til byen fra de omliggende landområdene, men de strenge laugsreglene gjorde det vanskelig for innflyttere å slå seg opp, og Gauss' far førte en omskiftende tilværelse som gartner, kanalarbeider, slakter og bokholder. Noen år før Gauss ble født, hadde familien endelig maktet å kjøpe sitt eget hus og dermed fått fulle borgerrettigheter. Gauss lærte seg selv å lese og regne før han begynte på skolen, og lærerne ble fort klar over hans eksepsjonelle begavelse. Han fikk økonomisk støtte til å fortsette skolegangen, og da han var fjorten år, ble han presentert for hertugen av Braunschweig-Wolfenbüttel. Hertugen ble så imponert at han ga Gauss et årlig stipend. Etter at Gauss hadde fullført sine studier ved Universitetet i Göttingen i 1798, gjorde hertugen og hans ministre sitt beste for å gi den unge vitenskapsmannen gode vilkår i Braunschweig.

De fruktbare årene i Braunschweig fikk en plutselig slutt ved Napoleons invasjon i 1806. Etter mye nøling fikk forbundet av tyske stater omsider trommet sammen en hær under ledelse av Gauss' beskytter, hertugen av Braunschweig-Wolfenbüttel, som nå var over 70 år gammel. Tyskerne led et fullstendig nederlag i dobbeltslaget ved Jena-Auerstädt; hertugen ble dødelig såret og døde noen dager senere. Denne utviklingen førte til en omveltning i Gauss' liv, men ikke så dramatisk som man kanskje kunne tro – et år etter invasjonen overtok han en stilling som sjef for observatoriet ved Universitetet i Göttingen. Her ble han til sine dagers ende i et liv som var fattig på ytre begivenheter, men som rommet en enorm arbeidsinnsats.

Gauss begynte sin matematiske løpebane i fjortenårsalderen ved å føre notisbøker med matematiske opptegnelser, men det var først da han begynte på universitetet at han bestemte seg for å studere matematikk og ikke filologi (hele livet fortsatte han å lære seg nye språk på hobbybasis). Han var tjuefire år gammel da han publiserte *Disquisitiones Arithmeticae* – et verk som ikke bare la det teoretiske grunnlaget for tallteorien, men som også inneholdt en slik rikdom av enkeltresultater at andre matematikere brukte flere tiår på å ta til seg resultatene og metodene. Delvis skyldtes nok dette at formen var uvant – mens Euler, hans største forgjenger, publiserte nesten like fort som han tenkte, finpusset Gauss resultatene til de fikk sin mest generelle og allmenngyldige form.

Trangen til fullstendighet og fullkommenhet førte til at Gauss ikke fikk skrevet ned alle sine oppdagelser, og det er mange historier om at andre matematikere gjenoppgadaget og publiserte hans resultater. Gauss kunne som regel ikke motstå fristelsen til å

fortelle om hva han hadde i skuffen, og det gjorde ham ikke alltid like populær blant kollegene. I tillegg til sin tallteori grunnla Gauss differensialgeometrien (differensialregning anvendt på kurver og flater), og ga betydelige bidrag til algebra, statistikk, astronomi, optikk, landmåling og magnetisme. Blant det han ikke publiserte, er viktige resultater om ikke-euklidisk geometri og elliptiske funksjoner. Det finnes en kortfattet biografi av Gauss på svensk [22], og i hvert fall to mer utfyllende på engelsk [9], [17].

Gauss skildres gjerne som avmålt, tilbakeholden og konservativ. Hans samtidige følte ofte at det stod et olympisk isgufs av ham, og det er typisk at da Niels Henrik Abel var på studiereise i Europa i 1825–26, fant han på atskillige unnskyldninger for å slippe å oppsøke Gauss. På den annen side ga Gauss full støtte til unge, fremadstormende matematikere som Ferdinand Eisenstein (1823–1852) og Bernhard Riemann (1826–1866), og da han oppdaget at den lovende, franske matematikeren som hadde henvendt seg til ham under navnet M. Leblanc, i virkeligheten var en kvinne ved navn Sophie Germain, var han full av støtte og forståelse for de vanskelighetene som kvinner møtte i datidens akademiske verden. Germain (1776–1831) regnes som en av grunnleggerne av læren om elastiske materialer, og hun ga også et vesentlig bidrag til studiet av Fermats formodning. Hun begynte sin karriere med å smuglese algebrabøker under dynen fordi hennes foreldre var ikke syntes matematikk var for jenter, og hun endte opp med et æresdoktorat fra Universitetet i Göttingen (dessverre døde hun før det ble overrakt). Du kan lese mer om henne i [37].

Etter Gauss gikk tallteorien inn i en ny, rik utviklingsperiode. Matematikere som Carl Gustav Jacobi (1804–1851), Peter Gustav Dirichlet (1805–1859) og Bernhard Riemann (1826–1866) tok i bruk verktøy fra matematisk analyse for å løse tallteoretiske problemer (analytisk tallteori). Et slående eksempel er Dirichlets bevis (1837) for Legendres formodning. Denne formodningen sier at dersom a og b er hele tall uten felles faktorer, så finnes det alltid uendelig mange primtall på formen $an + b$, der $n \in \mathbb{Z}$ (dette kalles en *uendelig aritmetisk følge*). I beviset brukte Dirichlet nye teknikker som Jean-Baptiste Fourier (1768–1830) hadde utviklet for å studere varmelledning! Det finnes andre dype sammenhenger mellom primtall og aritmetiske følger som er blitt oppdaget nylig – i 2004 viste Ben Green (1977-) og Terence Tao (1975-) at primtallene inneholder vilkårlig lange, endelige aritmetiske følger.

Et annet berømt resultat fra attenhundretallet er *primtallsatsen*. Selv om primtallene fordeler seg ganske ujevnt utover tallinjen, oppdaget Legendre og Gauss på slutten av 1700-tallet en forbløffende lovmessighet: Dersom $\pi(x)$ betegner antall primtall mindre enn x , ser det ut til at $\pi(x)$ er omtrent lik $x/\ln x$ når x er stor. Mer presist ser det ut til at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Hverken Legendre eller Gauss hadde noen mulighet til å bevise dette resultatet, og det ble først vist i 1896 av den franske matematikeren Jacques Hadamard (1865–1963) og belgieren Charles de la Vallée Poussin (1866–1962) uavhengig av hverandre. Begge bevisene bruker hele det apparatet for analytisk tallteori som var blitt utviklet i mellomtiden. Mange tvilte på om det var mulig å bevise primtallssatsen uten å bruke dette apparatet, og det var derfor en sensasjon da Atle Selberg (1917–2007) publiserte et slikt bevis i 1947.

Atle Selberg er den største norske matematikeren de siste hundre år. Han ble født i Langesund i 1917 og vokste opp i en matematikkinteressert familie. Faren, Ole Michael Selberg, hadde doktorgrad i matematikk, og to eldre brødre, Henrik (1906–

1993) og Sigmund (1910–1994), ble begge fremstående matematikere. Atle Selberg tok doktorgraden i Oslo i 1943, men arbeidet fra 1949 ved Institute of Advanced Study i Princeton i USA. Ved den matematiske verdenskongressen i 1950 fikk Selberg Fieldsmedaljen – den mest eksklusive prisen som deles ut i matematikk. Atle Selberg har hovedsakelig arbeidet med tallteori og med sammenhengen mellom tallteori og matematisk analyse (Selbergs sporformel). Vi skal komme tilbake til noen av hans resultater senere.

Tallteorien fikk på nittenhundretallet en dybde og et omfang som det ikke er mulig å skildre her. Én person bør imidlertid trekkes frem – den indiske matematikeren Srinivasa Ramanujan (1887–1920). Han ble født i enkle kår utenfor Madras i Sør-India og lærte seg matematikk på egenhånd gjennom en kortfattet sammenfatning han kom over. Hans egen matematikk ble av samme slag; en samling forunderlige og betydningsfulle formler som han ikke alltid kunne gjøre rede for. I 1913 sendte han et brev med noen av disse formlene til den kjente, engelske matematikeren G. H. Hardy (1877–1947). Hardy var forbløffet – noen av formlene var velkjente, andre kunne han selv vise uten altfor mye strev, men noen var av en type han aldri hadde sett før. Hardy fikk skaffet penger til et opphold i England, og Ramanujan tilbragte årene fra 1914 til 1919 i Cambridge. Da var han blitt så syk av tuberkulose at det eneste håpet var å returnere til India. Tilbakereisen hjalp imidlertid ikke, og Ramanujan døde året etter i Madras, bare 32 år gammel. I løpet av sin karriere publiserte han 37 arbeider, men like betydningsfulle er kanskje de etterlatte notatbøkene som er blitt utgitt etter hans død.

Hardy sa om Ramanujan at tallene var hans personlige venner, og illustrerte det med en historie: Da Ramanujan var blitt syk, dro Hardy for å besøke ham. Han visste ikke riktig hva han skulle si innledningsvis, så han kommenterte på nummeret til drosjen som brakte ham til sykehuset. Det var nummer 1729 – et kjedelig tall, mente Hardy. Ramanujan kviknet plutselig til: «På ingen måte, Hardy», sa han, «det er det minste tallet som kan skrives som en sum av to kubikktall på to forskjellige måter!» (Du kan sjekke at $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$.)

Kanigel [29] har skrevet en meget lesverdig biografi av Ramanujan som også inneholder et interessant portrett av Hardy. Du bør også lese Hardys forsvar for den rene matematikken [23] som er et lite kunstverk i seg selv (men du behøver ikke være enig i alt han skriver!).

Ønsker du å vite mer om tallteori, er Davenport [14] og Ore [36] gode innføringer (begge bøkene er trykt opp på nytt og er tilgjengelig for en rimelig penge). Burton [10] er en systematisk lærebok på et elementært nivå (bøkene til Ore og Burton inneholder begge historiske kommentarer). Mer omfattende og avanserte er de klassiske lærebøkene til Hardy og Wright [24] og Niven, Zuckerman og Montgomery [33]. Gode, populærvitenskapelige bøker om matematikk som inneholder en del tallteori, er Carleson [12], Rademacher og Toeplitz [39] og Courant og Robbins [13]. Inntil nylig har tallteori vært ansett som matematikk på sitt aller reneste og mest uanvendbare, men i det siste har teorien funnet stadig nye anvendelser. Interessante artikler er [31], [26], [27] og [32] (den siste er avansert!).

I første halvdel av dette århundret var tallteori den sterkeste disiplinen i norsk matematikk. Atle Selberg er allerede nevnt, og andre fremstående tallteoretikere var Axel Thue (1863–1922), Viggo Brun (1885–1978), Thoralf Skolem (1887–1963 – han er forøvrig enda mer kjent for sine bidrag til matematisk logikk), Trygve Nagell (1895–1988), Øystein Ore (1899–1968), Wilhelm Ljunggren (1905–1973), Sigmund Selberg

(1910–1994) og Ernst Selmer (1920–2006). Vil du vite mer om norske tallteoretikere (eller matematikere generelt), bør du konsultere Birkelands hefte [5] og Auberts artikkel [2]. Ønsker du å vite litt om matematikk i Norge før 1800, anbefales Bruns bok [8].

La oss helt til slutt avrunde vår lille føljetong om Pascals trekant. Som vi har sett, var figuren kjent og utnyttet i Kina og den arabiske verden lenge før Blaise Pascals tid (1623–1662). Selv i Europa forekommer den så tidlig som 1527. Også binomialformelen var kjent før Pascal og Newton, og Newtons egentlige fortjeneste i denne sammenheng var studiet av binomiske rekker (se kapittel 12).

Men også Pascals innsats var betydelig – han skrev en avhandling der han utledet og systematiserte sammenhengen mellom tallene i trekanten. Enda viktigere var hans anvendelser på sannsynlighetsregning. Pascal var kommet i kontakt med en lidenskapelig spiller, Chevalier de Méré, som lurte på hvordan innsatsen skulle fordeles mellom spillerne dersom spillet ble avbrutt før det var slutt. Hvis man, for eksempel, hadde bestemt seg til å spille til førstemann hadde vunnet 5 spill, og ble avbrutt på stillingen 4-3, hvordan skulle da pengene fordeles? I en korrespondanse med Fermat løste Pascal dette problemet i full generalitet. Denne korrespondansen blir ofte regnet som sannsynlighetsregningens fødsel, selv om den italienske legen og matematikeren Gerolamo Cardano (1501–1576) hadde skrevet en bok om sjansespill hundre år tidligere – se Ores meget lesverdige biografi [35]. Cardanos bok ble imidlertid først utgitt som del av hans samlede verker i 1663.

Pascal er en fascinerende personlighet som gjorde en enda større innsats utenfor matematikken. Han ble født i Clermont-Ferrand i Frankrike i 1623. Moren døde da han var tre år gammel, og faren, Étienne Pascal, fikk hovedansvaret for oppdragelsen. Étienne var jurist av utdanning og arbeidet i statsadministrasjonen, men han var en begavet hobbymatematiker som kjente mange av tidens ledende vitenskapsmenn. Det viste seg fort at hans sønn var en bråmoden begavelse – tolv år gammel skal han selv ha funnet frem til grunnprinsippene i plangeometrien, seksten år gammel beviste han et nytt, betydelig teorem om kjeglesnitt, og i tjuetårsalderen bygde han en av verdens første regnemaskiner. I fysikk viste han hvordan man kan bruke lufttrykk til å måle høyde over havet (til hans ære kalles enheten for trykk pascal).

På midten av 1640-tallet ble familien Pascal kjent med jansenismen, en religiøs reformbevegelse startet av den nederlandske teologen Cornelius Jansen (1585–1638). Jansenismens lære var asketisk og pietistisk; den understreket at mennesket bare ble frelst ved Guds nåde og ikke selv kunne fortjene sin frelse gjennom gode gjerninger. Gjennom kraftige angrep på kirkens praksis kom jansenittene fort på kant med kirkelige myndigheter, og i 1653 fordømte paven fem av Jansens teser. Året før hadde Pascals søster Jaqueline gått i kloster i jansenittenes hovedkvarter Port Royal i Paris, og i 1654 fulgte Pascal henne etter at han hadde hatt en opprivende, religiøs opplevelse. I 1656 begynte han utgivelsen av sine *Lettres provinciales* der han med påtatt naivitet og glitrende ironi går løs på kirkens lære. Ludvig XIV (som alltid hadde større sans for det første bud enn det femte og sjette) grep inn i konflikten og krevde at alle geistlige skulle undertegne en fordømmelse av Jansens teser, men mange nektet. Konflikten vedvarte til 1729 da den siste jansenittlederen døde. Den hadde også sine muntre sider; i 1713 fordømte paven ikke mindre enn 101 jansenittutsagn, der han dessverre kom i skade for å inkludere en rekke bibelsitater.

Pascal var mye plaget av sykdom og smerter hele sitt voksne liv, og de siste årene forverret sykdommen seg. Likevel fikk han skrevet ned sine tanker om kristendommen

på løse lapper. Disse lappene ble ordnet og utgitt i 1670 som *Tanker om kristendommens sannhet*, og denne boken regnes av mange som Pascals filosofiske hovedverk. Den viser en mann besatt av tanken på frelse, fortapelse og det evige liv. En ny, norsk utgave av *Tanker* [38] kom for noen år siden.

Litteratur

- [1] Ascher, Marcia: *Ethnomatematics*, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, 1991.
- [2] Aubert, Karl Egil: «Norske tallteoretikere», i Per Hag og Ben Johnsen (red.): *Fra matematikkens spennende verden*, Tapir Forlag, Trondheim, 1993.
- [3] Bell, E.T.: *The Last Problem*, revised and updated by U. Dudley, The Mathematical Association of America, Washington D.C., 1990.
- [4] Berggren, J.L.: *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [5] Birkeland, Bent: *Norske matematikere*, Temahefte 5 i matematikk, Gyldendal, Oslo, 1994.
- [6] Boyer, Carl og U. Merzbach: *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1989.
- [7] Brun, Viggo: *Alt er tall*, Universitetsforlaget, Oslo, 1964.
- [8] Brun, Viggo: *Regnekunsten i det gamle Norge*, Universitetsforlaget, Oslo, 1962.
- [9] Bühler, W.K.: *Gauss. A Biographical Study*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [10] Burton, David M.: *Elementary Number Theory*, Allyn & Bacon, Boston, 1976.
- [11] Burton, David M.: *The History of Mathematics: An Introduction*, William C. Brown, Dubuque, 1991.
- [12] Carleson, Lennart: *Matematik i vår tid*, Prisma, Stockholm, 1968.
- [13] Courant, R. og H. Robbins: *What is Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1978.
- [14] Davenport, Harold: *The Higher Arithmetic*, sixth edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [15] Doxiadis, Apostolos: *Onkel Petros og Goldbachs formodning*, Pax, Oslo, 2001.
- [16] Dunham, William: *Journey Through Genius*, Penguin Books, London, 1990.
- [17] Dunnington, G.W.: *Gauss, Titan of Science*, Hafner, New York, 1955.
- [18] Edwards, H.M.: *Fermat's Last Theorem*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [19] Euklid: *Elementer I–IV*, Forlaget Trip, Vejle, 1985.
- [20] Eves, Howard: *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders, Philadelphia, 1990.

- [21] Friberg, Jöran: «Mesopotamisk matematik 1–2», *Nämnnaren*, nr. 4 1992, 9–16, og nr. 1 1993, 12–17.
- [22] Hall, T.: *Gauss, matematikernas konung*, Prisma, Stockholm, 1965.
- [23] Hardy, G.H.: *A Mathematician's Apology*, Canto Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [24] Hardy, G.H. og E.M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford, 1938 (mange senere utgaver).
- [25] Holme, Audun: *Matematikkens historie: Fra Babylon til mordet på Hypatia*, Fagbokforlaget, Bergen, 2001.
- [26] Johnsen, Ben: «Kryptografi – en gammel disiplin med praktiske anvendelser», i Per Hag og Ben Johnsen (red.): *Fra matematikkens spennende verden*, Tapir Forlag, Trondheim, 1993, 109–122.
- [27] Johnsen, Ben: «Om problemenes iboende uberegnelighet», i Per Hag og Ben Johnsen (red.): *Fra matematikkens spennende verden*, Tapir Forlag, Trondheim, 1993, 123–134.
- [28] Joseph, George Gheverghese: *The Crest of the Peacock*, Penguin Books, London, 1989.
- [29] Kanigel, Robert: *The Man Who Knew Infinity*, Scribners, New York, 1991.
- [30] Katz, Victor J.: *A History of Mathematics*, HarperCollins, New York, 1993.
- [31] Lindström, Bernt: «Kompleksitetsteori och klassen NP», *NORMAT* 35, 1987, 20–27.
- [32] Nilsen, Leif: «Modulære kvadratrøtter og moderne kryptologi», *NORMAT* 40, 1992, 75–89.
- [33] Niven, I., H.S. Zuckerman og H. Montgomery: *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, Wiley, New York, 1991.
- [34] Onstad, Torgeir: *Fra Babel til Abel – likningenes historie*, NKS-Forlaget, Oslo, 1994.
- [35] Ore, Øystein: *Cardano: The Gambling Scholar*, Dover Publications, New York, 1965.
- [36] Ore, Øystein: *Number Theory and its History*, Dover Publications, New York 1988.
- [37] Lynn M. Osen: *Women in Mathematics*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1990.
- [38] Pascal, Blaise: *Tanker*, Vidarforlaget, Oslo, 1994.
- [39] Rademacher, Hans og O. Toeplitz: *The Enjoyment of Math*, Princeton University Press, 7th printing, Princeton, 1994.
- [40] Singh, Simon: *Fermats siste sats: Historien om gåten som forfulgte verdens skarpeste hjerner i 358 år*, Aschehoug, Oslo, 1999.

- [41] Waerden, B.L. van der: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [42] Øksendal, Bernt: *Tall og tallsystem*, Temahefte 1 i matematikk, Gyldendal, Oslo, 1991.
- [43] Aaboe, Asger: *Episoder fra matematikkens historie*, Munksgaard, København, 1966.

2 Reelle tall

Tallene er frie frembringelser av den menneskelige ånd, de tjener som et middel til å oppfatte forskjellene mellom tingene enklere og skarpere.
— *Richard Dedekind (1831–1916), Was sind und was sollen die Zahlen*

De tallene vi vanligvis regner med – tallene på tallinjen eller desimaltallene, om man vil – kalles de reelle tallene. Dette tallsystemet omfatter positive og negative hele tall, brøker på formen a/b der $a, b \in \mathbb{Z}$, viktige tall som $\sqrt{2}$, π og e , og mye annet. Mengden av alle reelle tall betegner vi med \mathbb{R} .

Fra skolematematikken er du vant til å skrive mange tall på desimalform; du skriver kanskje 1.4142 (og ikke $\sqrt{2}$) for kvadratroten til 2, eller 0.866 (og ikke $\sqrt{3}/2$) for $\sin \pi/3$. Disse skrivemåtene er naturlige når man bruker lommeregnerne eller datamaskiner mye, men de benyttes lite i teoretisk matematikk. Én grunn er at de ikke er eksakt riktige, og at den lille unøyaktigheten man gjør, kan få avgjørende betydning i spesielle sammenhenger. For eksempel er 3.14 ofte en grei tilnærming til π , men bruker du denne verdien i uttrykket

$$\frac{1}{22 - 7\pi},$$

blir feilen stor (sjekk på lommeregneren!). En annen viktig grunn er at i universitetsmatematikk regner vi stort sett med bokstavuttrykk, og da fører desimaltall ofte til at uttrykkene blir lange og vanskelige å gjennomskue. Skriver vi f.eks.

$$\frac{x^2 - 7}{x - \sqrt{7}}$$

er det lett å få øye på forenklingen

$$\frac{x^2 - 7}{x - \sqrt{7}} = \frac{(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})}{x - \sqrt{7}} = x + \sqrt{7},$$

men den er nesten umulig å se om vi isteden bruker tilnærmingen $\sqrt{7} \approx 2.645751311$ og skriver

$$\frac{x^2 - 7}{x - 2.645751311}$$

En tredje grunn har med logisk sammenheng og struktur å gjøre. Skriver vi formelen for volumet til en kule som

$$4.1888r^3,$$

vil alle lure på hvor dette mystiske tallet 4.1888 kommer fra. Skriver vi isteden formelen på vanlige måte

$$\frac{4\pi}{3}r^3,$$

ser vi at vår gamle kjenning π er inni bildet – og det er kanskje ikke så overraskende når vi beregner størrelsen til noe som er rundt! Kanskje legger vi også merke til at dersom vi deriverer uttrykket med hensyn på r , får vi formelen $4\pi r^2$ for arealet til overflaten av kulen – og det er heller ingen tilfeldighet.

Selvfølgelig treffer man også i videregående matematikk på tall som ikke er pene, f.eks. tall som kommer fra opptellinger eller eksperimenter. Da velger man ofte å erstatte tallet med en bokstav i regningene og så sette inn verdien helt til slutt. I fysikkbøker vil du stort sett finne lyshastigheten betegnet med c , og bare når man trenger et tallsvar, dukker verdien 299 792 458 m/s opp. Riktignok bruker datamaskiner stort sett desimaltall i sine beregninger, men så er det også utviklet en egen teori for hvordan man kan gjøre dette på en måte som reduserer mulighetene for feil.

I resten av dette kapitlet skal vi bygge videre på det du vet om reelle tall fra skolematematikken. Vi skal også se på noen mer avanserte egenskaper som ikke har en sentral plass i skolen, men som vil bli svært viktige for oss. Spesielt gjelder dette kompletthetsprinsippet som vi skal studere i seksjon 2.3.

2.1 Mengder, intervaller og tallverdier

I skolematematikken har du sikkert vært litt borti mengder. Mengdebegrepet er et av de viktigste i matematikken, men det kommer ikke til å spille noen sentral rolle i denne boken. Det kan likevel være greit å vite litt om mengder, og spesielt om hvordan de skrives, før vi tar fatt på de reelle tallene for alvor.

En mengde A er rett og slett en samling med objekter. Dersom x er et objekt som er med i A , sier vi at x er *et element* i A og skriver $x \in A$. Dersom et annet objekt y ikke er med i A , skriver vi $y \notin A$. Vi har møtt noen mengder allerede, f.eks. mengden av alle naturlige tall \mathbb{N} og mengden av alle reelle tall \mathbb{R} . De fleste mengder vi skal møte i denne boken vil være mengder av tall.

Dersom en mengde A er inneholdt i en annen mengde B (dvs. at alle elementene i A også er elementer i B), skriver vi $A \subseteq B$, og sier at A er en *delmengde* av B . Vi har f.eks. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Ofte vil en delmengde B av A bestå av de elementene i A som har en bestemt egenskap P . Da skriver vi gjerne B på denne måten:

$$B = \{ x \in A \mid x \text{ har egenskapen } P \}$$

Det lukkede intervallet fra a til b kan dermed beskrives på denne måte:

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

Ofte bruker man denne notasjonen med kolon istedenfor strek:

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \},$$

og det betyr akkurat det samme (man velger gjerne det alternativet som gir det mest oversiktlige uttrykket). Når mengden er endelig, spesifiserer man den ofte ved å skrive ut alle elementene, f.eks. er $\{0, 1, 2\}$ mengden med elementer 0, 1 og 2.

Snitt og union er to viktige begreper i mengdelæren. *Snittet* $A \cap B$ av to mengder A og B består av alle elementer som er med i *begge* mengdene, mens *unionen* $A \cup B$ består av alle elementer som er med i *minst én* av mengdene. For eksempel er

$$[-1, 2] \cap [1, 3] = [1, 2]$$

mens

$$[-1, 2] \cup [1, 3] = [-1, 3]$$

Differensen $A \setminus B$ består av alle elementer i A som *ikke* er med i B , altså

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Et typisk eksempel for oss vil være

$$\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

som er mengden av alle reelle tall unntatt 0 og 3.

En litt spesiell mengde er *den tomme mengden* \emptyset . Dette er mengden som ikke har noen elementer! Det kan virke merkelig å ha en slik mengde i det hele tatt, men den er svært nyttig når man f.eks. skal drøfte ligningssystemer som ikke har noen løsning, eller når man skal beskrive snitt av mengder som ikke overlapper, f.eks. $(1, 2) \cap (3, 4) = \emptyset$.

De viktigste mengdene i denne boken vil være intervallene på tallinjen, og siden det finnes mange forskjellige skrivemåter for intervaller i litteraturen, er det viktig å bli enig om den notasjonen vi skal bruke. La oss starte med lukkede intervaller; vi skal skrive $[a, b]$, $[a, \infty)$ og $(-\infty, b]$ for mengdene

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}. \end{aligned}$$

Disse intervallene kaller vi *lukkede* fordi endepunktene er tatt med. Andre notasjoner er

$$[a, \rightarrow) = [a, \infty) \quad \text{og} \quad \langle \leftarrow, b] = (-\infty, b],$$

men selv om disse skrivemåtene brukes i mange lærebøker, er de ikke så utbredt ellers. Legg for øvrig merke til at notasjonene $[a, \infty)$ og $(-\infty, b]$ ikke på noen måte innebærer at vi regner symbolene ∞ og $-\infty$ som reelle tall; det er bare snakk om en symbolsk skrivemåte som antyder at intervallene strekker seg ut til det uendelig fjerne.

For åpne intervaller skal vi bruke notasjonen

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}. \end{aligned}$$

Disse intervallene kaller vi *åpne* fordi ingen av endepunktene hører med. Det finnes mange alternative notasjoner for åpne intervaller, for eksempel

$$\begin{aligned}(a, b) &= \langle a, b \rangle =]a, b[\\(a, \infty) &= \langle a, \rightarrow \rangle =]a, \rightarrow[\\(-\infty, b) &= \langle \leftarrow, b \rangle =]\leftarrow, b[\end{aligned}$$

men vi skal holde oss til skrivemåten ovenfor. Vi har også *halvåpne* intervaller der det ene endepunktet hører med til intervallet mens det andre ikke gjør det, og disse skal vi betegne med

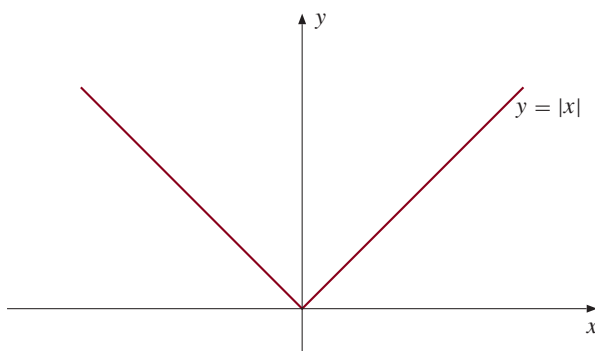
$$\begin{aligned}(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.\end{aligned}$$

Tallverditegn

Et symbol vi skal bruke mye, er tallverditegnet $| \cdot |$. Husk at *tallverdien* til et reelt tall a er definert ved

$$|a| = \begin{cases} a & \text{hvis } a \geq 0 \\ -a & \text{hvis } a < 0 \end{cases}$$

(legg merke til at hvis $a < 0$, så er $-a > 0$, og følgelig kan $|a|$ aldri være negativ). En annen måte å uttrykke dette på, er å si at $|a|$ er det største av de to tallene a og $-a$. Vi skal ofte bruke tallverditegnet når vi er interessert i størrelsen på et tall, men ikke bryr oss om det er positivt eller negativt. Grafen til tallverdifunksjonen er en brukket linje som vist på figur 2.1.1.



Figur 2.1.1.

Det er lett å se at vi alltid har $|ab| = |a||b|$. Tallverdien til en sum er litt verre, men vi har et enkelt og viktig resultat som kalles trekantulikheten.

2.1.1 Trekantulikheten For alle tall $a, b \in \mathbb{R}$ gjelder:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Bevis: Siden $|a|$ er minst like stor som a , og $|b|$ er minst like stor som b , må

$$a + b \leq |a| + |b|.$$

Tilsvarende må $|a|$ være minst like stor som $-a$, og $|b|$ være minst like stor som $-b$, så

$$-(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|.$$

Siden $|a + b|$ er det største av de to tallene $a + b$ og $-(a + b)$, ser vi at uansett hvilket av dem som er størst, så er

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

■

2.1.2 Eksempel

Lar vi $a = 3$ og $b = -7$, så er $|a + b| = |3 - 7| = |-4| = 4$, mens $|a| + |b| = |3| + |-7| = 3 + 7 = 10$. I dette tilfellet er altså $|a + b|$ ekte mindre enn $|a| + |b|$, og vi ser lett hvorfor; de ulike fortegnene til a og b motvirker hverandre når vi regner ut $|a + b|$, men på grunn av tallverditegnene trekker $|a|$ og $|b|$ i samme retning når vi regner ut $|a| + |b|$. ■

Vi skal ofte bruke trekantulikheten til å vise at en sum $a + b$ er liten, f.eks. mindre enn en gitt størrelse som ofte kalles ϵ (dette er den greske bokstaven *epsilon*). Hvis vi da vet at a og b er mindre enn $\epsilon/2$ i den forstand at $|a| < \epsilon/2$ og $|b| < \epsilon/2$, så forteller trekantulikheten oss at

$$|a + b| \leq |a| + |b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Følgende variant av trekantulikheten er også nyttig.

2.1.3 Korollar

For alle $a, b \in \mathbb{R}$ er

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Bevis: Tallverdien til $|a| - |b|$ er det største av tallene $|a| - |b|$ og $|b| - |a|$, og det er derfor nok å vise at begge disse tallene er mindre enn eller lik $|a - b|$. Ifølge trekantulikheten er

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Flytter vi $|b|$ over på den andre siden, får vi

$$|a| - |b| \leq |a - b|,$$

som er den første av disse ulikhetene. Bytter vi om a og b , får vi isteden

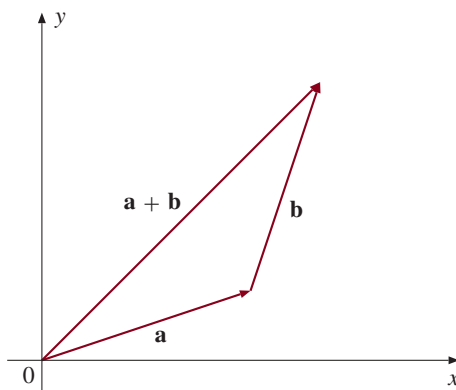
$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|,$$

som er den andre ulikheten vi er på jakt etter. Dermed har vi vist at både $|a| - |b|$ og $|b| - |a|$ er mindre enn eller lik $|a - b|$, og beviset er fullført. ■

Trekantulikheter er viktige i alle de delene av matematikken hvor man er interessert i å måle avstanden mellom objekter. Det finnes ikke bare trekantulikheter for tall, men også for vektorer, funksjoner, mengder og mye annet. Navnet «trekantulikhhet» er lettest å forstå hvis vi ser på vektorer i planet. I dette tilfellet sier trekantulikheten at for alle vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} gjelder

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

der $|\mathbf{a}|$ betegner lengden til vektoren \mathbf{a} , og tilsvarende for $|\mathbf{b}|$ og $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.



Figur 2.1.2.

Den geometriske tolkningen av denne setningen ser vi på figur 2.1.2 – i trekanten utspent av vektorene \mathbf{a} , \mathbf{b} og $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, er lengden av siden $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ mindre enn eller lik summen av lengdene til sidene \mathbf{a} og \mathbf{b} . Dette er vektorversjonen av den klassiske, geometriske setningen som sier at en side i en trekant alltid er kortere enn summen av de to andre sidene.

Bemerkning

Senere i boken, og særlig når vi studerer konvergens og kontinuitet, vil du ofte støte på tallverdier i uttrykk av typen $|x - a|$, der x og a er to reelle tall. Du skal da alltid tenke på $|x - a|$ som *avstanden mellom punktene x og a på tallinjen* (overbevis deg om at dette blir riktig uansett hvilket av tallene x og a som er størst).

Oppgaver i seksjon 2.1

1. Gi en kortere beskrivelse av mengdene:

- $[2, 4] \cup [3, 6]$
- $[2, 4] \cap [3, 6]$
- $(-3, 4) \cup [-2, 1)$
- $[4, 7] \cap \mathbb{N}$
- $(-\infty, 1) \cup (-1, \infty)$

f) $(2, 4) \setminus (1, 3)$

2. Gi en kortere beskrivelse av mengdene:

a) $\emptyset \cup (1, 5)$

b) $\emptyset \cap (1, 5)$

c) $\emptyset \setminus (1, 5)$

d) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{R}$

3. Skriv mengdene som intervaller:

a) $\{x \mid -2 < x \leq 3\}$

b) $\{x \mid |x| < 3\}$

c) $\{x \mid x < -4\}$

d) $\{x \mid x^2 \leq 2\}$

e) $\{x \mid e^x > 1\}$

f) $\{x \mid x < -2\} \cap \{x \mid x \geq -5\}$

4. Tegn grafene til funksjonene:

a) $f(x) = |x - 2|$

b) $f(x) = \sqrt{|x|}$

c) $f(x) = \frac{|x + 3|}{x + 3}$

d) $f(x) = |x + 1||x - 4|$

e) $f(x) = |\sin x|$

f) $f(x) = |x + 5|^2$

5. Løs ulikhetene:

a) $|x - 2| < |x + 3|$ (Hint: Kvadrer begge sider)

b) $|x^2 - 2x - 8| > 8$ (Hint: Bruk at $|x^2 - 2x - 8| > 8$ dersom enten $x^2 - 2x - 8 > 8$ eller $x^2 - 2x - 8 < -8$. Løs disse ulikhetene hver for seg)

6. Vis at $|x| = \sqrt{x^2}$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

7. Vis at $|xy| = |x||y|$ for alle reelle tall x, y .

8. Vis at $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$ for alle reelle tall x, y der $y \neq 0$.

9. Vis at for alle tall x, y, z er $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

10. Vis ved induksjon på n at

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$$

for alle reelle tall $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

11. Begrunn hvert skritt i utregningen nedenfor og forklar hvorfor dette gir et nytt bevis for trekantulikheten:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2.$$

12. Vis at ulikheten $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ gjelder for alle $a, b \geq 0$. (Hint: Start med ulikheten $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.)

2.2 Rasjonale og irrasjonale tall

Tall som kan skrives som brøker av hele tall slik som $\frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \frac{-27}{7}, \frac{3}{-11}$, kalles for *rasjonale tall*. Mengden av alle rasjonale tall betegnes med \mathbb{Q} . Bruker vi mengdenotasjonen fra forrige avsnitt, har vi altså

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Legg merke til at alle de hele tallene hører med blant de rasjonale (fordi vi kan skrive $n \in \mathbb{Z}$ som $n/1$). Reelle tall som ikke er rasjonale, kalles *irrasjonale* (slike tall finnes, for eksempel er e , π og $\sqrt{2}$ irrasjonale). Vær oppmerksom på at tall som ikke ser rasjonale ut ved første øyekast, kan være det likevel – for eksempel er

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

rasjonalt fordi det viser seg å være lik $\frac{3}{2}$ når vi har ryddet opp litt i uttrykket.

De rasjonale tallene er på mange måter enklere enn de andre reelle tallene, og de er derfor viktige byggestener i mange matematiske konstruksjoner. Det er imidlertid så få av dem at vi ikke kan bygge en tilfredsstillende matematisk teori på dem alene; for å få et tallsystem som er rikt nok til å gjenspeile viktige geometriske og fysiske egenskaper ved den verden vi lever i, trenger vi også de irrasjonale tallene. I denne og den neste seksjonen skal vi prøve å belyse begge disse temaene.

La oss først se på noen enkle egenskaper ved de rasjonale tallene:

2.2.1 Setning

Dersom x og y er rasjonale tall, så er $x + y$, $x - y$, xy og (forutsatt at $y \neq 0$) x/y også rasjonale.

Bevis: Dette er elementær brøkgregning, så vi skal bare vise at $x + y$ er rasjonal og overlate resten til leserne. Siden x og y er rasjonale, kan de skrives på formen $x = a/b$, $y = c/d$, der $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Setter vi på felles brøkstrek, får vi

$$x + y = \frac{ad + cb}{bd}$$

og siden $ad + cb$ og bd er hele tall, betyr dette at $x + y$ er rasjonal. ■

Matematikere uttrykker ofte setningen ovenfor ved å si at de rasjonale tallene er *lukket under* addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon.

2.2.2 Korollar

Dersom det ene av de to tallene $x, y \in \mathbb{R}$ er rasjonalt og det andre er irrasjonalt, så er $x + y$ og $x - y$ irrasjonale. Dersom i tillegg hverken x eller y er lik null, så er også xy og x/y irrasjonale.

Bevis: Også i dette tilfellet har alle bevisene samme idé, så vi ser bare på ett eksempel. La oss velge x/y der x er rasjonal og y irrasjonal. Sett

$$a = \frac{x}{y}$$

og anta (for å få frem en motsigelse) at a er rasjonal. Siden

$$y = \frac{x}{a},$$

vil da også y være rasjonal ifølge setning 2.2.1. Dette strider mot forutsetningene, og følgelig må vår antagelse om at a er rasjonal, være gal. ■

Neste trinn på programmet er å vise at det virkelig finnes irrasjonale tall. Vi skal gjøre det ved å påvise at $\sqrt{2}$ er irrasjonal – et resultat som var kjent av grekerne nesten 500 år før vår tidsregning, og som den gang fikk store konsekvenser for matematikkens utvikling. (Se seksjon 2.5.)

Vi starter med en enkel hjelpesetning.

2.2.3 Lemma

Dersom $a \in \mathbb{N}$ er et oddetall, så er a^2 også et oddetall.

Bevis: Siden a er et oddetall, kan det skrives på formen $a = 2n - 1$, der $n \in \mathbb{N}$. Dermed blir

$$a^2 = (2n - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 2(2n^2 - 2n) + 1$$

som opplagt ikke er delelig på 2. ■

Dette lemmaet forteller oss at dersom a^2 er et partall, så må a også være det.

2.2.4 Teorem

$\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Bevis: La oss anta at $\sqrt{2}$ er et rasjonalt tall og vise at dette fører til en selvmotsigelse. Dersom $\sqrt{2}$ er rasjonal, kan vi finne hele tall a, b slik at

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Vi kan anta at brøken a/b er forkortet så mye som mulig, og at a og b derfor ikke har noen felles faktorer. Kvadrerer vi begge sider av ligningen $\sqrt{2} = a/b$, får vi

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

eller skrevet på en litt annen måte

$$2b^2 = a^2. \quad (1)$$

Denne ligningen forteller oss at a^2 er et partall, og ifølge lemma 2.2.3 må a også være et partall. Vi kan altså skrive $a = 2n$ for et eller annet helt tall n . Setter vi dette inn i ligning (1), får vi

$$2b^2 = 4n^2$$

som etter at vi har forkortet med 2 blir til

$$b^2 = 2n^2.$$

Denne ligningen forteller oss at b^2 er et partall, og ifølge lemmaet må da b også være et partall. Men dermed har vi vist at både a og b er partall, og det strider mot forutsetningen om at de ikke har noen felles faktorer. Altså fører antagelsen om at $\sqrt{2}$ er rasjonal til en selvmotsigelse, og den eneste mulige konklusjonen er at $\sqrt{2}$ er irrasjonal. ■

Ved å generalisere argumentet ovenfor kan man vise at dersom $n \in \mathbb{N}$ ikke er et kvadrattall (altså ikke er på formen $n = m^2$ for et helt tall m), så er \sqrt{n} irrasjonal. Som nevnt tidligere er også e og π irrasjonale tall, men det er vanskeligere å bevise – skjønt ikke verre enn at vi skal vise at e er irrasjonal senere i boken.

Dersom vi vet at et tall er irrasjonalt, kan vi bruke korollar 2.2.2 til å vise at mange beslektede tall også er irrasjonale:

2.2.5 Eksempel

Vis at

$$3 + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

er irrasjonal.

Siden $\sqrt{2}$ er irrasjonal og 4 er rasjonal, forteller korollar 2.2.2 oss at $\sqrt{2}/4$ er irrasjonal. Siden 3 er rasjonal, kan vi igjen bruke korollar 2.2.2 til å konkludere med at $3 + \sqrt{2}/4$ er irrasjonal. ■

Når vi nå har vist at irrasjonale tall finnes, er vår neste oppgave å finne ut hvordan de rasjonale og irrasjonale tallene ligger i forhold til hverandre. Resultatet vi skal frem til, sier at begge typene tall ligger *tett* på tallinjen – det vil si at ethvert åpent intervall (uansett hvor lite) inneholder både rasjonale og irrasjonale tall.

Før vi går løs på dette resultatet, er det nyttig å gjøre en enkel observasjon med et fint navn.

2.2.6 Arkimedes' prinsipp

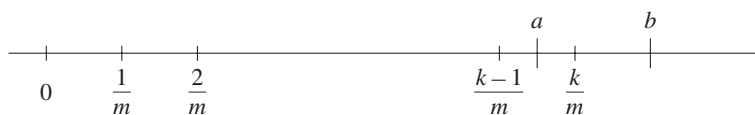
- (i) For ethvert reelt tall a (uansett hvor stort) finnes det et naturlig tall n som er større enn a .
- (ii) For ethvert positivt reelt tall b (uansett hvor lite) finnes det et naturlig tall m slik at $1/m$ er mindre enn b .

Det er ulike måter å vise Arkimedes' prinsipp på alt etter hvilken innfallsvinkel man har til de reelle tallene. Tenker vi på de reelle tallene som alle mulige desimaltall, kan vi resonnerer som følger for å vise (i): Skriv ned a som et desimaltall, stryk alle sifrene bak komma, og legg til 2. Vi har nå funnet et naturlig tall som er større enn a , og (i) er vist. For å vise (ii) bruker vi først (i) til å finne et naturlig tall m som er større enn $1/b$, og så observerer vi at da må $1/m$ være mindre enn b .

2.2.7 Setning

Ethvert åpent intervall (a, b) (der $a < b$) inneholder både rasjonale og irrasjonale tall.

Bevis: La oss først finne et rasjonalt tall i intervallet (a, b) . Ideen er som følger: Vi velger et naturlig tall m slik at $1/m < b - a$ (det er mulig ifølge Arkimedes' prinsipp). Hvis vi starter i origo og går i retning av intervallet (a, b) med skritt av lengde $1/m$, må vi før eller senere komme frem til intervallet. Siden skrittlengden vår er mindre enn lengden til intervallet, kan vi ikke hoppe over det, men må lande midt inni et sted (se figur 2.2.1). Det punktet vi lander på, er et rasjonalt tall i intervallet (a, b) (det er rasjonalt fordi det er på formen k/m der $k \in \mathbb{Z}$).



Figur 2.2.1.

La oss skrive ut denne ideen litt mer formelt. La k være det minste hele tallet slik at k/m er større enn a (at en slik k finnes, følger fra Arkimedes' prinsipp). Vi skal vise at k/m er et rasjonalt tall i intervallet (a, b) . Siden k/m opplagt er rasjonalt, og k/m per definisjon er større enn a , så er det nok å vise at k/m er mindre enn b . Det er her vi bruker at $1/m$ er mindre enn $(b - a)$. Siden vi også vet at $(k - 1)/m$ er mindre enn eller lik a , får vi nemlig

$$\frac{k}{m} = \frac{k-1}{m} + \frac{1}{m} < a + (b - a) = b.$$

Vi har dermed funnet et rasjonalt tall k/m i intervallet (a, b) .

Neste oppgave er å finne et *irrasjonalt* tall i det samme intervallet. La $c = k/m$ være det rasjonale tallet vi nettopp fant. Ideen er å addere til c et irrasjonalt tall som

er så lite at vi fortsatt befinner oss i intervallet vårt (husk at summen av et rasjonalt og et irrasjonalt tall er irrasjonalt). Ifølge Arkimedes' prinsipp (ii) kan vi finne et naturlig tall p slik at $1/p < (b - c)/\sqrt{2}$. Snur vi litt om på denne ulikheten, ser vi at $c + \sqrt{2}/p < b$. Altså ligger $c + \sqrt{2}/p$ i intervallet (a, b) , og ved hjelp av korollar 2.2.2 ser vi lett at $c + \sqrt{2}/p$ er irrasjonalt (resonner som i eksempel 2.2.5). Dermed er setningen bevist. ■

Bemerkning

Bruker man desimalfremstillingen av de reelle tallene, kan man vise første del av setningen ovenfor på en annen måte. Det er greiest å forstå ideen fra et eksempel: Anta at $a = 2.346743\dots$ og at $b = 2.346812\dots$. Da vil $c = 2.3468$ være et rasjonalt tall i intervallet (a, b) (c er rasjonalt siden $2.3468 = 23\,468/10\,000$). Samme idé fungerer for ethvert intervall.

La oss se på et eksempel som illustrerer hvorfor det er nyttig å vite at de rasjonale tallene ligger tett.

2.2.8 Eksempel

I dette eksemplet skal vi skissere hvordan man kan konstruere eksponentialfunksjonene $f(x) = a^x$ ($a > 0$), og se litt på hva dette har med teorien ovenfor å gjøre. Siden tanken er å illustrere en generell idé (og vi forutsetter at eksponentialfunksjonene er kjent fra før av), skal vi ikke gå igjennom konstruksjonen i detalj, men holde oss til hovedprinsippene.

Alle vet hvordan vi definerer a^m når eksponenten m er et naturlig tall; vi setter rett og slett

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ ganger}}$$

Fra denne definisjonen er det lett å utlede en del regneregler som gjelder for potenser med eksponenter fra \mathbb{N} , for eksempel

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}. \quad (3)$$

Når vi utvider definisjonen til å gjelde for mer generelle eksponenter, ønsker vi å bevare disse regnereglene. Det betyr at a^0 må være lik 1 siden

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m$$

og at a^{-m} må være lik $1/a^m$, siden

$$a^{-m} \cdot a^m = a^{-m+m} = a^0 = 1.$$

For rasjonale eksponenter $m = p/q$ ser vi at vi ifølge (3) må ha

$$(a^{p/q})^q = a^p$$

som medfører at $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.

På denne måten får vi definert a^r for alle rasjonale tall r ved å insistere på at reglene (2) og (3) skal gjelde generelt. Men hvordan skal vi få definert a^x for irrasjonale tall x ? Nå må vi bruke et annet knep; vi sier at a^x skal være grenseverdien av a^r når r nærmer seg x (men på en slik måte at r alltid er rasjonal). Her gjør vi stilltiende bruk av at de rasjonale tallene ligger tett. Gjorde de ikke det, kunne det jo tenkes at x lå midt inne i et intervall som bare bestod av irrasjonale punkter, og da kunne vi ikke la r nærme seg x mens den hele tiden holdt seg rasjonal.

Med litt arbeid kan man vise at denne prosedyren virkelig fører frem, og at vi får en funksjon $f(x) = a^x$ som er definert for alle reelle tall x , og som tilfredsstiller regnereglene

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$. ■

La oss til slutt filosofere litt over det vi gjorde mot slutten av dette eksemplet. Vi startet med en funksjon som hadde en naturlig definisjon for alle *rasjonale* x -verdier og ønsket så å utvide den til alle *reelle* x -verdier. Siden de rasjonale tallene ligger tett, kunne vi gjøre dette ved å ta grenseverdier, eller – som matematikere ofte sier – «vi utvidet ved kontinuitet». Dette er en meget alminnelig fremgangsmåte i matematikken, og ikke bare i forbindelse med rasjonale og irrasjonale tall. Også i mange andre sammenhenger gjennomfører vi våre konstruksjoner eller bevis først for en «tett»klasse av spesielt enkle objekter, og så utvider vi ved kontinuitet til de mer generelle objektene vi egentlig er interessert i.

Oppgaver i seksjon 2.2

1. Vis disse likhetene. Begynn med det første uttrykket og regn deg frem til det andre.

a) $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

b) $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

e) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

f) $\sqrt{12} + 2 - \frac{4}{\sqrt{3}-1} = 0$

2. Vis at tallene er rasjonale:

a) $\frac{42}{5}$

b) $7 + \frac{3}{13}$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

3. Avgjør om tallene er rasjonale eller irrasjonale:

a) $\frac{7/3}{28/5}$

b) $\frac{2 - 7\sqrt{2}}{4}$

c) $3\sqrt{2} - 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\right)$

d) $\frac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$

e) $\frac{3 + \sqrt{2}}{12 + 4\sqrt{2}}$

4. Bevis alle delene av setning 2.2.1.

5. Avgjør om utsagnene er sanne eller gale. Bevis de som er sanne, og finn moteksempler til de gale.

- Summen av to irrasjonale tall er alltid irrasjonal.
- Hvis a er irrasjonal, så er $-a$ det også.
- Hvis a^2 er rasjonal, så er a det også.
- Hvis a^2 er irrasjonal, så er a det også.
- Hvis a er irrasjonal, så er $1/a$ det også (vi antar selvfølgelig at $a \neq 0$).

6. Bevis alle delene av korollar 2.2.2.

7. Bevis at $\sqrt{3}$ er irrasjonal.

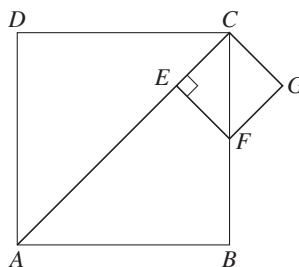
8. I denne oppgaven skal vi se på et annet bevis for at $\sqrt{2}$ er irrasjonal (eller kanskje det er riktigere å si at vi ser på en annen versjon av det samme beviset?). Anta for motsigelse at $\sqrt{2} = a/b$ der a og b er naturlige tall. La $a = p_1 p_2 \dots p_n$ og $b = q_1 q_2 \dots q_m$ være primtallsfaktoriseringene.

- Forklar hvorfor $2q_1 q_1 q_2 q_2 \dots q_m q_m = p_1 p_1 p_2 p_2 \dots p_n p_n$.
- Forklar hvorfor det ikke kan være det samme antall 2-tall i produktene på høyre og venstre side av likhetstegnet i a).
- Bruk aritmetikkens fundamentalteorem til å utlede en selvmotsigelse.

9. Bruk ideen fra forrige oppgave til å vise at dersom $n \in \mathbb{N}$ ikke er et kvadrattall, så er \sqrt{n} irrasjonal.

10. a) Vis at $\log_{10} 2$ er irrasjonal. (Husk at $\log_a b$ er det tallet x slik at $a^x = b$. Hvis $\log_{10} 2 = m/n$, er altså $10^{m/n} = 2$, dvs. $10^m = 2^n$.)
- b) For hvilke hele tall b er $\log_{10} b$ rasjonal?
- c) Kan du formulere og bevise et kriterium for når $\log_a b$ er rasjonal (vi forutsetter at a og b er naturlige tall, $a > 1$)?
11. Vis at dersom $\cos x$ er irrasjonal, så er $\cos(x/2)$ og $\sin(x/2)$ det også. (Hint: $\cos 2v = 2 \cos^2 v - 1 = 1 - 2 \sin^2 v$.) Er påstanden fortsatt sann dersom du bytter ut $\cos x$ med $\sin x$?
12. Vis at $\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$. Bruk dette til å vise at dersom $\tan x$ er irrasjonal, så er $\tan(x/2)$ det også.
13. Anta at $a > 0$. Vis at uansett hvor stor $b \in \mathbb{R}$ er, så finnes det en $n \in \mathbb{N}$ slik at $na > b$.
14. a) Anta at $a > 1$. Vis at uansett hvor stor $b \in \mathbb{R}$ er, så finnes det en $n \in \mathbb{N}$ slik at $a^n > b$. (Hint: Kombiner Bernoullis ulikhet 1.2.4 med Arkimedes' prinsipp.)
- b) Anta at $0 < a < 1$. Vis at uansett hvor liten $b > 0$ er, så finnes det en $n \in \mathbb{N}$ slik at $a^n < b$.
15. Anta at s og t er to rasjonale tall som ikke begge er 0. Vis at $s\sqrt{2} + t\sqrt{3}$ er irrasjonal.
16. To linjestykker kalles *kommensurable* dersom det finnes et tredje linjestykke som går opp et helt antall ganger i begge to. Hvis ikke kalles de *inkommensurable*.
- a) Vis at to linjestykker med lengde s og t er kommensurable hvis og bare hvis det finnes et rasjonalt tall r slik at $s = rt$.
- b) Anta at vi kan vise at siden og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable. Forklar hvorfor vi da har bevist at $\sqrt{2}$ er irrasjonal.

Resten av denne oppgaven skal vi bruke til å vise at siden og diagonalen i et kvadrat faktisk er inkommensurable. Vi antar for motsigelse at l er et linjestykke som går opp i både siden og diagonalen. Vi tegner opp kvadratet som vist på figuren, og setter av punktet E slik at AE er lik siden i kvadratet.



- c) Vis at l går opp i EC .
- d) Vis at linjestykkene EF , EC og FB er like lange.

- e) Vis at l går opp i FC .
- f) Forklar at l nå går opp i både siden og diagonalen til et mindre kvadrat $EFGC$.
- g) Ved å gjenta konstruksjonen ovenfor på det nye kvadratet $EFGC$, ser du at l også må gå opp i siden og diagonalen til et enda mindre kvadrat, og så videre. Forklar hvorfor dette leder til en selvmotsigelse. Konkluder med at siden og diagonalen i det opprinnelige kvadratet er inkommensurable.

17. En mengde A kalles *tellbar* dersom det finnes en opptelling

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

der hvert element i A er med minst én gang.

- a) Vis at \mathbb{N} er tellbar.
- b) Vis at \mathbb{Z} er tellbar.
- c) Vis at mengden av alle rasjonale tall i intervallet $(0, 1)$ er tellbar. (*Hint*: $1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, \dots$)
- d) Vi skal vise at intervallet $(0, 1)$ ikke er tellbart. Anta for motsigelse at det er tellbart, og la

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

være en opptelling av alle elementene. Skriver vi ut disse tallene på desimalform, får vi

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\dots b_{1n}\dots \\ a_2 &= 0.b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}\dots b_{2n}\dots \\ a_3 &= 0.b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}\dots b_{3n}\dots \\ a_4 &= 0.b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}\dots b_{4n}\dots \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= 0.b_{n1}b_{n2}b_{n3}b_{n4}\dots b_{nn}\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

der b_{11} er første desimal i a_1 , b_{12} er andre desimal, og så videre. Vi lager nå et nytt desimaltall $c = 0, c_1c_2c_3 \dots c_n \dots$ på denne måten.

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{hvis } b_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{hvis } b_{nn} = 1 \end{cases}$$

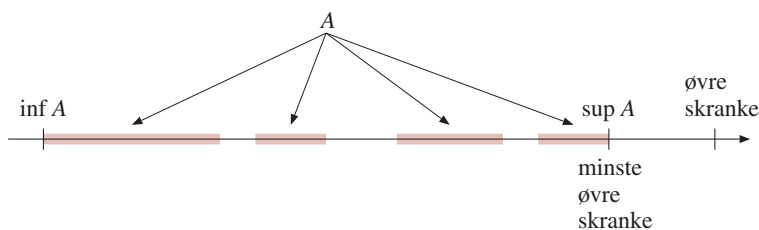
Vis at c er forskjellig fra alle tallene $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$. Hvorfor betyr dette at intervallet $(0, 1)$ ikke er tellbart? (Dette argumentet kalles *Cantors diagonalargument* etter den tyske matematikeren Georg Cantor (1845–1918).)

- e) Bruk c) og d) til å vise at det finnes irrasjonale tall.
- f) Kan du bruke en variant av Cantors diagonalargument til å vise at mengden av alle delmengder av \mathbb{N} ikke er tellbar?

2.3 Kompletthet av de reelle tallene

I forrige seksjon så vi at $\sqrt{2}$ ikke er et rasjonalt tall. Det betyr at dersom vi insisterer på bare å regne med rasjonale tall, kan vi hverken løse annengradsligningen $x^2 - 2 = 0$ eller finne diagonalen i et kvadrat med side én, siden begge disse problemene har $\sqrt{2}$ som løsning. Dette er en helt uholdbar situasjon og viser at de rasjonale tallene er et altfor fattig tallsystem til at vi kan basere vår teori på dem alene. Men hvordan vet vi at vi ikke vil støte på tilsvarende ubehageligheter med de reelle tallene? Finnes det et prinsipp som garanterer at de tallene vi trenger for å løse våre ligninger og geometriske problemer, virkelig finnes i \mathbb{R} ? Svaret er ja – det finnes noe som kalles *kompletthetsprinsippet*, og som viser seg å være et usedvanlig kraftig redskap til å påvise eksistensen av reelle tall med ønskede egenskaper. I denne seksjonen skal vi formulere dette prinsippet og gi et eksempel på hvordan det brukes. Men den fulle kraften i kompletthetsprinsippet blir nok ikke synlig før senere i boken der vi skal bruke det om og om igjen til å trylle frem de tallene vi trenger.

Før vi kan formulere kompletthetsprinsippet, trenger vi noen definisjoner. En delmengde A av \mathbb{R} kaller vi *oppad begrenset*, dersom det finnes et tall b som er større enn eller lik alle elementene i A . Et slikt tall b kalles en *øvre skranke* for A . Vi sier at b er den *minste øvre skranken* til A , dersom b er mindre enn alle andre øvre skranke (se figur 2.3.1).



Figur 2.3.1.

2.3.1 Eksempel (i) Hvis $A = (0, 1)$, så er 2 en øvre skranke for A . Den minste øvre skranken er 1.

(ii) Mengden \mathbb{N} av naturlige tall er ikke oppad begrenset siden det ikke finnes noe reelt tall som er større enn alle naturlige tall (husk Arkimedes' prinsipp 2.2.6).



Hvis b er den minste øvre skranken til A , sier vi også at b er *supremum* til A , og skriver:

$$b = \sup A.$$

Et naturlig spørsmål er om $\sup A$ vil være et element i A eller ikke. Svaret avhenger av hvilken mengde A vi ser på – i noen tilfeller er $\sup A$ med i A , i andre tilfeller er den det ikke. To enkle eksempler får vi ved å se på intervallene $(0, 1)$ og $[0, 1]$; dersom $A = (0, 1)$, så er $\sup A (= 1)$ ikke med i mengden A , men dersom $A = [0, 1]$, så er $\sup A (= 1)$ med i A .

Vi har tilsvarende definisjoner i den nedre enden av A . Hvis det finnes et tall c som er mindre enn eller lik alle elementer i A , så sier vi at A er *nedad begrenset* og kaller c en *nedre skranke* for A . Dersom c er større enn alle andre nedre skranker, så kaller vi c den største nedre skranken til A . Den største nedre skranken kalles også infimum til A , og vi skriver:

$$c = \inf A.$$

Vi har nå den terminologien vi trenger for å formulere vårt prinsipp.

2.3.2 Kompletthetsprinsippet Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde A av \mathbb{R} har en minste øvre skranke.

Det er flere måter å betrakte kompletthetsprinsippet på, alt etter hva slags synsvinkel man har på de reelle tallene. Tenker vi på \mathbb{R} som mengden av alle desimaltall, kan vi overbevise oss om at prinsippet holder ved hjelp av følgende resonnement: La A være en begrenset delmengde av \mathbb{R} , og la oss – for å gjøre det hele litt konkret – si at 126.3 er en øvre skranke for A . Vi tar nå for oss alle tallene i A , stryker alle desimalene og spør hva som er det største av de hele tallene vi da står igjen med. Dette tallet kan umulig være større enn 126, og sannsynligvis er det mindre, siden vi ikke vet om 126.3 er en *minste* øvre skranke. La oss si at det største hele tallet er 78. Vi ser nå på alle de tallene i A som begynner på 78, og spør hva som er den største førstedesimalen blant disse tallene. Hvis den er 3, ser vi deretter på alle tall i A som begynner på 78.3, og spør hva som er den største andredesimalen blant disse tallene. La oss si at den er 9; da ser vi neste gang på alle tallene i A som begynner på 78.39, og spør hva som er den største tredjedesimalen blant disse tallene, og så videre. Det er lett å overbevise seg om at det uendelige desimaltallet 78.39... som fremkommer på denne måten, er den minste øvre skranken til A . Legg også merke til at argumentet ikke avhenger av de spesielle tallene 126.3 og 78 osv. som vi valgte, men fungerer helt generelt.

Kompletthetsprinsippet forteller oss altså at minste øvre skranker finnes, men hva med største nedre skranker – trenger vi ikke et prinsipp for dem også? Egentlig ikke, siden deres eksistens lett kan utledes fra eksistensen av de øvre skrankene.

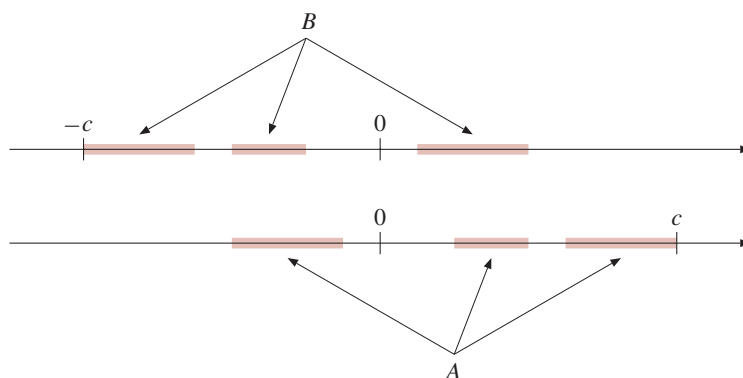
2.3.3 Setning

Enhver ikke-tom, nedad begrenset delmengde B av \mathbb{R} har en største nedre skranke.

Bevis: La A være speilbildet av B om origo (se figur 2.3.2):

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -x \in B \}.$$

Da er A oppad begrenset og har – ifølge kompletthetsprinsippet – en minste øvre skranke c . Det er lett å sjekke at $-c$ da er den største nedre skranken til B (gjør det!). ■



Figur 2.3.2.

På det nåværende stadium er det sikkert vanskelig å forstå at komplementhetsprinsippet skal være slikt et enestående redskap til å produsere tall med ønskede egenskaper. Litt mer sannsynlig blir det kanskje hvis vi ser på et eksempel. Siden vi vet at $\sqrt{2}$ ikke er et rasjonalt tall, er det naturlig å spørre hvordan vi vet at det finnes et *reelt* tall som er kvadratroten til 2. Selvfølgelig har alle regnet med tallet $\sqrt{2}$ i skolematematikken, men det er nok ikke så mange som har sett et fullstendig bevis for at det virkelig finnes!

2.3.4 Eksempel

Vi skal altså vise at $\sqrt{2}$ er et reelt tall. Mer presist betyr det at vi må vise at det finnes et positivt reelt tall a slik at $a^2 = 2$. La oss se på mengden

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 < 2\}.$$

Siden $1 \in A$, er A ikke-tom, og det er lett å sjekke at 2 er en øvre skranke for A . Ifølge komplementhetsprinsippet har A da en minste øvre skranke a . Det er intuitivt rimelig at $a^2 = 2$ (hva skulle det ellers være?), og vi skal bevise dette i detalj. Før vi begynner, observerer vi at a må være mindre enn eller lik 2, siden 2 er en øvre skranke for A .

Tanken bak beviset er å sjekke at de to antagelsene $a^2 < 2$ og $a^2 > 2$ begge fører til selvmodsigelser, og at $a^2 = 2$ derfor er den eneste muligheten. Ideen er enkel: Dersom $a^2 < 2$, konstruerer vi et tall $x > a$ slik at $x^2 < 2$, noe som strider mot at a er en øvre skranke for A . Hvis derimot $a^2 > 2$, så finner vi et tall $y < a$ slik at $y^2 > 2$, noe som strider mot at a er *minste* øvre skranke til A . Selv om ideen er enkel, er gjennomføringen litt kronglete, men her er den i alle fall:

Anta først at $a^2 < 2$; da må $a^2 = 2 - c$ for et eller annet positivt tall c . Hvis vi lar $x = a + c/8$, så er

$$x^2 = \left(a + \frac{c}{8}\right)^2 = a^2 + \frac{ac}{4} + \frac{c^2}{64}.$$

La oss se litt på de to siste leddene i dette uttrykket. Siden $a \leq 2$, så er $ac/4 \leq c/2$. Dessuten er $c^2/64 < c/2$ (for hvis ikke måtte $c \geq 32$, og det er opplagt ikke tilfelle). Dermed får vi

$$x^2 < a^2 + \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = a^2 + c = 2.$$

Vi har altså funnet et tall $x > a$ slik at $x^2 < 2$, og det strider mot at a er en øvre skranke for A .

La oss istedet se hva som skjer om vi antar at $a^2 > 2$. Da finnes det en $d > 0$ slik at $a^2 = 2 + d$. Lar vi nå $y = a - d/4$, får vi

$$y^2 = \left(a - \frac{d}{4}\right)^2 = a^2 - \frac{ad}{2} + \frac{d^2}{16}.$$

Siden $a \leq 2$, må $ad/2 \leq d$. Dessuten er $d^2/16 > 0$, så vi får

$$y^2 > a^2 - d + 0 = 2.$$

Vi har dermed funnet et tall $y < a$ slik at y er en øvre skranke for A , og det strider mot antagelsen om at a er den *minste* øvre skranken til A .

Dermed er den eneste mulige konklusjonen at $a^2 = 2$, og beviset er ferdig. ■

Eksemplet ovenfor viser hvordan vi vanligvis bruker kompletthetsprinsippet til å bevise at et tall med visse egenskaper eksisterer; vi beskriver rett og slett det tallet vi ønsker oss som minste øvre skranke (eventuelt største nedre skranke) til en mengde. Det som kan virke litt foruroligende, er at selv i vårt enkle eksempel var det temmelig innviklet å sjekke at den minste øvre skranken virkelig hadde den egenskapen vi ønsket oss (nemlig at $a^2 = 2$). Trøsten får være at vi etter hvert skal utvikle teknikker som gjør at slike argumenter blir mye enklere å gjennomføre.

La oss helt til slutt i denne seksjonen se hva som ville ha skjedd med kompletthetsprinsippet dersom vi bare hadde arbeidet med rasjonale tall. En naturlig formulering av prinsippet ville da være å si at enhver begrenset delmengde A av \mathbb{Q} har en minste øvre, *rasjonal* skranke r ; altså at det finnes et rasjonalt tall r som er en øvre skranke for A og som er mindre enn alle andre øvre, *rasjonale* skranke. Dette kan umulig være riktig, for var det sant, kunne vi ha brukt argumentet i eksempel 2.3.4 til å vise at $\sqrt{2}$ er et rasjonalt tall.

Hva betyr så dette? Jo, det betyr at det er et «hull» i den rasjonale tallinjen der $\sqrt{2}$ skulle vært – det er ikke noe rasjonalt tall som markerer den øvre enden av den rasjonale mengden

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x^2 < 2\}.$$

I den reelle tallinjen er det imidlertid ikke noen slike «hull» – ifølge kompletthetsprinsippet er det alltid et reelt tall som markerer hvor en mengde av reelle tall slutter. Foreløpig er kanskje denne språkbruken mer forvirrende enn hjelpsom, men vi skal etter hvert kunne gi ganske presis mening til den intuitive ideen om at den rasjonale tallinjen er full av «hull».

Oppgaver i seksjon 2.3

1. Er disse mengdene oppad og/eller nedad begrenset?

- a) $(1, 9)$
- b) \mathbb{N}
- c) \mathbb{Z}
- d) \mathbb{Q}

- e) $\{x \mid e^x < 5\}$
- f) $(-\infty, 6)$
- g) $\{x \mid \sin x < 1/2\}$

2. Er disse mengdene oppad begrenset?

- a) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- b) $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- c) $\{1/n \mid n \in \mathbb{R}, n \neq 0\}$

3. Finn minste øvre skranke og største nedre skranke (hvis de finnes) til disse mengdene:

- a) $(-1, 2]$
- b) \mathbb{N}
- c) $\{x \mid |x - 3| < 6\}$
- d) $\{x \mid -2 < \ln x \leq 3\}$
- e) $\{x \mid x^2 < 3\}$

4. Skriv ut detaljene i beviset for setning 2.3.3.

5. Anta at A og B er ikke-tomme, begrensede mengder. Er følgende utsagn sanne eller gale?

- a) « $\sup(A \cup B)$ er lik maksimum av $\sup A$ og $\sup B$ ».
- b) « $\sup(A \cap B)$ er lik minimum av $\sup A$ og $\sup B$ ».
- c) « $\inf(A \cup B)$ er lik minimum av $\inf A$ og $\inf B$ ».
- d) « $\inf(A \cap B)$ er lik maksimum av $\inf A$ og $\inf B$ ».

6. La A og B være to ikke-tomme, begrensede mengder. Vi definerer en ny mengde $A + B$ ved

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

- a) Vis at $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
- b) Vis at $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

7. Hvis A er en ikke-tom, begrenset mengde og c er et tall, definerer vi

$$cA = \{ca \mid a \in A\}.$$

- a) Vis at dersom $c \geq 0$, så er $\sup(cA) = c \cdot \sup A$ og $\inf(cA) = c \cdot \inf A$.
- b) Hva er $\sup(cA)$ og $\inf(cA)$ dersom c er negativ?

8. Vis at Arkimedes' prinsipp 2.2.6 er en konsekvens av kompletthetsprinsippet. (*Hint*: Se på mengden $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq a\}$.)

2.4 En beskrivelse av de reelle tallene

Hittil har vi ikke vært særlig presise i vår beskrivelse av de reelle tallene – vi har rett og slett tenkt på dem som alle tallene på tallinjen eller som alle desimaltallene. For våre formål er egentlig disse beskrivelsene gode nok; alt vi trenger å vite om \mathbb{R} , er de regnereglene vi kjenner fra skolematematikken, pluss det vi har gjennomgått tidligere i dette kapitlet. Av og til kan det likevel være nyttig å vite at det går an å gi en enkel beskrivelse av de reelle tallene simpelthen ved å skrive ned en kombinasjon av egenskaper som \mathbb{R} har, men som ingen andre tallsystemer har. Disse egenskapene kaller vi *aksiomer*, og i vår formulering er det elleve stykker av dem. Det kan være lurt først å lese raskt gjennom disse påstandene og overbevise seg om at de stemmer. (Mange av aksiomene har tradisjonelle navn som vi har ført opp i parentes, men det er ingen grunn til at du skal pugge dem.)

Vi begynner med seks aksiomer som beskriver de algebraiske operasjonene $+$ og \cdot samt forholdet mellom dem:

Aksiom 1 (kommutative lover): For alle $x, y \in \mathbb{R}$ er $x + y = y + x$ og $xy = yx$.

Dette aksiomet sier at rekkefølgen av tallene som vi adderer og multipliserer, ikke spiller noen rolle. Det ser kanskje selvfølgelig ut, men husk at det finnes operasjoner som ikke er kommutative. Du har kanskje vært borti vektorproduktet der $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x})$.

Aksiom 2 (assosiative lover): For alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ er $(x + y) + z = x + (y + z)$ og $(xy)z = x(yz)$.

Husk at vi utfører operasjonene inne i parentesene først. Første del av dette aksiomet sier derfor at når vi skal legge sammen tre tall x , y og z , får vi det samme svaret om vi først legger sammen x og y og så adderer z , eller om vi først adderer y og z , og så legger svaret til x .

Aksiom 3 (distributiv lov): For alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ er $x(y + z) = xy + xz$.

Dette aksiomet forteller oss hvordan vi kan multiplisere en faktor inn i en parentes (eller, lest baklengs, hvordan vi kan sette en felles faktor utenfor).

Aksiom 4 (null- og enhetselement): Det finnes to elementer 0 og 1 i \mathbb{R} slik at $x + 0 = x$ og $x \cdot 1 = x$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Dette aksiomet forsikrer oss bare at 0 og 1 finnes.

Aksiom 5 (motsatte tall): For ethvert tall $x \in \mathbb{R}$ finnes det et tall $y \in \mathbb{R}$ slik at $x + y = 0$.

Dermed vet vi at til ethvert tall x finnes det et motsatt tall $-x$.

Aksiom 6 (inverse tall): For ethvert tall $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, finnes det et tall $z \in \mathbb{R}$ slik at $xz = 1$.

Dette aksiomet forteller oss at til ethvert tall x bortsett fra 0, finnes det et inverst tall x^{-1} .

Vi er nå ferdige med de rent algebraiske aksiomene. De neste fire aksiomene handler om ordningsrelasjonen $<$ og dens forbindelse med de algebraiske operasjonene.

Aksiom 7 (transitivitet): Dersom $x, y, z \in \mathbb{R}$ og $x < y$ og $y < z$, så er $x < z$.

Dette er en grunnleggende egenskap ved alle ordninger.

Aksiom 8 (totalitet): Dersom $x, y \in \mathbb{R}$, så gjelder én av følgende tre muligheter: $x < y$, $x = y$ eller $x > y$.

Dette aksiomet sier at størrelsen på to reelle tall alltid kan sammenlignes; er de ikke like, må ett av dem være større enn det andre.

Aksiom 9: Hvis $x, y, z \in \mathbb{R}$ og $x < y$, så er $x + z < y + z$.

Dette og det neste aksiomet knytter sammen ordningsrelasjonen og de algebraiske operasjonene, og gir oss de regnereglene vi trenger for å løse ulikheter.

Aksiom 10: Hvis $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ og $z > 0$, så er $xz < yz$.

Disse ti aksiomene gir opplagt en sann beskrivelse av de reelle tallene, men de gir også en sann beskrivelse av andre tallsystemer; bytter vi for eksempel systematisk ut symbolet \mathbb{R} med \mathbb{Q} , står vi igjen med ti sanne utsagn om de rasjonale tallene (kontroller!). Får vi besøk av et vesen fra en annen planet og ønsker å forklare henne hvilket tallsystem vi bruker på jorden, er det derfor ikke nok å si at vi bruker ett som oppfyller de ti aksiomene ovenfor – hun kan jo ikke da vite om vi mener de reelle tallene eller de rasjonale tallene eller kanskje et tredje tallsystem som også oppfyller aksiomene (det finnes flere). Denne situasjonen endrer seg når vi legger til vårt siste aksiom:

Aksiom 11 (kompletthetsprinsippet): Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde av \mathbb{R} har en minste øvre skranke i \mathbb{R} .

Vi så i forrige avsnitt at kompletthetsprinsippet ikke gjelder for \mathbb{Q} . Det viser seg at det heller ikke gjelder for noen av de andre tallsystemene som oppfyller de ti første aksiomene – bortsett fra \mathbb{R} . Til sammen gir altså de elleve aksiomene våre en entydig beskrivelse av \mathbb{R} , og hvis vi ønsker å forklare hva de reelle tallene er til en person med en helt annen bakgrunn enn vår, er dette kanskje den raskeste måten å gjøre det på. Nå virker det kanskje som om denne forklaringen ikke er særlig informativ – det er da mange nyttige egenskaper ved de reelle tallene som ikke er tatt med blant aksiomene våre? Jo da, det er utvilsomt riktig, men det viser seg faktisk at alt vi vet om de reelle tallene, kan utledes fra disse elleve aksiomene hvis man bare har litt tålmodighet (og dyktighet)! En slik utledning er en ganske langtekkelig og omstendelig affære, og vi skal slett ikke gi oss i kast med den her, men som en smakebit for de spesielt interesserte finnes det til slutt i denne seksjonen noen eksempler og oppgaver som antyder hvordan den kan gjennomføres.

At alle egenskaper ved de reelle tallene kan utledes fra aksiomene våre, har også en annen viktig konsekvens. Siden kompletthetsprinsippet er det eneste aksiomet som

ikke er oppfylt av \mathbb{Q} , er dette i bunn og grunn det eneste redskapet vi har til behandling av reelle tall som vi ikke like godt kan bruke på de rasjonale. Denne observasjonen kan vi benytte til å teste hvor viktig kompletthetsprinsippet er for våre undersøkelser: Dersom vi har bevist et resultat for de reelle tallene og det tilsvarende resultatet for rasjonale tall ikke er riktig, så må vi ha gjort essensiell bruk av kompletthetsprinsippet underveis. Vi skal av og til benytte oss av denne teknikken for å understreke hvilken sentral rolle kompletthetsprinsippet spiller i teorien vår.

La oss helt til slutt i dette avsnittet vise noen eksempler på hvordan vi kan utlede kjente egenskaper ved de reelle tallene fra aksiomene ovenfor. All erfaring viser at dette er vanskelig stoff, så både eksemplene og oppgavene i denne seksjonen må nok regnes å være for «spesielt interesserte». På den annen side – får man først taket på dette, kan det faktisk være ganske gøy.

2.4.1 Eksempel

a) Vis at dersom $x + z = y + z$, så er $x = y$ (dette kalles ofte *forkortingsloven for addisjon*). Ifølge aksiom 5 finnes det et tall u slik at $z + u = 0$. Siden $x + z = y + z$, må også $(x + z) + u = (y + z) + u$. Ved aksiom 2 får vi dermed at $x + (z + u) = y + (z + u)$, og siden $z + u = 0$, betyr dette at $x + 0 = y + 0$. Ifølge aksiom 4 er dette det samme som at $x = y$, og vi er ferdige.

Det finnes også en annen variant av forkortingsloven som sier at hvis $z + x = z + y$, så er $x = y$. På grunn av aksiom 1 følger denne varianten umiddelbart fra den vi nettopp har vist.

b) Vis at $x \cdot 0 = 0$. Hvis vi først observerer at

$$x + 0 \stackrel{4}{=} x \stackrel{4}{=} x \cdot 1 \stackrel{4}{=} x \cdot (1 + 0) \stackrel{3}{=} x \cdot 1 + x \cdot 0 \stackrel{4}{=} x + x \cdot 0$$

(tallene over likhetsteegnene viser hvilke aksiomer vi bruker), så kan vi bruke a) til å konkludere med at $0 = x \cdot 0$.

c) Vis at for hver $x \in \mathbb{R}$ finnes det nøyaktig et tall y slik at $x + y = 0$. Fra aksiom 5 vet vi at det finnes minst ett slikt tall y . Anta at z er et annet tall med den samme egenskapen. Da har vi $x + y = x + z$, og ifølge forkortingsloven i a) må da $y = z$.

Det entydig bestemte tallet y slik at $x + y = 0$, skal vi heretter betegne med $-x$ (av og til vil vi skrive $(-x)$ for å øke lesbarheten).

d) Vis at $-(-x) = x$. Per definisjon er $-(-x)$ det entydig bestemte tallet slik at $-x + [-(-x)] = 0$. Kan vi vise at x har den samme egenskapen, så må derfor $x = -(-x)$. Men siden $-x + x = x + (-x) = 0$ på grunn av aksiom 1 og definisjonen av $-x$, så er dette faktisk tilfelle.

e) Vis at $(-x)y = -(xy)$. Per definisjon er $-(xy)$ det eneste tallet slik at $xy + [-(xy)] = 0$. På den annen side er

$$xy + (-x)y \stackrel{1}{=} yx + y(-x) \stackrel{3}{=} y[x + (-x)] \stackrel{c)}{=} y \cdot 0 \stackrel{b)}{=} 0,$$

og følgelig må $-(xy) = (-x)y$.

f) Vis at $(-x)(-y) = xy$. Vi har

$$(-x)(-y) \stackrel{e)}{=} -[x(-y)] \stackrel{1)}{=} -[(-y)x] \stackrel{e)}{=} -[-(yx)] \stackrel{d)}{=} yx \stackrel{1)}{=} xy.$$

g) Vis at $-y < -x$ medfører $x < y$. Vi har

$$\begin{aligned} -y < -x &\stackrel{9)}{\implies} -y + y < -x + y \stackrel{c),1)}{\implies} 0 < y + (-x) \stackrel{9)}{\implies} 0 + x \\ &< [y + (-x)] + x \stackrel{1,2)}{\implies} x + 0 < y + [(-x) + x] \stackrel{d)}{\implies} x + 0 < y + 0 \stackrel{4)}{\implies} x < y. \end{aligned}$$

h) Vis at dersom $x < 0$, så er $-x > 0$. Dette ville følge fra d) og g) dersom vi bare visste at $-0 = 0$. Men det er lett å vise: Per definisjon er -0 det eneste tallet slik at $0 + (-0) = 0$. Ifølge aksiom 4 er $0 + 0 = 0$, og dermed må $-0 = 0$.

i) Vis at dersom $x < y$ og $z < 0$, så er $xz > yz$. Siden $z < 0$, vet vi fra h) at $-z > 0$. Ifølge aksiom 10 er da

$$x(-z) < y(-z)$$

og ifølge e) betyr dette at $-(xz) < -(yz)$. Men da kan vi bruke g) til å konkludere med at

$$xz > yz.$$



Oppgaver i seksjon 2.4

1. Vis at om vi erstatter \mathbb{R} med \mathbb{Q} , så gjelder fortsatt de 10 første aksiomene.
2. La $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Vis at de ti første aksiomene ovenfor holder om vi bytter ut \mathbb{R} med A . Holder kompletthetsaksiomet også?

I oppgavene nedenfor skal du bevise en del velkjente egenskaper ved de reelle tallene. Du har imidlertid bare lov til å bygge på aksiomene og resultatene i eksempel 2.4.1.

3. Definer $a^2 = a \cdot a$. Vis at $a^2 \geq 0$ for alle a .
4. Definer 2 ved $2 = 1 + 1$. Vis at $a + a = 2a$.
5. Vis at $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
6. a) Vis at dersom $xu = xv$ og $x \neq 0$, så er $u = v$.
b) Vis at dersom $x \neq 0$ og $y \neq 0$, så er $xy \neq 0$.
c) Vis at det til hver $x \neq 0$ bare finnes ett inverst tall z som beskrevet i aksiom 6. Vi skal kalle dette tallet x^{-1} .
d) Vis at $(x^{-1})^{-1} = x$.
e) Vis at $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

f) Definer $\frac{x}{y} = xy^{-1}$. Vis at $\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{v}\right) = \frac{xy}{zv}$.

g) Vis at $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$.

h) Vis at $\frac{x/y}{z/w} = \frac{xw}{yz}$.

i) Vis at $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw + zy}{yw}$.

2.5 Historisk epistel: Fremveksten av de reelle tallene

Was beweisbar ist, soll in der
Wissenschaft nicht ohne Beweis
geglaubt werden.

— Richard Dedekind (1831–1916),
Was sind und was sollen die Zahlen

De naturlige tallene var kjent i førhistorisk tid, og både egypterne, babylonerne, inderne og kineserne kunne regne med brøker. Annerledes var det med negative tall – selv om både inderne og kineserne tidlig tok dem i bruk, fikk de ikke gjennomslag i vår del av verden før på 15–1600-tallet. På omtrent samme tid kom desimalbrøkene som i Europa ble innført av den nederlandske matematikeren Simon Stevin (1548–1620).

Vi er så vant til desimalbrøker at vi kanskje synes det er merkelig at de kom så sent, men vi må huske på at helt til 1200-tallet var romertallene enerådende i Europa. Det tallsystemet vi bruker i dag, ble utviklet i India og kom til Europa gjennom araberne. Selv om romertallene var ubrukelige til regning (man brukte regnebrett til utregningene og skrev bare ned svaret), møtte de nye tallene bastant motstand, og det tok flere hundre år før de var alminnelig akseptert.

Den aller første gangen vi møter indisk-arabiske tall i Europa er i skriftene til Gerbert av Aurillac (945–1003) som i 999 ble pave under navnet Sylvester II. Selv om Gerbert brukte den arabiske skrivemåten, hadde han ikke fattet de regnemessige mulighetene som lå i det nye tallsystemet. De første systematiske lærebøkene kom på 1200-tallet, og i disse er de nye regneteknikkene gjerne kalt *algorismer* – en forvanskning av navnet til den arabiske matematikeren al-Khwarizmi (ca. 780–850). De mest kjente er Leonardo Fibonaccis *Liber Abaci* fra 1202, Alexander de Villa Deis *Carmen de Algorismo* fra rett etter 1200, og Johannis de Sacroboscus *Algorismus Vulgaris* fra 1230. Selv om det er *Liber Abaci* som har overlevd i matematikkhistorien, var det de to andre som fikk størst utbredelse innledningsvis. Selv til Norden spredde disse verkene seg forbausende raskt, og i *Hauksbok* som ble skrevet av den islandsk-norske stormannen Hauk Erlendsson (ca. 1265–1334) og hans sekretærer rundt år 1300, finner vi et langt avsnitt med tittel Algorismus. Teksten ser ut til i hovedsak å være hentet fra *Carmen de Algorismo* (se Brun [2]).

Mens europeerne brukte det indiske tallsystemet til å regne med hele tall, var araberne i full gang med å utforske desimalbrøkene. Vi møter dem første gang hos al-Uqlidisi i 952, men den første systematiske behandlingen finner vi hos al-Samawal (ca. 1125–1180), og sin endelige form fikk teorien av al-Kashi (død 1429). Al-Samawal

og al-Kashi er interessante fordi de viser noe av den nasjonale og geografiske spredningen blant matematikerne i den arabiske verden.

Al-Samawal var født i Bagdad av jødiske foreldre som hadde innvandret fra Marokko. Han skrev sitt viktigste matematiske verk da han var 19, og konsentrerte seg senere hovedsakelig om medisin. Han skrev en samling erotiske historier som fortsatt finnes, og førti år gammel konverterte han til Islam. For å begrunne og forsvare dette skrittet skrev han en selvbiografi som fortsatt er berømt og beryktet for sine angrep på jødedommen.

Al-Kashi var født i Iran, og etter noen år som omreisende lærd, kom han under beskyttelse av tatarfyrsten Ulug Beg (1394–1449 – Ulug Beg er egentlig hans tittel, men det har blitt hengende ved ham som et egennavn). Ulug Beg var selv en betydelig astronom, og han grunnla både et universitet og et observatorium i sin hovedstad Samarkand. Al-Kashi er blant annet berømt for å ha beregnet sin 1° med forbløffende nøyaktighet – hans verdi tilsvarer 0.017452406437283571! Ulug Beg brukte denne verdien til å lage sinus- og tangenstabeller for hvert eneste minutt fra 0° til 90° (se Berggren for flere detaljer [1]).

De arabiske verkene om desimalbrøker ble aldri oversatt til europeiske språk, og Simon Stevins gjenoppgivelse var en selvstendig forskerbragd. Den ble begjærlig mottatt – på denne tiden hadde man et stort behov for tabeller til blant annet astronomi og navigasjon, og for dem trengte man et effektivt notasjons- og regnesystem. Den største ulempen med desimalbrøker er at de er tungvinne å multiplisere og dividere (prøv å dividere to tall med seks desimaler for hånd), men på begynnelsen av 1600-tallet utviklet den skotske adelsmannen John Napier (1550–1617) og sveitseren Jost Bürgi (1552–1632) en løsning på dette problemet – logaritmene. Ved hjelp av logaritmer kan multiplikasjon erstattes med addisjon og divisjon med subtraksjon. (Her er ideen: Anta at du har en tabell over logaritmene til forskjellige tall. Hvis du ønsker å regne ut produktet av tallene a og b , slår du opp logaritmen til a og logaritmen til b , og legger sammen disse to tallene. Siden $\log a + \log b = \log(ab)$, har du nå regnet ut hva logaritmen til ab er. Ved å bruke tabellen baklengs finner du ab . Denne metoden ble undervist i norske skoler til lommeregneren kom for alvor midt på 1970-tallet. Edwards [6] gir en god beskrivelse av Napiers oppdagelse av logaritmene.)

Desimalbrøkene og logaritmene revolusjonerte den praktiske tallregningen, men etter som tiden gikk og differensial- og integralregningen vokste frem, viste det seg at desimaltallene i seg selv ikke ga et tilstrekkelig teoretisk fundament for den nye matematikken. På slutten av 1700-tallet dukket det opp stadig flere problemer knyttet til tall- og funksjonsbegrepet, og en storstilt opprydning begynte. Den tok tid, og først på 1870-tallet hadde man en skikkelig forståelse av hva de reelle tallene er. Spesielt tok det tid å forstå kompletthet. Som vi skal se flere eksempler på i denne boken, kan kompletthetsprinsippet brukes til å løse svært ulike problemer, og det tok mye arbeid å utkrystallisere et enkelt begrep med så stor slagkraft.

Det er flere måter å nærme seg de reelle tallene på. En måte er den vi antydte i seksjon 2.4 – vi skriver opp en liste av egenskaper som de reelle tallene har, og baserer vår argumentasjon på disse egenskapene. Denne angrepsmåten har en svakhet; den garanterer ikke at det virkelig finnes et tallsystem som har denne kombinasjonen av egenskaper. For å være på den sikre siden må vi konstruere et slikt tallsystem. Mye av arbeidet i forrige århundre bestod nettopp av slike konstruksjoner.

Vi skal se raskt på tre forskjellige konstruksjoner. Den meste naturlige er kanskje den som Karl Weierstrass (1815–1897) skal ha brukt i sine innflytelsesrike foreles-

ninger i Berlin. Han foretok rett og slett en grundig, logisk analyse av uendelige desimalbrøker og viste at de hadde alle de egenskapene man ønsket seg. De to andre konstruksjonsmetodene har en litt annen grunnidé. Her starter man med de rasjonale tallene, og utvider dem til man får et rikere tallsystem som oppfyller kompletthetsprinsippet. Måten denne utvidelsen blir gjennomført på, er forskjellig i de to metodene; Richard Dedekind (1831–1916) baserte seg på delmengder av de rasjonale tallene (såkalte dedekind-snitt), mens Charles Meray (1835–1911), Georg Cantor (1845–1918), Ernst Kossak (1839–1902) og Eduard Heine (1821–1881) brukte følger. Siden det var Dedekind som trengte dypst inn i materien, skal vi se nærmere på hans ideer.

Richard Dedekind var født i Braunschweig i Tyskland i 1831. Han var student av Gauss, og etter at han hadde avlagt sin doktorgrad i 1854, fikk han en stilling ved den polytekniske høyskolen i Zürich. Dedekind forteller selv at hans interesse for det reelle tallsystemet våknet da han første gang skulle undervise et begynnerkurs i matematisk analyse. Han kikket på mange forskjellige fremstillinger, men fant ingen som oppfylte hans krav til matematisk stringens. Nærmest for å tilfredsstille seg selv utarbeidet han i 1858 en teori som han først i 1871 publiserte i en artikkel – *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

Dedekind innfører her det som senere har blitt hetende *dedekindske snitt* – det er rett og slett et par (A, B) av delmengder av \mathbb{Q} slik at $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$ og alle elementene i A er mindre enn alle elementene i B . Ideen er at hvert snitt definerer et reelt tall – for eksempel vil snittet

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 < 2\} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 > 2\}$$

definere $\sqrt[3]{2}$. Dedekind forklarer hvordan slike snitt kan multipliseres, adderes og sammenlignes slik at de oppfyller alle aksiomene for reelle tall. I et senere verk – *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888) – gikk han enda grundigere til verks; han startet med en definisjon av naturlige tall og bygde systematisk opp de hele, rasjonale og reelle tallene fra dette utgangspunktet. Et sammendrag av Dedekinds ideer med utdrag fra hans skrifter finner du i [11].

Dedekind ga også viktige bidrag til algebraen der han sammen med Ernst Kummer (1810–1893) og Leopold Kronecker (1823–1891) bygde opp en teori for idealer. Denne utviklingen nådde et høydepunkt med Emmy Noether og hennes skole i Göttingen i første halvdel av vårt århundre.

Amalie Emmy Noether (1882–1935) ble født i Erlangen i Tyskland. Hennes far, Max Noether (1844–1921), var en kjent matematiker, og også den yngre broren Fritz valgte en matematisk karriere. Emmy utdannet seg først til lærerinne i engelsk og fransk, men da hun forsøkte å gå videre, møtte hun stadig nye hindringer. Hun var først hospitant ved universitetene i Erlangen og Göttingen i fire år fordi kvinner ikke hadde rett til immatrikulering, men i 1904 ble reglene endret, og hun ble opptatt som vanlig student. Etter at hun avla sin doktorgrad i 1908, arbeidet hun i flere år uten lønn ved Universitetet i Erlangen. I 1915 ble hun hentet til Universitetet i Göttingen for å fylle tomrommet etter de unge, mannlige assistentene som hadde dratt i krigen.

Under ledelse av Felix Klein (1849–1925) og David Hilbert (1862–1943) var Göttingen på denne tiden verdens matematiske midtpunkt, men selv her møtte Noether problemer. I 1917 fremla hun sin «habilitation» (en slags doktorgrad nummer to som var nøkkelen til faste akademiske stillinger), men søknaden ble avslått fordi reglementet tilsa at bare menn kunne habiliteres. Hilbert la all sin prestisje i å oppnå et unntak, men til ingen nytte; hans kolleger ved andre fag syntes forferdet ved tanken på å få en

kvinne i fakultetssenatet. Hilbert fant dette ubegripelig – fakultetssenatet var da ingen badstue, så han – men hans argumenter nådde ikke frem. Løsningen ble at Hilbert annonserte forelesningene i sitt eget navn, men at Emmy Noether holdt dem. I 1919 ble reglene forandret slik at hun fikk sin habilitation, men en fast betalt stilling oppnådde hun først i 1923, og professor i Göttingen ble hun aldri.

Emmy Noether var ingen stor foreleser, men hun var en fremragende lærer på en annen måte – takket være sin brede innsikt og sin faglige generøsitet kunne hun inspirere og veilede sine doktorgradsstudenter som få andre. Det kom studenter til henne fra alle verdenshjørner, og hun fikk en enorm innflytelse på den neste generasjonen av algebraikere. Selv om hun startet sin karriere som regnemester innenfor det som kalles invariantteori, var det etter hvert den abstrakte teoribyggingen som ble hennes styrke.

Da Hitler overtok makten i 1933, begynte utrenskningen av jødiske matematikere. Emmy Noether var ikke bare jøde, hun var kvinne og sosialist i tillegg. Hun skaffet seg raskt en stilling ved det tradisjonsrike kvinnelcolleget Bryn Mawr i USA, og i løpet av kort tid bygde hun der opp en gruppe med talentfulle, kvinnelige matematikere. Før alle i gruppen hadde fullført sin doktorgrad, døde Emmy Noether uventet etter en operasjon våren 1935. (Dick har skrevet en lettlest biografi av Emmy Noether [4], og du finner også mer opplysninger om henne i [8]. Miljøet i Göttingen kan du lese om i [9].)

Det var først med ideene til Dedekind og hans samtidige at vi fikk en fullverdig teori for de reelle tallene. Over 2000 år tidligere hadde imidlertid grekerne utviklet en teori som løste mange av de samme problemene. Som vanlig i gresk matematikk dreide det seg om linjestykker og ikke tall.

I utgangspunktet baserte grekerne sin geometri på det vi kaller *kommensurable* linjestykker. Gitt to linjestykker, tenkte de seg at det alltid ville finnes et lite, tredje linjestykke som gikk opp et helt antall ganger i begge de to opprinnelige. På denne forutsetningen bygde de blant annet proporsjonalitetslæren for likeformede trekkanter. Det kom som et sjokk da den pythagoreiske skolen rundt 430 f. Kr. oppdaget at det fantes inkommensurable linjestykker. Selve oppdagelsen er så omkranset av myter at det er umulig å vite hva som egentlig skjedde, men de har enten oppdaget at siden og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable (dette svarer til at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt, se oppgave 2.2.16), eller at siden og diagonalen i en regulær femkant er det.

Oppdagelsen av inkommensurable linjestykker la grekernes logiske byggverk i grus. Men tragedien ble fort snudd til triumf; Eudoxos (ca. 400–ca. 350 f. Kr.) reiste et nytt byggverk der proporsjonalitetslæren ble utvidet til også å gjelde inkommensurable linjestykker. Nøkkelen til Eudoxos' konstruksjon er ideen om at inkommensurable linjestykker kan tilnærmes med kommensurable – en variant av vår observasjon om at de rasjonale tallene ligger tett. For å gjennomføre denne ideen måtte han imidlertid konstruere en teori for forhold mellom alle typer linjestykker (inkommensurable så vel som kommensurable), og det gjorde han med en imponerende logisk presisjon. Selv om Eudoxos' teori ikke tar opp alle de aspekter man må drøfte når man skal konstruere et tallsystem, er den fullverdig for sitt formål, og den overgår alt annet som ble skapt før Dedekind. Dessverre er Eudoxos' egen fremstilling av teorien gått tapt, men hos Euklid utgjør den det logiske høydepunktet.

I tillegg til at den ikke tar opp alle regneoperasjoner, er det én vesentlig ting som skiller grekernes teori for forhold fra den moderne teorien for reelle tall. Mens vi godtar irrasjonale tall på lik linje med de rasjonale, skjelnet grekerne strengt mellom

de linjestykkene som var kommensurable med enheten, og de som ikke var det. De første ble kalt tall, mens de andre fikk nøye seg med å være «størrelser». Grekerne godtok størrelsene bare som svar; det ville ikke falle dem inn å starte et problem med et linjestykke som hadde lengde $\sqrt{2}$. Dette skillet mellom tall og størrelser var ufruktbart, og hadde nok mye av skylden for at Eudoxos' teori etter hvert ble skjøvet i bakgrunnen.

Ønsker du å vite mer om reelle tall, er Nivens bok [7] et utmerket sted å starte – den har et interessant og utradisjonelt stoffvalg, og den er skrevet for lesere som ikke er vant til å lese matematikk på egen hånd. Dedekinds konstruksjon finner du en rekke steder, blant annet i Rudins bok [10]. (Du finner også en skisse i Øksendals hefte [12].) Boken til Courant og Robbins [3] gir en ganske utfyllende skisse av tallsystemenes oppbygning. En meget interessant, men mer avansert bok om tallsystemer er [5]. Informasjon om Eudoxos og hans forholdslære finner du i alle generelle matematikkhistorier, og der finner du også beretningen om tallsystemenes utvikling og desimalbrøkene.

Litteratur

- [1] Berggren, J.L.: *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [2] Brun, Viggo: *Regnekunsten i det gamle Norge*, Universitetsforlaget, Oslo, 1962.
- [3] Courant, R. og H. Robbins: *What is Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1978.
- [4] Dick, A.: *Emmy Noether, 1882–1935*, Birkhäuser, Basel, 1981.
- [5] Ebbinghaus, H. et al.: *Numbers*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [6] Edwards, C.H.: *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [7] Niven, Ivan: *Reelle tall*, Cappelen, Oslo, 1967. (Det kan være lettere å finne den engelske originalen: *Numbers. Rational and Irrational*, The Mathematical Association of America, New York, 1961.)
- [8] Osen, Lynn M.: *Women in Mathematics*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1974.
- [9] Reid, Constance: *Hilbert*, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [10] Rudin, Walter: *Principles of Mathematical Analysis*, MacGraw Hill, New York, 1976.
- [11] Wolff, Peter: *Breakthroughs in Mathematics*, Plume Books, New York, 1970.
- [12] Øksendal, Bernt: *Tall og tallsystem*, Temahefte 1 i matematikk, Gyldendal, Oslo, 1991.

3 Komplekse tall

I et slikt regnestykke har vi til å begynne med helt alminnelige tall, som kan stå for meter eller kilo eller noe annet konkret, og i hvert fall er virkelige tall. På slutten av regnestykket har vi det samme. Men de er bundet sammen med noe som slett ikke eksisterer. Er ikke det akkurat som en bro som bare består av et brohode på hver side, men som man allikevel går over like trygt som om den var hel? For meg er det noe svimlende ved en slik måte å regne på; som om det fører meg et stykke på vei mot Gud vet hva. Men det som jeg virkelig synes er uhyggelig, er den kraften som ligger skjult i et slikt regnestykke og holder en så fast at en tross alt kommer velberget i land.

— Robert Musil (1881–1942), *Unge Törless*

Det finnes ikke noe reelt tall x slik at $x^2 = -1$; uansett om x er positiv eller negativ, så vil jo x^2 være positiv og kan umulig være lik det negative tallet -1 . Sagt på en annen måte: Vi kan ikke ta kvadratroten til et negativt tall.

Selv om dette er en vel innterpet regel fra skolematematikken, er det en sannhet med store modifikasjoner. Riktignok finnes det ikke noe *reelt* tall som er kvadratroten til -1 , men det går an å konstruere et større tallsystem som inneholder slike kvadratrøtter. Disse nye tallene kalles *komplekse tall*, og de er temaet for dette kapitlet.

Men hva i all verden er vitsen med å konstruere et enda større og mer uoversiktlig tallsystem bare for å kunne trekke kvadratrøtter av negative tall? Kan ikke disse tallene få lov til å slippe å ha kvadratrøtter hvis de så inderlig gjerne vil? Sannheten er at det i matematikkhistorien gang på gang har meldt seg et behov for å kunne regne med kvadratrøtter til negative tall. Ofte har disse behovene vært av praktisk karakter – det kan for eksempel hende at en regneprosedyre som hittil har virket utmerket, plutselig bryter sammen på et nytt eksempel fordi den befaler oss å ta kvadratroten til et negativt tall. I mange tilfeller viser det seg til og med at dersom vi later som om vi kan ta kvadratroten til det negative tallet, og bare regner videre som prosedyren befaler, så

vil disse kvadratrøttene etter hvert falle bort, og vi står igjen med et meningsfullt og riktig svar. Før vi går løs på den systematiske fremstillingen av teorien for komplekse tall, skal vi se litt nærmere på et slikt historisk eksempel.

Den første gangen man støtte på behovet for å regne med komplekse tall, var da de italienske matematikerne Scipione del Ferro (1465–1526), Niccolo Tartaglia (1499–1557), Girolamo Cardano (1501–76) og Ludovico Ferrari (1522–65) begynte å løse tredje- og fjerdegradsligninger. Allerede for fire tusen år siden kunne babylonerne løse annengradsligninger, men del Ferro var den første som løste en generell klasse av tredjegradslikninger! Cardano visste for eksempel at tredjegradslikningen

$$x^3 - px - q = 0$$

der p og q er positive, har nøyaktig én positiv løsning, og han utledet en formel for den:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}.$$

Denne formelen fungerer utmerket i mange tilfeller, men prøver vi å bruke den på ligningen

$$x^3 - 15x - 4 = 0,$$

skjer det noe merkelig. Ved innsetning i ligningen ser vi at den positive roten må være $x = 4$, men Cardanos formel gir oss i stedet det merkelig uttrykket

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}. \quad (1)$$

Denne formelen er ikke bare komplisert, men den inneholder den «forbudte»kvadrat-roten $\sqrt{-121}$. Raffaello Bombelli (1526–1572) viste imidlertid at (1) ikke er så absurd som den kan se ut til ved første øyekast. Ved å regne med kvadratrøtter til negative tall etter de samme regnereglene som vi bruker for vanlige kvadratrøtter, kom han frem til at

$$\sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} = \sqrt{-1} + 2 \quad (2)$$

og

$$\sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2} = \sqrt{-1} - 2. \quad (3)$$

Setter vi dette inn i (1), faller de negative kvadratrøttene mot hverandre, og vi sitter igjen med

$$x = (\sqrt{-1} + 2) - (\sqrt{-1} - 2) = 4,$$

akkurat som vi ønsket oss!

Bombellis beregninger (og andre eksempler av samme type) viser at dersom vi kan finne en fornuftig tolkning av kvadratrøttene til negative tall, så kan vi bruke Cardanos formel til å løse problemer som den ellers ikke egner seg til.

Etter hvert kom det for en dag at dette var et generelt fenomen. Det fantes en rekke problemer som man lett kunne løse ved å anta at negative tall hadde kvadratrøtter, men som det slett ikke var så lett å få has på med andre midler. På seksten- og syttenhundretallet ble det derfor en akseptert praksis at man kunne bruke slike kvadratrøtter til å løse matematiske problemer, men det var nok mange som hadde samvittighetskvaler ved å gjøre det. Hvordan i all verden kunne man være sikker på at svaret var

riktig når man hadde regnet med ikke-eksisterende tall i utledningen? Tenk hvis man en dag regnet med disse ikke-eksisterende størrelsene på to forskjellige måter og fikk to forskjellige svar! Denne frykten ble man ikke kvitt før i 1797 da den norsk-danske landmåleren og matematikeren Caspar Wessel (1745–1818) viste at det slett ikke var noe mystisk ved de komplekse tallene. Riktignok er det ikke plass til dem på tallinjen, men vi kan på en enkel og naturlig måte tenke på dem som vektorer i planet.

I dette kapitlet skal vi stort sett følge den historiske utviklingen. Først skal vi se hvilke regneregler vi kommer frem til dersom vi regner med kvadratrøtter til negative tall på samme måte som med vanlige kvadratrøtter, og deretter skal vi studere Caspar Wessels geometriske tolkning av de komplekse tallene. Men før vi går i gang med den systematiske fremstillingen, kan det være morsomt nok en gang å gå tilbake til eksemplet vårt og se hvordan Bombelli regnet for å komme frem til (2). (Dersom du ikke synes at dette høres så morsomt ut, kan du godt hoppe over disse regningene.)

For å forenkle notasjonen skal vi skrive i istedenfor $\sqrt{-1}$. Vi begynner med å opphøye høyresiden av (2) i tredje potens (husk binomialformelen):

$$(i + 2)^3 = i^3 + 3 \cdot i^2 \cdot 2 + 3 \cdot i \cdot 2^2 + 2^3 = i^3 + 6i^2 + 12i + 8.$$

Bruker vi nå at $i^2 = -1$, får vi

$$(i + 2)^3 = -i - 6 + 12i + 8 = 11i + 2.$$

Etter vanlige regneregler for rottegn er $11i = 11\sqrt{-1} = \sqrt{-11^2} = \sqrt{-121}$, som betyr at

$$(i + 2)^3 = \sqrt{-121} + 2.$$

Starter vi nå med venstresiden til (2), får vi at

$$\sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} = \sqrt[3]{(i + 2)^3} = i + 2 = \sqrt{-1} + 2,$$

som er akkurat det vi skulle vise. Formel (3) kan utledes på helt tilsvarende måte. Selv om disse regningene ser besnærende ut, er det grunn til nok en gang å understreke at de foreløpig er helt meningsløse; vi vet jo ikke hva kvadratrotten til et negativt tall er – eller om den i det hele tatt finnes!

3.1 Regneregler for komplekse tall

La oss anta at det finnes et «tall» i slik at $i^2 = -1$ og se hva slags regneregler det fører til. Vi skal regne med uttrykk på formen

$$z = a + ib$$

der a og b er reelle tall, og vi skal kalle en slik z for et *komplekst tall*. Det reelle tallet a vil vi kalle *realdelen* til z og betegne med

$$a = \operatorname{Re}(z).$$

Det reelle tallet b kaller vi *imaginærdelen* til z og skriver

$$b = \operatorname{Im}(z).$$

Mengden av alle komplekse tall kaller vi \mathbb{C} .

Dersom imaginærdelen b er lik 0, så blir $z = a + i0 = a$, som altså er et reelt tall. Dette betyr at de reelle tallene er inkludert i de komplekse. Lar vi realdelen a være 0, får vi tall på formen $z = 0 + ib = ib$. Disse tallene kalles *imaginære*. Legg merke til at dersom vi kvadrerer et imaginært tall $z = ib$, så får vi det negative tallet $-b^2$. Det er denne egenskapen som har gitt opphav til den underlige betegnelsen «imaginær». Siden det var opplest og vedtatt at et kvadrat ikke kunne være negativt, anså tidligere tiders matematikere de imaginære tallene som rene fantasifostre – nyttige, kanskje, men ikke desto mindre ren innbilning. Som vi skal se i neste seksjon, viser det seg at de imaginære tallene er like virkelige og like lite innbilte som de reelle tallene.

Anta nå at vi ønsker å legge sammen to komplekse tall $z = a + ib$ og $w = c + id$. Dersom vanlige regneregler gjelder, så skulle vi få

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

som er et nytt komplekst tall med realdel $a + c$ og imaginærdel $b + d$.

3.1.1 Eksempel

Finn summen av de to komplekse tallene $z = -3 + 7i$ og $w = 9 + 2i$.

Vi får

$$z + w = (-3 + 7i) + (9 + 2i) = (-3 + 9) + (7 + 2)i = 6 + 9i.$$



Subtraksjon kan behandles på samme måte som addisjon:

$$z - w = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d).$$

Multiplikasjon er litt mer spennende. Siden $i^2 = -1$, får vi

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + ib) \cdot (c + id) = ac + aid + ibc + i^2bd = ac + iad + ibc - bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Produktet av $a + ib$ og $c + id$ blir altså et komplekst tall med realdel $ac - bd$ og imaginærdel $ad + bc$.

3.1.2 Eksempel

Regn ut produktet av $z = 4 - 5i$ og $w = -2 + 7i$.

Istedenfor å pugge den generelle produktformelen ovenfor, lønner det seg å multiplisere ut uttrykket på vanlig måte. Vi får da

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (4 - 5i) \cdot (-2 + 7i) = 4(-2) + 4 \cdot 7i + (-5i)(-2) + (-5i)7i \\ &= -8 + 28i + 10i - 35i^2 = -8 + 28i + 10i + 35 = 27 + 38i. \end{aligned}$$



La oss til slutt se om det er mulig å dele ett komplekst tall med et annet; med andre ord om vi kan gi mening til brøken

$$\frac{z}{w} = \frac{a + ib}{c + id}$$

der $w \neq 0$. Her må vi bruke et lite triks. Vi multipliserer teller og nevner med $c - id$ og får

$$\frac{z}{w} = \frac{(a + ib) \cdot (c - id)}{(c + id) \cdot (c - id)} = \frac{ac - aid + ibc + bd}{c^2 - cid + idc + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Dette viser at z/w er et komplekst tall med realdel $\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$ og imaginærdel $\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$.

3.1.3 Eksempel

Regn ut $\frac{2 - i}{4 + 3i}$. Følger vi prosedyren ovenfor, får vi

$$\frac{2 - i}{4 + 3i} = \frac{(2 - i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{5 - 10i}{25} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$



Tallet $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}$ kalles den *inverse* til z og betegnes med z^{-1} . Ifølge regningene ovenfor er

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Det er lett å kontrollere at $zz^{-1} = 1$, slik vi ville vente. (Gjør det!)

La oss oppsummere regnereglene vi har kommet frem til.

3.1.4 Regneregler for komplekse tall Dersom $z = a + ib$ og $w = c + id$ er to komplekse tall, så er

(i) $z + w = (a + c) + i(b + d)$

(ii) $z - w = (a - c) + i(b - d)$

(iii) $z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$

(iv) $\frac{z}{w} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \quad (w \neq 0)$

(v) $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (z \neq 0)$

Som allerede antydnet, lønner det seg neppe å lære de tre siste regnereglene utenat – det er mye lettere å huske fremgangsmåten vi brukte for å regne dem ut.

Det finnes en viktig regneoperasjon for komplekse tall som ikke har noen motsvarighet blant de reelle tallene. Dersom $z = a + ib$ er et komplekst tall, kaller vi $a - ib$ det *konjugerte* tallet til z og betegner det med \bar{z} . Dersom $z = -3 + 7i$ og $w = 4 - 8i$, er altså $\bar{z} = -3 - 7i$ og $\bar{w} = 4 + 8i$. Legg merke til at den konjugerte til et reelt tall $z = a = a + i0$ er lik z selv.

3.1.5 Regneregler for konjugasjon

Hvis z og w er komplekse tall, så er

$$(i) \quad \bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$$

$$(ii) \quad \bar{z} - \bar{w} = \overline{z - w}$$

$$(iii) \quad \bar{z} \bar{w} = \overline{z w}$$

$$(iv) \quad \frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} \quad (w \neq 0)$$

Det er viktig å forstå hva disse reglene sier. I (i) er venstresiden $\bar{z} + \bar{w}$ det komplekse tallet vi får om vi først konjugerer hvert av tallene z og w , og så legger sammen resultatene. Høyresiden $\overline{z + w}$ er tallet vi får om vi først legger sammen z og w , og så konjugerer resultatet. Formel (i) sier derfor at rekkefølgen av operasjonene er likegyldig; vi får det samme resultatet enten vi konjugerer først og så legger sammen, eller om vi først legger sammen og så konjugerer.

Bevisene for (i), (ii), (iii) og (iv) går på akkurat samme måte, og vi nøyer oss med å vise (iii) som et eksempel. Dersom $z = a + ib$ og $w = c + id$, så er

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - ib)(c - id) = ac - adi - bic - bd = (ac - bd) - i(ad + bc)$$

og

$$\begin{aligned} \overline{z w} &= \overline{(a + ib)(c + id)} = \overline{ac + aid + ibc - bd} = \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} \\ &= (ac - bd) - i(ad + bc). \end{aligned}$$

Siden disse uttrykkene er like, er (iii) bevist.

Én av grunnene til at konjugasjon er viktig, er at

$$z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 + i0 = a^2 + b^2$$

mangler imaginærdel, og altså er et godt, gammeldags reelt tall. Vi har allerede utnyttet denne egenskapen da vi regnet ut brøken z/w . Gjentar vi denne regningen i vår nye notasjon, ser vi nemlig at

$$\frac{z}{w} = \frac{z \bar{w}}{w \bar{w}} = \frac{z \bar{w}}{a^2 + b^2}.$$

Spesielt er

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}.$$

Helt til slutt tar vi med et eksempel på hvordan vi kan løse en ligning med komplekse tall. Strategien er enkel; vi gjør det vi ville ha gjort med en vanlig ligning!

3.1.6 Eksempel

Løs ligningen

$$iz + 4i = -(2 + i)z + 5$$

Vi begynner med å samle z -leddene på en side av likhetstegnet og de andre leddene på den andre siden:

$$(2 + 2i)z = 5 - 4i$$

Deretter deler vi på $2 + 2i$ på begge sider:

$$z = \frac{5 - 4i}{2 + 2i} = \frac{(5 - 4i)(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} = \frac{10 - 10i - 8i + 8i^2}{4 - 4i^2} = \frac{2 - 18i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{9}{4}i$$



Oppgaver i seksjon 3.1

1. Regn ut:

a) $(2 + 3i) + (5 - 6i)$

b) $(4 + 8i) - (7 - 3i)$

c) $2i + 3(4 + i)$

d) $(5 + 2i)(3 + i)$

e) $(-2 + 3i)(2 - 2i)$

f) $\frac{4 + 3i}{2 + i}$

g) $\frac{-5 + 2i}{5 - 4i}$

h) $(5 - i)^{-1}$

i) $(7 + 2i)^{-1}$

2. Regn ut:

a) $(-1 + 3i) - 1$

b) $(1 + i)(1 - i)$

c) $(1 + i)i(2 - 1)$

d) $(7 + \pi i)(\pi + i)$

e) $(1 + i)(i - 2)(i + 3)$

f) $(\sqrt{2} + i)(1 - i\sqrt{2})$

g) $\frac{2 + i}{2 - i}$

h) $\frac{2i}{\sqrt{3} - i}$

i) $4i \frac{\pi + 2i}{1 - \pi i}$

3. Regn ut:

a) $\overline{2 + 3i}$

b) $\overline{4 - 6i}$

c) $\overline{-7 - 8i}$

d) $\overline{(3 - i)(-2i)}$

e) $\overline{\left(\frac{4 - 3i}{i}\right)}$

f) $\overline{(2 - 3i) + i \frac{4 + 5i}{1 - i}}$

4. Finn real- og imaginærdelen til følgende uttrykk:

a) $2 - 3i$

b) $-3i(2 + 5i)(4 - 3i)(7 - 5i)^{-1}$

5. Løs ligningene:

a) $2iz = 3 + 4i$

b) $(1 + i)z + 3 = 1 - i$

c) $\frac{z - 2}{z + 1} = 3i$

d) $\frac{3 - 4i}{z} = \frac{2 + 3i}{z - i}$

6. Finn komplekse tall z og w slik at $z + w = 2i$, $z - w = 3 + i$.

7. Finn komplekse tall z og w slik at $z - w = 1 - i$, $z + w = 4$.

8. Bevis regnereglene for konjugasjon (3.1.5).

9. Vis at $\bar{z}w$ og $z\bar{w}$ er konjugerte.

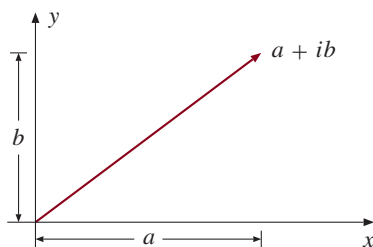
10. Anta at både $z + w$ og zw er reelle. Vis at da er enten z og w reelle eller de er konjugerte av hverandre.

3.2 Geometrisk tolkning av komplekse tall

Vi er nå i omtrent samme situasjon som matematikerne var før Caspar Wessels oppdagelse: Dersom det i en eller annen forstand er mulig å finne en kvadratrott i til -1 , og denne kvadratrotten oppfører seg regnemessig omtrent som vanlige tall, så må regnereglerne i forrige seksjon gjelde. Vi har imidlertid ingen garanti for at det finnes en slik størrelse i , og så lenge vi ikke har det, har vi heller ingen garanti for at regningene våre ikke vil føre til selvmotsigelser (f.eks. ved at vi utfører et regnestykke på to forskjellige måter og får to forskjellige svar – til tross for at vi har holdt oss til reglene).

Caspar Wessels bedrift var at han greide å tolke de meningsløse og abstrakte manipulasjonene med symboler av typen $a + ib$ som håndfaste operasjoner med konkrete, geometriske objekter. I hans tolkning er et komplekst tall ikke noe annet enn en vektor i planet, og addisjon og multiplikasjon av komplekse tall er enkle og naturlige operasjoner med vektorer. Regning med komplekse tall er derfor ikke mer mystisk eller farefullt enn vanlig vektorregning.

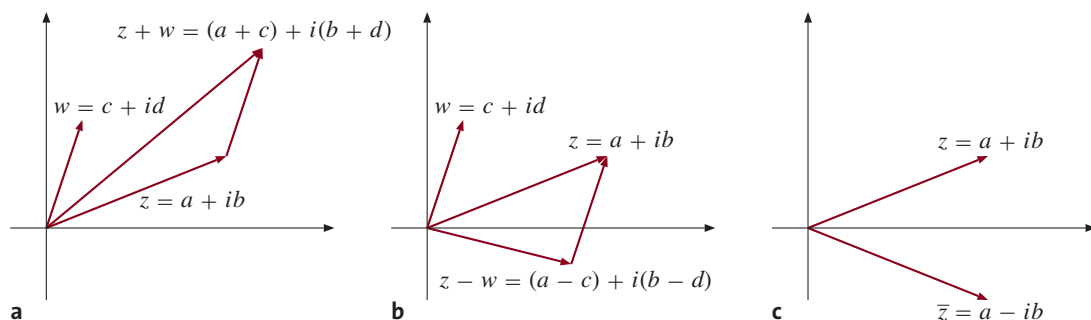
Siden vi skal tolke komplekse tall som vektorer, kan det være naturlig å si noen ord om vektorer og punkter i planet før vi begynner. Fra skolematematikken er mange vant til å skjelve strengt mellom et punkt P og den tilhørende vektoren OP som starter i origo og ender i P . De fleste lærebøker skriver for eksempel (a, b) med runde parenteser for punktet P , mens de angir vektoren OP med hakeparenteser $[a, b]$. Denne distinksjonen er logisk korrekt, og den kan sikkert være nyttig i en innlæringsfase, men i det lange løp fører den til et pedantisk dobbeltbokholderi som forvirrer langt mer enn det avklarer. Vi skal derfor følge vanlig praksis i mer avanserte matematikkbøker og la (a, b) betegne både punktet P og vektoren OP . Det vil alltid fremgå fra sammenhengen om det er naturlig å tenke på (a, b) som et punkt eller som en vektor. (Men legg merke til at dette kan veksle innenfor samme regnestykke: Blir vi først bedt om å finne ligningen for linjen som går gjennom (a, b) og er parallell med (c, d) , så er det naturlig å tenke på (a, b) som et punkt og (c, d) som en vektor, men dersom vi senere blir interessert i å finne linjen gjennom (c, d) parallell med (a, b) , så er situasjonen plutselig omvendt!)



Figur 3.2.1.

Ifølge Caspar Wessels tolkning er ikke det komplekse tallet $a + ib$ noe annet enn vektoren (a, b) . Siden vi ikke lenger skjelder mellom punkter og vektorer, betyr dette at vi skal tenke på hvert punkt i planet som et komplekst tall. De komplekse tallene utgjør altså ikke en tallinje, men et «tallplan». Legg merke til at et reelt tall $a = a + i0 = (a, 0)$ alltid vil ligge på førsteaksen, og at det derfor er naturlig å tenke på denne aksen som den gamle tallinjen. Det komplekse tallplanet er med andre ord en

utvidelse av den reelle tallinjen. Det er også verdt å legge merke til at de imaginære tallene $ib = 0 + ib$ tilsvarer punktene $(0, b)$ på y -aksen, og at den imaginære enheten i rett og slett er punktet $(0, 1)$.



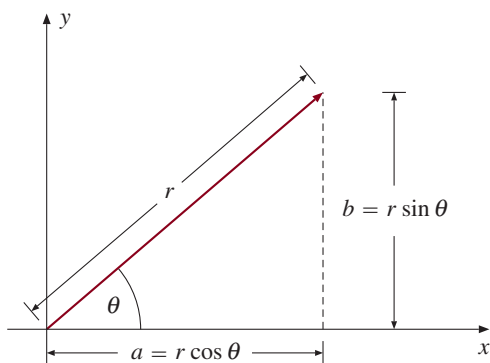
Figur 3.2.2.

Det er nå lett å se at addisjon av komplekse tall ikke er noe annet enn addisjon av vektorer; regneregelen $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ for komplekse tall, tilsvarer regneregelen $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ for vektorer (se figur 3.2.2a). Det samme gjelder for subtraksjon; regneregelen $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$ er bare den gamle regelen $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$ i ny notasjon (figur 3.2.2b). Det er også lett å tolke konjugasjon geometrisk – det konjugerte tallet $\bar{z} = a - ib$ er bare speilingen av $z = a + ib$ om førsteaksen (figur 3.2.2c).

Det gjenstår å tolke multiplikasjon geometrisk, men før vi kan gjøre det, trenger vi noen nye begreper.

Polarform

Den vanligste måten å beskrive en vektor i planet på, er å oppgi koordinatene a og b til endepunktet. Men dette er ikke den eneste måten; en annen metode er å oppgi hvor lang vektoren er og hvilken vinkel den danner med førsteaksen. Lengden r og retningen θ (se figur 3.2.3) gir en entydig beskrivelse av vektoren vår, og vi kaller ofte paret (r, θ) for vektorens *polarkoordinater*.



Figur 3.2.3.

Det er en enkel forbindelse mellom vanlige (*kartesiske*) koordinater og polarkoordinater. Fra figur 3.2.3 ser vi at

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta.$$

Tenker vi på vektoren (a, b) som det komplekse tallet $z = a + ib$, ser vi at

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta.$$

Dette kaller vi *polarformen* til z .

Ved hjelp av formlene $a = r \cos \theta$ og $b = r \sin \theta$ kan vi finne de kartesiske koordinatene a og b når vi kjenner polarkoordinatene r og θ . I den omvendte situasjonen hvor vi kjenner de kartesiske koordinatene og ønsker å finne polarkoordinatene, bruker vi isteden

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{r}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r}.$$

I utgangspunktet er det nok naturligst å tenke seg at retningsvinkelen θ ligger mellom 0 og 2π , men i praksis får vi ofte bruk for retningsvinkler som ikke ligger i første omløp. Det er viktig å merke seg at (r, θ) , $(r, \theta + 2\pi)$, $(r, \theta + 4\pi)$ osv. beskriver den samme vektoren.

Et par eksempler vil kanskje gjøre sammenhengen mellom vanlige koordinater og polarkoordinater klarere.

3.2.1 Eksempel

Et komplekst tall z har polarkoordinater $r = 6$ og $\theta = 7\pi/3$. Finn tallet.

Vi legger først merke til at $7\pi/3 = 2\pi + \pi/3$. Ifølge formlene ovenfor er

$$a = 6 \cos \frac{7\pi}{3} = 6 \cos \frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$b = 6 \sin \frac{7\pi}{3} = 6 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

så det komplekse tallet blir $z = 3 + 3\sqrt{3}i$ (lag en figur og overbevis deg om at dette er riktig). ■

3.2.2 Eksempel

Finn polarkoordinatene til det komplekse tallet $-\sqrt{3} + i$.

Lengden r er gitt ved

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

og vinkelen θ er bestemt ved

$$\cos \theta = \frac{a}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{og} \quad \sin \theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}.$$

Den eneste vinkelen i første omløp som har disse verdiene for cosinus og sinus, er $\theta = 5\pi/6$. Vi får derfor polarkoordinatene $(2, 5\pi/6)$ (tegn opp!). Legg merke til at $(2, 5\pi/6 + 2k\pi)$, der k er et helt tall, ville vært et like riktig – men kanskje mindre naturlig – svar. ■

Dersom et komplekstall $z = a + ib$ har polarkoordinater (r, θ) , så kaller vi r for *modulus* til z og θ for et *argument* til z . Modulusen kalles også for *tallverdien* eller *absoluttverdien* til z , og vi betegner den gjerne med

$$r = |z|.$$

Vi har altså

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

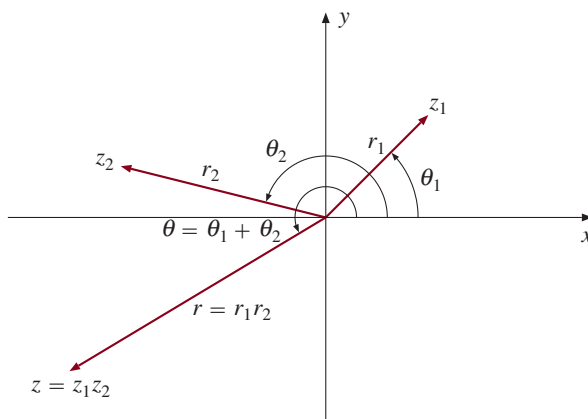
Legg merke til at et komplekstall bare har én modulus, men uendelig mange argumenter. Legg også merke til at

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z}.$$

Denne formelen er ofte svært nyttig når man arbeider med tallverdien til z .

Geometrisk tolkning av multiplikasjon

Anta nå at vi skal multiplisere sammen to komplekse tall z_1 og z_2 med polarkoordinater henholdsvis (r_1, θ_1) og (r_2, θ_2) . Wessels store oppdagelse var at da vil produktet $z_1 z_2$ ha modulus $r_1 r_2$ og argument $\theta_1 + \theta_2$. Vi multipliserer altså to komplekse tall ved å multiplisere modulusene og addere argumentene (se figur 3.2.4).



Figur 3.2.4.

La oss skrive opp dette som et teorem.

3.2.3 Teorem

La $z_1 = a_1 + ib_1$ og $z_2 = a_2 + ib_2$ være to komplekse tall, og la $z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$ være produktet av dem. Dersom z_1 har modulus r_1 og argument θ_1 , og z_2 har modulus r_2 og argument θ_2 , så vil z ha modulus $r_1 r_2$ og argument $\theta_1 + \theta_2$.

Bevis: Før vi begynner, kan det være nyttig å minne om formlene for cosinus og sinus til en sum:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2.$$

Siden $a_1 = r_1 \cos \theta_1$, $b_1 = r_1 \sin \theta_1$, $a_2 = r_2 \cos \theta_2$ og $b_2 = r_2 \sin \theta_2$, ser vi at

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &= (r_1 \cos \theta_1 r_2 \cos \theta_2 - r_1 \sin \theta_1 r_2 \sin \theta_2) \\ &\quad + i(r_1 \cos \theta_1 r_2 \sin \theta_2 + r_1 \sin \theta_1 r_2 \cos \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i r_1 r_2 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + i r_1 r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2), \end{aligned}$$

som er et komplekst tall med modulus $r_1 r_2$ og argument $\theta_1 + \theta_2$, akkurat som vi ønsket. ■

3.2.4 Eksempel

To komplekse tall er gitt på polarform ved

$$\begin{aligned} z_1 &= 8 \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) \\ z_2 &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

Finn produktet $z_1 z_2$.

Ifølge teoremet ovenfor har produktet modulus lik $8 \cdot 1/2 = 4$ og argument lik $11\pi/12 + 19\pi/12 = 30\pi/12 = 5\pi/2$. Siden $5\pi/2$ ligger i annet omløp, er det kanskje mer naturlig å bruke den ekvivalente argumentverdien $5\pi/2 - 2\pi = \pi/2$. Dermed får vi

$$z_1 z_2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 4(0 + i) = 4i.$$

Tegn opp vektorene i det komplekse planet og kontroller at dette er et rimelig svar. ■

Generelle egenskaper

I seksjon 3.1 antok vi at vi kunne regne med komplekse tall på samme måte som med reelle tall, og utledet ut fra denne antagelsen regnereglene 3.1.4. Når vi nå har vist at vi kan tolke regning med komplekse tall som fornuftige operasjoner med geometriske objekter, bør vi sjekke om denne antagelsen er riktig – er det virkelig slik at vi kan regne med komplekse tall etter de samme reglene som gjelder for reelle? For å overbevise seg om at svaret er ja, kan det være lurt å sammenligne følgende resultat med de aksiomene for reelle tall som vi stilte opp i seksjon 2.4.

3.2.5 Algebraiske egenskaper ved komplekse tall For alle komplekse tall z_1, z_2, z_3 , gjelder:

- (i) *Kommutative lover:* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ og $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- (ii) *Assosiative lover:* $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ og $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- (iii) *Distributiv lov:* $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
- (iv) *Null- og enhetselement:* $z_1 + 0 = z_1$ og $z_1 \cdot 1 = z_1$
- (v) *Motsatte tall:* For hvert komplekst tall z , finnes det et komplekst tall $-z$ slik at $z + (-z) = 0$
- (vi) *Inverse tall:* For hvert komplekst tall $z \neq 0$, finnes det et komplekst tall w slik at $zw = 1$

Bevis: Det ville bli svært kjedelig å gå igjennom alle punktene i detalj, så vi tar bare for oss noen typiske eksempler (ivrige lesere klarer sikkert de øvrige selv).

La oss skrive

$$z_j = a_j + ib_j = r_j(\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$$

for $j = 1, 2$ og 3 .

(ii) Ifølge definisjonen av addisjon er

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)] + (a_3 + ib_3) \\ &= [(a_1 + a_2) + a_3] + i[(b_1 + b_2) + b_3] \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (a_1 + ib_1) + [(a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)] \\ &= [a_1 + (a_2 + a_3)] + i[b_1 + (b_2 + b_3)] \end{aligned}$$

og siden addisjon av reelle tall er assosiativt, er disse uttrykkene like.

For å vise at multiplikasjon er assosiativ, bruker vi polarkoordinater:

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= [r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + ir_1 r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \cdot (r_3 \cos \theta_3 + ir_3 \sin \theta_3) \\ &= (r_1 r_2) r_3 \cos[(\theta_1 + \theta_2) + \theta_3] + i(r_1 r_2) r_3 \sin[(\theta_1 + \theta_2) + \theta_3]. \end{aligned}$$

Tilsvarende er

$$\begin{aligned} z_1 (z_2 z_3) &= (r_1 \cos \theta_1 + ir_1 \sin \theta_1) \cdot [r_2 r_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + ir_2 r_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \\ &= r_1 (r_2 r_3) \cos[\theta_1 + (\theta_2 + \theta_3)] + ir_1 (r_2 r_3) \sin[\theta_1 + (\theta_2 + \theta_3)] \end{aligned}$$

og siden r 'ene og θ 'ene er vanlige, reelle tall, må disse uttrykkene være like. (vi)

Anta $z = r \cos \theta + ir \sin \theta \neq 0$, og sett $w = r^{-1} \cos(-\theta) + ir^{-1} \sin(-\theta)$. Da er

$$zw = rr^{-1} \cos(\theta + (-\theta)) + irr^{-1} \sin(\theta + (-\theta)) = \cos 0 + i \sin 0 = 1.$$

(Sjekk at $w = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$ slik den burde ifølge våre resultater i forrige seksjon.) ■

For å være riktig systematiske og stringente burde vi nå gå tilbake og sjekke at egenskapene ovenfor er de vi trenger for å rettferdiggjøre regningene i forrige seksjon, men så pedantiske har vi ikke tenkt å være. Isteden skal vi avslutte denne seksjonen med å vise et par eksempler på samspillet mellom komplekse tall og geometri i planet.

3.2.6 Eksempel

Finn alle de komplekse tallene som oppfyller ulikheten

$$|z - 1| \leq |z - i|$$

(husk at $|w|$ betegner modulusen til $w = c + id$; dvs. lengden til vektoren (c, d)).

Vi skal løse dette problemet på to måter; først ved regning og så ved et geometrisk resonnement.

Hvis $z = x + iy$, så er $z - 1 = (x - 1) + iy$ og $z - i = x + i(y - 1)$. Dermed er

$$|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \quad \text{og} \quad |z - i| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2},$$

og ulikheten vår kan skrives

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}.$$

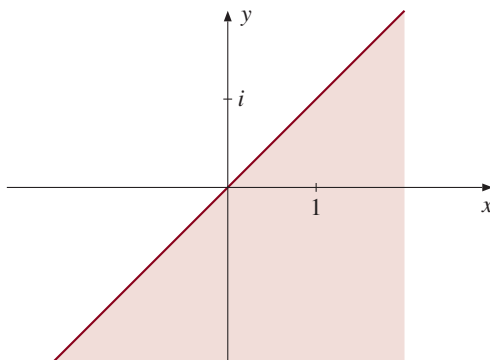
Dette er ekvivalent med

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq x^2 + (y - 1)^2,$$

og multipliserer vi ut parentesene og forkorter, får vi $-2x \leq -2y$, som er ekvivalent med

$$x \geq y.$$

Området vi er interessert i består altså av alle komplekse tall $z = x + iy$ med $x \geq y$, dvs. alle punkter under eller på linjen $y = x$ (se figur 3.2.5).



Figur 3.2.5.

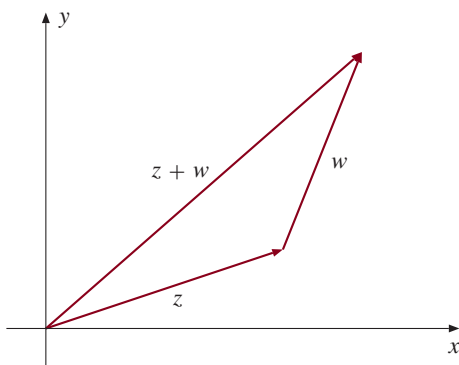
La oss nå se på en geometrisk måte å behandle det samme problemet på. Tenker vi på komplekse tall som vektorer, ser vi at $z - 1$ ikke er noe annet enn vektoren som starter i 1 og ender i z . Dermed er $|z - 1|$ ikke noe annet enn lengden til denne vektoren, som igjen er lik avstanden fra z til 1. Tilsvarende er $|z - i|$ ikke noe annet enn avstanden fra z til i . Ulikheten vår sier dermed at vi er interessert i de punktene som ligger nærmere 1 enn de ligger i (vi godtar at avstandene er like). Siden linjen $y = x$ er midtnormalen til linjestykket som forbinder 1 og i , betyr dette at punktene vi søker, er de som ligger under eller på denne linjen. ■

Den andre forbindelsen mellom komplekse tall og geometri er mer teoretisk – en kompleks versjon av trekantulikheten.

3.2.7 Trekantulikheten for komplekse tall Dersom z og w er to komplekse tall, så er

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Bevis: Av figur 3.2.6 ser vi at $|z + w|$, som er lengden til det rette linjestykket fra origo til punktet $z + w$, må være mindre enn eller lik lengden til den brudne linjen gitt ved z og w (husk at det rette linjestykket gir den korteste veien mellom to punkter). Siden den brudne linjen har lengde $|z| + |w|$, følger ulikheten. ■



Figur 3.2.6.

Det er også mulig å vise ulikheten ved regning, se oppgave 22. ■

Oppgaver i seksjon 3.2

1. Lag en figur som viser hvor tallene ligger i det komplekse planet:
 - a) $1 + i$
 - b) $1 - i$

c) $-1 + i$

d) $-1 - i$

2. Lag en figur som viser hvor tallene ligger i det komplekse planet:

a) $2 - i$

b) $\sqrt{3} - i$

c) $3 - i$

3. Finn modulusen r og argumentet θ til disse komplekse tallene:

a) i

b) $-i$

c) $1 + i$

d) -3

e) $1 + i\sqrt{3}$

4. Finn modulusen r og argumentet θ til disse komplekse tallene:

a) $2 - 2i$

b) $-1 + i\sqrt{3}$

c) $27 + 9i\sqrt{3}$

5. Skriv det komplekse tallet på formen $a + bi$ når du vet at:

a) $r = 4, \theta = \frac{\pi}{2}$

b) $r = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$

c) $r = 2, \theta = \frac{\pi}{6}$

d) $r = \frac{1}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}$

6. Skriv det komplekse tallet på formen $a + bi$ når du vet at:

a) $r = 3, \theta = -\pi$

b) $r = 2, \theta = \frac{10\pi}{3}$

c) $r = 100\sqrt{2}, \theta = \frac{103\pi}{4}$

7. Finn zw når du vet at:

$$\text{a) } z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \quad w = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$\text{b) } z = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{16} + i \sin \frac{3\pi}{16} \right), \quad w = 2 \left(\cos \frac{-7\pi}{16} + i \sin \frac{-7\pi}{16} \right)$$

$$\text{c) } z = \cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8}, \quad w = 3 \left(\cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8} \right)$$

8. Tegn det komplekse tallplanet og merk av et punkt z . Tegn deretter opp punktene $2z$, $-z$, $z/2$, iz , $-iz$ og z^2 .

9. Tegn det komplekse tallplanet og merk av to punkter z og w . Tegn deretter opp punktene $z + w$, $z - w$, $z + w/2$, $z - w/2$, $z + iw$, zw og z/w .

10. Skisser følgende områder i det komplekse planet:

$$\text{a) } \{ z : |z| = 1 \}$$

$$\text{b) } \{ z : |z - 1| < 2 \}$$

$$\text{c) } \{ z : |z - (i + 1)| \geq 1/2 \}$$

$$\text{d) } \{ z : |z - 2| < |z - i + 2| \}$$

11. Skisser følgende områder i det komplekse planet:

$$\text{a) } \{ z : 2\operatorname{Re}(z) < |z|^2 \}$$

$$\text{b) } \{ z : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)^2 \}$$

$$\text{c) } \{ z : |z| = \sqrt{5}|z - 2| \}$$

12. Vis at (vektorene tilsvarende) de to komplekse tallene z og w står normalt på hverandre hvis og bare hvis z/w er et rent imaginært tall. Når er z og w parallelle?

13. I denne oppgaven er z og w de komplekse tallene $z = 1 + i\sqrt{3}$ og $w = 1 + i$.

a) Regn ut zw og $\frac{z}{w}$.

b) Skriv z og w på polarform.

c) Bruk svarene i b) til å finne polarformen til $\frac{z}{w}$. Finn så de eksakte verdiene til $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$.

14. Vis at dersom $\operatorname{Re}(\bar{z}w) = 0$, så er $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2$. Hva betyr dette geometrisk? (Hint: Husk at $|z|^2 = z\bar{z}$ for alle komplekse tall z .)

15. Vis at $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ for alle komplekse tall z og w . Forklar at dette viser at summen av kvadratene til sidene i et parallellogram er lik summen av kvadratene til diagonalene. (Hint: Husk at $|z|^2 = z\bar{z}$ for alle komplekse tall z .)

16. (UiO) La $z \neq -1$ være et komplekst tall med $|z| = 1$.

a) Vis at $\frac{z-1}{z+1}$ er rent imaginær.

b) Hvilken kjent plangeometrisk setning er en konsekvens av a)?

17. (UiO) Gitt to komplekse tall z_1 og z_2 , $z_1 \neq z_2$.
- La L være den rette linjen i det komplekse plan som går gjennom z_1 og z_2 . Vis at et komplekst tall z ligger på L hvis og bare hvis $\frac{z - z_1}{z - z_2}$ er reell eller $z = z_2$.
 - La z_3 være midtpunktet mellom z_1 og z_2 . La C være sirkelen gjennom z_1 og z_2 med sentrum i z_3 . Vis at et komplekst tall z ligger på C hvis og bare hvis $\frac{z - z_1}{z - z_2}$ er imaginær eller $z = z_2$.
18. (UiO) Anta at $w = \frac{1 + ti}{1 - ti}$ der t er reell.
- Vis at når t varierer, så ligger w på en sirkel S i det komplekse plan.
 - Vis at argumentvinkelen θ til w er bestemt ved $\tan(\theta/2) = t$.
19. Bevis alle punktene i 3.2.5.
20. Bevis ved induksjon på n at for alle komplekse tall $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$, så er

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots + |z_n|.$$

21. Vis at $|z - w| \geq ||z| - |w||$ for alle komplekse tall z og w .

22. Her er en skisse av et bevis for trekantulikheten som ikke bruker geometriske resonnementer. Fyll ut beviset og forklar hver enkelt trinn:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

3.3 Komplekse eksponentialer og de Moivres formel

Vi vet hva e^x betyr når x er et reelt tall, men hva skal vi mene med e^z når z er kompleks? Vi starter med definisjonen selv om den kan se litt underlig ut:

3.3.1 Definisjon

Dersom $z = a + ib$ er et komplekst tall, definerer vi

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b).$$

e^z er altså et komplekst tall med modulus e^a og argument b .

Legg merke til at hvis $z = a + i0$ er et reelt tall, så er $e^z = e^a(\cos 0 + i \sin 0) = e^a$. Definisjonen stemmer altså overens med det vi er vant til når eksponenten er reell. Velger vi derimot imaginære verdier for eksponenten, skjer det uventede og fascinerende ting.

3.3.2 Eksempel

Beregn $e^{i\pi}$.

Siden $e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0(\cos \pi + i \sin \pi) = -1$, får vi

$$e^{i\pi} = -1.$$



Dette kalles ofte *Eulers identitet* etter en av de største matematikerne på syttenhundretallet, sveitseren Leonhard Euler (1707–83).

La oss ta med et eksempel til i samme gate.

3.3.3 Eksempel

Beregn $e^{i2k\pi}$, der k er et helt tall.

Vi får

$$e^{i2k\pi} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1.$$



Denne sammenhengen kommer til å være nyttig for oss i flere forbindelser.

Definisjonen av e^z kan som sagt virke underlig, men som en første indikasjon på at den tross alt er fornuftig, skal vi nå vise at den viktigste regneregelen for eksponentialfunksjoner fortsatt gjelder:

3.3.4 Setning

For alle komplekse tall z, w er

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w.$$

Bevis: Hvis $z = a + ib$ og $w = c + id$, så er $z + w = (a + c) + i(b + d)$. Dermed er

$$e^{z+w} = e^{a+c}[\cos(b+d) + i \sin(b+d)].$$

På den annen side har e^z modulus e^a og argument b , mens e^w har modulus e^c og argument d . Ifølge Teorem 3.2.3 har da $e^z \cdot e^w$ modulus $e^a \cdot e^c = e^{a+c}$ og argument $b + d$. Følgelig er

$$e^z \cdot e^w = e^{a+c}[\cos(b+d) + i \sin(b+d)],$$

og setningen er bevist. ■

Resultatet ovenfor gjelder selvfølgelig like godt om vi har flere enn to ledd i eksponenten:

$$e^{z_1+z_2+\dots+z_n} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \cdot \dots \cdot e^{z_n}.$$

Legg merke til at om $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, så betyr dette at

$$e^{nz} = (e^z)^n$$

som også er en formel vi kjenner igjen fra den reelle teorien.

Fra 3.3.1 vet vi at dersom θ er et reelt tall, så er

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Dette gjør det mulig å skrive polarformen til et komplekst tall på en mer kompakt måte:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

Denne skrivemåten er spesielt nyttig fordi den passer så godt sammen med måten vi multipliserer komplekse tall på. Dersom $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ og $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, så er

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Tilsvarende er

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

I neste seksjon skal vi bruke denne formelen til å trekke ut n -te røtter av komplekse tall, men aller først skal vi se på en berømt formel som går tilbake til Abraham de Moivre (1667–1754).

3.3.5 De Moivres formel

For alle naturlige tall n er

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Bevis:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

3.3.6 Eksempel

Uttrykk $\cos 3\theta$ og $\sin 3\theta$ ved hjelp av $\cos \theta$ og $\sin \theta$.

Bruker vi de Moivres formel for $n = 3$, får vi

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \sin 3\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta + 3i^2 \cos \theta \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta). \end{aligned}$$

Sammenligner vi realdelene og imaginærdelene til det første og det siste av disse uttrykkene, ser vi at

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

og

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta.$$

Bruker vi i tillegg formelen $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, kan vi uttrykke $\cos 3\theta$ bare ved hjelp av $\cos \theta$, og $\sin 3\theta$ bare ved hjelp av $\sin \theta$. Vi får:

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \\ &= 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta.\end{aligned}$$

■

Dette eksemplet viser at komplekse tall kan være et nyttig hjelpemiddel også i problemer som i utgangspunktet bare involverer reelle størrelser. Kombinerer vi de Moivres formel med binomialformelen (se seksjon 1.4), kan vi utvide eksemplet til å gi en generell formel for $\cos(n\theta)$ og $\sin(n\theta)$.

3.3.7 Korollar

Hvis n er et naturlig tall, så er

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots \\ \sin(n\theta) &= n \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta \\ &\quad + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - \dots\end{aligned}$$

Bevis: Ifølge de Moivres formel og binomialformelen er

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= \cos^n \theta + in \cos^{n-1} \theta \sin \theta \\ &\quad - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta - i \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta \\ &\quad + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta + i \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - \dots\end{aligned}$$

og samler vi de reelle og imaginære delene av dette uttrykket hver for seg, får vi formlene i korollaret. ■

Vi kan også bruke de Moivres formel til å regne ut høye potenser av komplekse tall:

3.3.8 Eksempel

Vi skal regne ut $(1 + i\sqrt{3})^{23}$. Dette kan selvfølgelig gjøres ved å multiplisere ut uttrykket eller ved å bruke binomialformelen, men vi kommer enklere frem ved å bruke de Moivres formel. Vi begynner med å skrive $z = 1 + i\sqrt{3}$ på polarform. Vi får

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

og

$$\cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}.$$

Siden z ligger i første kvadrant, betyr dette at $\theta = \pi/3$. Dermed er $z = 2(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))$. Ved de Moivres formel er

$$(1 + i\sqrt{3})^{23} = 2^{23}(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))^{23} = 2^{23}(\cos(23\pi/3) + i \sin(23\pi/3))$$

Vi observerer så at $\frac{23\pi}{3} = 8\pi - \frac{\pi}{3}$. Siden \cos og \sin er periodiske med periode 2π , betyr dette at $\cos(23\pi/3) = \cos(-\pi/3) = 1/2$ mens $\sin(23\pi/3) = \sin(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$. Dermed har vi

$$(1 + i\sqrt{3})^{23} = 2^{23}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{22}(1 - i\sqrt{3})$$



Helt til slutt i denne seksjonen skal vi se på en viktig sammenheng mellom eksponentialfunksjonen og de trigonometriske funksjonene sinus og cosinus. For ethvert reelt tall θ vet vi at

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Siden $\cos(-\theta) = \cos \theta$ og $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, har vi dessuten at

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta.$$

Adderer vi disse to ligningene, ser vi at $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$, og følgelig er

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

Dersom vi isteden trekker den andre ligningen fra den første, får vi $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$, som medfører at

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Disse regningene forutsetter selvfølgelig at θ er et reelt tall, men svarene vi kom frem til gir oss et hint om hvordan vi bør definere cosinus og sinus til komplekse tall; vi setter simpelthen

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

for alle komplekse tall z . Disse definisjonene har ikke bare teoretisk interesse, men kan også brukes til å gjøre en del regninger betraktelig enklere.

Oppgaver i seksjon 3.3

1. Skriv tallene på formen $a + ib$:

a) $e^{i\pi/2}$

b) $e^{-i\pi/4}$

c) $e^{i23\pi/6}$

2. Skriv tallene på formen $a + ib$:

a) $e^{2+i\pi/3}$

b) $e^{\ln 3 - 3i\pi/4}$

3. Skriv tallene på formen $re^{i\theta}$:

a) $1 + i\sqrt{3}$

b) $4 - 4i$

c) -23

4. Skriv tallene på formen $re^{i\theta}$:

a) $-56i$

b) $27 - i9\sqrt{3}$

5. Regn ut zw og z/w når:

a) $z = 2e^{i\pi/4}$, $w = 4e^{i\pi/6}$

b) $z = 5e^{-i\pi/3}$, $w = 8e^{i\pi/4}$

6. Bruk de Moivres formel til å uttrykke $\cos 2\theta$ og $\sin 2\theta$ ved hjelp av $\cos \theta$ og $\sin \theta$. Har du sett disse formlene før?7. Bruk de Moivres formel til å uttrykke $\cos 4\theta$ og $\sin 4\theta$ ved hjelp av $\cos \theta$ og $\sin \theta$.8. Regn ut $(1 + i)^{804}$ og $(\sqrt{3} - i)^{173}$.9. Vis at $\left(\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}\right)^n = \frac{1 + i \tan n\theta}{1 - i \tan n\theta}$.

10. Vis at formlene

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

gjelder for alle komplekse tall z og w .11. Vis at for alle komplekse tall z og w er

$$2 \sin \left(\frac{z+w}{2}\right) \cos \left(\frac{z-w}{2}\right) = \sin z + \sin w$$

$$2 \cos \left(\frac{z+w}{2}\right) \cos \left(\frac{z-w}{2}\right) = \cos z + \cos w$$

$$2 \sin \left(\frac{z+w}{2}\right) \sin \left(\frac{z-w}{2}\right) = -\cos z + \cos w$$

12. a) Vis at formelen $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$ for en endelig geometrisk rekke også gjelder når z er et komplekst tall forskjellig fra 1.

b) Vis at $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$.

c) Vis at formelen i b) kan skrives $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\theta/2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

d) Vis at (når θ ikke er et heltallig multiplum av 2π)

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^n \sin k\theta = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

(Hint: Ta real- og imaginærdeler på begge sider i c).)

13. Vis at

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$$

der siste ledd i summen er $\pm \binom{n}{n}$ hvis n er like, og $\pm \binom{n}{n-1}$ hvis n er odde. Vis også at

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}$$

der siste ledd i summen er $\pm \binom{n}{n-1}$ hvis n er like, og $\pm \binom{n}{n}$ hvis n er odde.

3.4 Å trekke røtter av komplekse tall

Vi begynte å studere komplekse tall fordi vi ønsket å regne med kvadratrøtter til negative tall. I denne seksjonen skal vi se at vi kan gjøre mer; vi kan finne n -te røtter til et hvilket som helst komplekst tall. Dette er ikke så vanskelig hvis vi bare holder fast ved den geometriske tolkningen av multiplikasjon: Når vi ganger to komplekse tall med hverandre, multipliserer vi modulusene og adderer argumentene. Ganger vi et tall med seg selv n ganger, betyr dette at vi tar n -te potens av modulus og ganger argumentet med n . For å finne n -te røtter, må vi bare reversere denne prosedyren – vi må ta n -te roten av modulus og n -te delen av argumentet. Men før vi ser på detaljene, kan det være lurt å bli enig om hva en n -te rot egentlig er.

3.4.1 Definisjon

La z være et komplekst tall, og la n være et naturlig tall. Vi sier at et komplekst tall w er en n -te rot til z dersom

$$w^n = z.$$

Er $n = 2$ kaller vi w en *kvadratrot*, og hvis $n = 3$ kalles w ofte en *kubikkrot*.

Det viser seg at et komplekst tall forskjellig fra 0 alltid har n forskjellige n -te røtter¹ (0 har bare én n -te rot, nemlig 0 selv). For å finne dem, lønner det seg å skrive z på polarform $z = re^{i\theta}$. Velger vi nå $w_0 = r^{1/n}e^{i\theta/n}$ (vi tar altså n -te rot av modulus og n -te delen av argumentet), følger det fra regnereglene i forrige avsnitt at $w_0^n = (r^{1/n}e^{i\theta/n})^n = re^{i\theta} = z$. Dermed har vi funnet én av n -te røttene til z , men hvordan finner vi de andre? Husk at polarformen til z ikke er entydig, og at vi også kan skrive $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ for et hvilket som helst heltall k . Bruker vi det samme trikset på dette uttrykket, finner vi at $w_k = r^{1/n}e^{i(\theta+2k\pi)/n}$ også må være en rot. Dermed ser det plutselig ut som om vi har fått uendelig mange røtter, én for hvert heltall k , men det er heldigvis ikke tilfellet. Det viser seg at w_0, w_1, \dots, w_{n-1} er forskjellige, mens $w_n = w_0, w_{n+1} = w_1, w_2 = w_{n+2}$ osv.

Grunnen til dette ser vi ved å sammenligne w_0 og w_n . Disse to tallene har den samme modulus $r^{1/n}$. Argumentet til w_0 er θ/n , mens argumentet til w_n er $(\theta + 2\pi n)/n = \theta/n + 2\pi$. Siden en forskjell i argumentverdi på 2π gir det samme tallet, er dermed w_0 lik w_n . Et tilsvarende argument viser at $w_k = w_{k'}$ hvis og bare hvis $k - k'$ er delelig med n .

¹Det kan være på sin plass med noen ord om terminologi. Når vi snakker om kvadratrotten (i bestemt form) til et positivt reelt tall, mener vi alltid det positive tallet b slik at $b^2 = a$, og det er dette positive tallet vi betegner med \sqrt{a} . Når vi her snakker om n -te røttene til et komplekst tall z , mener vi *alle* komplekse tall w slik at $w^n = z$. Dette kan virke forvirrende til å begynne med, men man blir vant til det!

3.4.2 Setning

La $z = re^{i\theta}$ være et komplekst tall ulik 0, og la n være et naturlig tall. Da har z nøyaktig n n -te røtter $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ som er gitt ved

$$w_k = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right).$$

Bevis: Vi har allerede sett at $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ er forskjellige n -te røtter til z , så alt vi behøver å sjekke er at z ikke har andre n -te røtter enn disse. Anta at $w = \rho e^{i\phi}$ er en n -te rot til z , og la $z = re^{i\theta}$ være polarformen til z . Siden $z = w^n = \rho^n e^{in\phi}$, må $\rho^n = r$ og $n\phi = \theta + 2k\pi$ for et eller annet helt tall k . Altså er $\rho = r^{1/n}$ og $\phi = (\theta + 2k\pi)/n$, så $w = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$. Men vi har allerede observert at ethvert tall på denne formen er lik en av w_k -ene for $k = 0, 1, \dots$ eller $n - 1$. ■

I praksis er det ofte enklest å finne n -te røttene til z på følgende måte. Vi skriver først z på polarform $z = re^{i\theta}$ med θ i første omløp. Så tar vi n -te roten $r^{1/n}$ til r og finner n -te delen θ/n av θ . Da er $w_0 = r^{1/n} e^{i\theta/n}$. Så regner vi ut $2\pi/n$ og finner $e^{i2\pi/n}$. De andre n -te røttene kan nå beregnes som $w_k = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n} = w_0 (e^{i2\pi/n})^k$. Legg spesielt merke til at $w_{k+1} = w_k \cdot e^{i2\pi/n}$ – har vi én rot, kan vi altså finne den neste ved å gange med $e^{i2\pi/n}$. La oss se på et par eksempler:

3.4.3 Eksempel

Finn fjerderøttene til $z = -8 + i8\sqrt{3}$.

Vi finner først modulusen til z :

$$r = |z| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 \cdot 3} = \sqrt{256} = 16.$$

Deretter bestemmer vi argumentet:

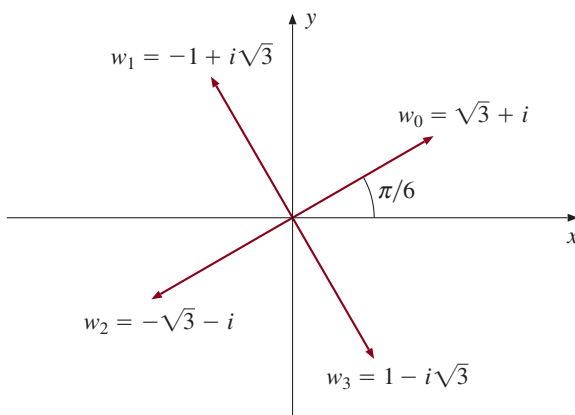
$$\cos \theta = \frac{-8}{16} = \frac{-1}{2} \quad \text{og} \quad \sin \theta = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

og den eneste vinkelen i første omløp som har disse verdiene er $\theta = 2\pi/3$ ($= 120^\circ$). Altså er $z = 16e^{2\pi i/3}$. Tar vi nå fjerderoten til modulusen, får vi $\sqrt[4]{16} = 2$, og fjerdedelen til argumentet er $\pi/6$. Altså er

$$w_0 = 2e^{i\pi/6} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3} + i.$$

Deretter observerer vi at $2\pi/4 = \pi/2$, som gir $e^{i\pi/2} = i$. Dette betyr at vi kan finne en ny rot ved å gange den vi har med i . Den neste roten blir dermed

$$w_1 = w_0 \cdot i = (\sqrt{3} + i) \cdot i = i\sqrt{3} + i^2 = -1 + i\sqrt{3}.$$



Figur 3.4.1.

Så følger

$$w_2 = w_1 \cdot i = (-1 + i\sqrt{3}) \cdot i = -i + i^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} - i.$$

Den fjerde og siste roten blir:

$$w_3 = w_2 \cdot i = (-\sqrt{3} - i) \cdot i = -i\sqrt{3} - i^2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Figur 3.4.1 viser løsningene grafisk. Legg merke til hvordan retningene fra origo til w_0 , w_1 , w_2 og w_3 deler planet i fire like store sektorer. Dette er et helt generelt fenomen; n -te røttene til et komplekst tall z vil alltid inndele planet i n like store sektorer på denne måten. Ofte kan vi ha praktisk nytte av denne egenskapen når vi skal finne røttene; i regningene ovenfor kunne vi for eksempel ha brukt den til å bestemme w_1 , w_2 og w_3 geometrisk ut i fra vårt kjennskap til w_0 . ■

Vi tar med et eksempel til.

3.4.4 Eksempel

Bestem tredjerøttene til $z = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$.

Vi finner først modulusen til z :

$$r = |z| = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{32 + 32} = \sqrt{64} = 8.$$

Så bestemmer vi argumentet. Siden

$$\cos \theta = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \text{og} \quad \sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

må $\theta = 3\pi/4$. Altså er $z = 8e^{3\pi i/4}$. Vi tar nå tredjeroten til modulusen og får $\sqrt[3]{8} = 2$. Deretter tar vi tredjedelen til argumentet og får $\pi/4$. Dermed er

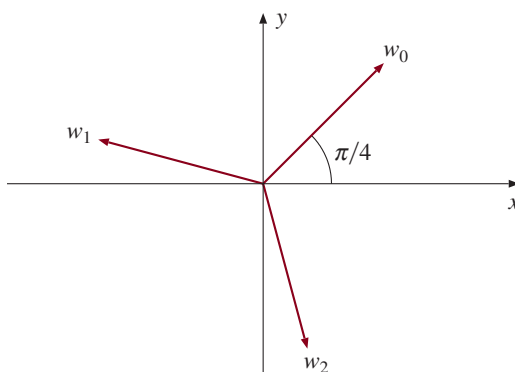
$$w_0 = 2e^{\pi i/4} = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

Vi observerer så at

$$e^{2\pi i/3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dette betyr at vi får en ny rot ved å multiplisere den gamle med $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$w_1 = w_0 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$



Figur 3.4.2.

Vi kan bestemme w_2 på samme måte:

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

Figur 3.4.2 viser løsningene grafisk. ■

Bemerkning

Det er ofte snarveier når man skal beregne n -te røtter. I eksemplet ovenfor hadde det for eksempel vært raskere å beregne

$$w_2 = w_0 \cdot e^{-i2\pi/3} = w_0 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

(Forklar hvorfor dette gir riktig svar!)

Komplekse annengradsligninger

Når vi nå har funnet ut hvordan vi finner kvadratrøttene til komplekse tall, er det en enkel sak å løse komplekse annengradsligninger – vi følger den samme prosedyren som vi brukte til å finne løsningsformelen for reelle ligninger.

Dersom a , b og c er reelle tall, vet vi at løsningene til annengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$ er gitt ved

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Det viser seg at vi får akkurat den samme formelen i det komplekse tilfellet, men før vi kan bruke den, må vi bli enige om hva $\sqrt{b^2 - 4ac}$ skal bety når innholdet i kvadratroten er komplekst. Husk hva som skjer i det reelle tilfellet; ethvert positivt reelt tall r har to (reelle) kvadratrøtter, men når vi bruker kvadratrotsymbolet \sqrt{r} , mener vi alltid den ene av disse kvadratrøttene, nemlig den positive. I det komplekse tilfellet er det ikke så lett å plukke ut den mest naturlige betydning av \sqrt{z} – det viser seg faktisk at forskjellige valg er naturlige i forskjellige sammenhenger. Derfor finnes det heller ikke noen universell definisjon av hva \sqrt{z} skal bety når z er kompleks. For våre formål i denne boken kan vi imidlertid fint greie oss med denne definisjonen: Med \sqrt{z} skal vi mene den kvadratroten til z som har argument i intervallet $[0, \pi)$, dvs. at vi velger den kvadratroten som ligger i øvre halvplan.

3.4.5 Setning

Anta at a , b og c er komplekse tall, $a \neq 0$. Da har annengradsligningen $az^2 + bz + c = 0$ løsningene

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bevis: Setter vi a utenfor en parentes og fullfører kvadratet, får vi:

$$az^2 + bz + c = a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right).$$

Ligningen er oppfylt når dette uttrykket er lik 0, dvs. når

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

og følgelig må $z + \frac{b}{2a}$ være en av de to kvadratrøttene til det komplekse tallet $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, altså

$$z + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dermed er

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

som er det vi skulle vise. ■

3.4.6 Eksempel

Løs annengradsligningen $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$.

I dette tilfellet er $a = 1$, $b = 2i$ og $c = -1 - i$. Dermed er

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1 - i)}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{4i}}{2}$$

For å komme videre må vi finne $\sqrt{4i}$. Siden $4i$ har modulus 4 og argument $\pi/2$, har tallet en kvadratrott w_0 med modulus $\sqrt{4} = 2$ og argument $(\frac{\pi}{2})/2 = \frac{\pi}{4}$. Siden dette tallet ligger i øvre halvplan, er $\sqrt{4i} = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Dermed er

$$z = \frac{-2i \pm (\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{2}$$

som gir to løsninger

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \quad \text{og} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right).$$



La oss helt til slutt i denne seksjonen se hva resultatet ovenfor kan fortelle oss når koeffisientene a , b og c er reelle tall. Fra skolematematikken vet vi at dersom $b^2 \geq 4ac$, så har ligningen $az^2 + bz + c = 0$ reelle løsninger

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Fra setning 3.4.5 ser vi at dersom $b^2 < 4ac$, så har ligningen to komplekse røtter

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nå er $\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}$ (sjekk!) og dermed blir løsningene

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Legg merke til at røttene er komplekskonjugerte av hverandre.

3.4.7 Eksempel

Løs annengradsligningen $z^2 + 2z + 4 = 0$.

Siden $b^2 = 2^2 = 4$ er mindre enn $4ac = 16$, har vi

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-2 \pm i\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 4 - 2^2}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$



La oss oppsummere det vi nå vet om reelle annengradsligninger i en setning:

3.4.8 Setning

La $ax^2 + bx + c = 0$ være en annengradsligning med reelle koeffisienter (dvs. $a, b, c \in \mathbb{R}$).

(i) Hvis $b^2 > 4ac$, har ligningen to reelle røtter

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(ii) Hvis $b^2 = 4ac$, har ligningen én reell rot

$$z = \frac{-b}{2a}.$$

(iii) Hvis $b^2 < 4ac$, har ligningen to komplekse røtter

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

som er konjugerte av hverandre.

Vi skal få bruk for dette resultatet når vi studerer differensligninger i kapittel 4 og differensialligninger i kapittel 10.

Bemerkning

Du har kanskje lagt merke til at vi slett ikke trenger å definere \sqrt{z} når z er kompleks for å gjennomføre regningene i dette avsnittet. Alt vi behøver er å oppfatte

$$\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

som en symbolsk skrivemåte for de to kvadratrøttene til $b^2 - 4ac$. Erfaringene fra de første utgavene av denne boken tyder imidlertid på at løsningene blir lettere å huske og forstå når vi først definerer \sqrt{z} .

Oppgaver i seksjon 3.4

1. Finn kvadratrøttene til z og skriv dem både på formen $re^{i\theta}$ og $a + ib$:
 - a) $z = i$
 - b) $z = -i$
 - c) $z = 2 + 2i\sqrt{3}$
 - d) $z = -1 + i\sqrt{3}$
2. Vis at $1 + 2i$ er en kvadratrot til $-3 + 4i$. Hva er den andre kvadratrotten?
3. Finn tredjerøttene til z og skriv dem både på formen $re^{i\theta}$ og $a + ib$:

- a) $z = i$
- b) $z = -i$
- c) $z = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}$

4. Finn fjerderøttene til z og skriv dem både på formen $re^{i\theta}$ og $a + ib$:

- a) $z = -16$
- b) $z = -1 - i\sqrt{3}$
- c) $z = -9\sqrt{3} + 27i$

5. (UiO) Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$z^3 = \sqrt{2}(1 + i).$$

Skriv svaret på formen $re^{i\theta}$.

6. (UiO) Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{1 + i}.$$

Skriv svaret på formen $re^{i\theta}$. Vis på en figur hvordan løsningene ligger i det komplekse planet.

7. (UiO) Finn de komplekse løsningene til ligningen

$$iz^3 = 8.$$

Skriv svaret både på formen $re^{i\theta}$ og på formen $a + bi$. Vis på en figur hvordan løsningene ligger i det komplekse planet.

8. a) (UiO) Finn alle komplekse tall z slik at

$$z^3 = -1 + i,$$

og vis på en figur hvordan de ligger i det komplekse plan.

b) La w være den løsningen under a) som ligger i annen kvadrant. Finn et positivt, naturlig tall n slik at w^n er reelt. Hva er det minste slike n ?

9. Løs annengradsligningene

- a) $x^2 + 2x + 4 = 0$
- b) $5x^2 + 6x + 5 = 0$
- c) $2x^2 + 2x + 1 = 0$

10. Vis at dersom annengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$ bare har én rot r , så er $ax^2 + bx + c = a(x - r)^2$, dvs. at r er en dobbeltrot i ligningen.

11. Løs annengradsligningene

- a) $z^2 + 2z + 9 = 0$
 b) $z^2 + 2iz + 5 = 0$
 c) $z^2 + 2z - i\sqrt{3} = 0$
 d) $z^2 + (1 - i)z - i = 0$

12. (UiO) Finn de komplekse løsningene til ligningen $z^2 - 2iz - (1 + i) = 0$. Skriv svaret på formen $a + bi$.

13. (UiO) Finn røttene til $z^2 - 4iz - 5 = 0$ og skriv dem på formen $a + ib$.

14. (UiO) Finn løsningene av den komplekse ligningen

$$z^2 + 2(1 - i)z + 7i = 0.$$

Angi disse både på formen $a + bi$ og på formen $re^{i\theta}$ og vis på en figur hvordan de ligger i det komplekse planet.

15. a) (UiO) Finn alle komplekse løsninger av ligningen $z^3 + iz^2 + z = 0$.

b) Finn alle komplekse løsninger av ligningen $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$

16. (UiO) Finn alle komplekse løsninger av ligningen $z^5 + 4z = 0$. Gi løsningene på formen $a + bi$.

17. a) (UiO) Vis at røttene i ligningen

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha,$$

der α er et vilkårlig reelt tall, ligger på enhetssirkelen ($|z| = 1$) i det komplekse plan.

b) Vis omvendt at om z er et komplekst tall på enhetssirkelen, så er $z + 1/z$ reell og
 $-2 \leq z + 1/z \leq 2$.

18. (UiO) La $z = a + ib$. Vis at kvadratroten til z er på formen

$$w = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} + \frac{a}{2}} + \epsilon i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{a}{2}} \right),$$

der ϵ er enten 1 eller -1 . Bruk formelen til å finne kvadratrøttene til $-9 + 12i$.

19. a) (UiO) Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$(1 + z)^5 = (1 - z)^5,$$

for eksempel uttrykt ved $w = e^{2\pi i/5}$.

b) Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$(1 + z)^n = (1 - z)^n,$$

der n er et gitt naturlig tall.

c) Vis at løsningene i b) alle ligger på en rett linje i det komplekse planet.

3.5 Algebraens fundamentalteorem

Matematikerne oppfant de komplekse tallene fordi de ønsket å regne med kvadratrøtter til negative tall, eller – sagt på en annen måte – fordi de ønsket å løse ligninger av typen $z^2 + a = 0$, der $a > 0$. Det viste seg etter hvert at de fikk utrolig mye på kjøpet. Innenfor de komplekse tall kan man ikke bare finne løsninger til ligningene $z^2 + a = 0$, men faktisk til enhver algebraisk ligning

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \dots + c_1 z + c_0 = 0$$

der $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1, c_0$ er gitte komplekse tall. En av de første som fremsatte en hypotese i denne retning, var den franske matematikeren Albert Girard som på 1600-tallet påstod at enhver n -te gradsligning hadde n «mulige eller umulige røtter». Etter som tiden gikk, samlet det seg flere og flere indisier på at dette var riktig, men det var først den store, tyske matematikeren Carl Friedrich Gauss som i 1799 maktet å *bevise* en presisert versjon av Girards hypotese. Gauss' resultat er et av de aller mest sentrale i matematikken, og det har fått hedersbetegnelsen *algebraens fundamentalteorem*. I denne seksjonen skal vi se nærmere på hva dette teoremet sier, og vi skal også ta for oss noen enkle konsekvenser som vi får bruk for i senere kapitler. Beviset for teoremet skal vi imidlertid ikke se på i denne omgang; det er vanskeligere enn de fleste andre bevisene i denne boken, og vi skal utsette det til slutten av kapittel 5 – og selv da med en advarsel om at det er for de spesielt interesserte!

Det lønner seg å uttrykke algebraens fundamentalteorem som et utsagn om polynomer istedenfor ligninger. Et *komplekst n -te grads polynom* P er rett og slett et uttrykk på formen

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \dots + c_1 z + c_0$$

der $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1, c_0$ er gitte komplekse tall og $c_n \neq 0$. Et komplekst tall z kalles en rot eller et *nullpunkt* til polynomet dersom $P(z) = 0$. Røttene til P er med andre ord det samme som løsningene til ligningen

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \dots + c_1 z + c_0 = 0.$$

Vi skal kalle P et *reelt polynom* dersom alle koeffisientene $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1, c_0$ er reelle tall. Siden de reelle tallene er inneholdt i de komplekse, er de reelle polynomene bare en spesiell type komplekse polynomer. De vanlige resultatene om polynomer og polynomdivisjon (f.eks. dem i seksjon 1.5) gjelder like godt for komplekse polynomer.

3.5.1 Algebraens fundamentalteorem La

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \dots + c_1 z + c_0$$

være et komplekst n -te grads polynom. Da finnes det komplekse tall r_1, r_2, \dots, r_n slik at

$$P(z) = c_n (z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n)$$

for alle komplekse tall z . Bortsett fra rekkefølgen er faktorene $(z - r_1), (z - r_2), \dots, (z - r_n)$ entydig bestemt.

Siden et produkt er null hvis og bare hvis minst én av faktorene er null, så følger det fra dette teoremet at r_1, r_2, \dots, r_n er de eneste nullpunktene til P . Legg merke til at siden r_i kan være lik r_j for $i \neq j$, så behøver ikke P ha n forskjellige nullpunkter. For å holde styr på nullpunktene, kan det lønne seg å omformulere uttrykket

$$P(z) = c_n(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n)$$

en smule. Grupperer vi like faktorer sammen, ser vi at vi kan skrive

$$P(z) = c_n(z - r_1)^{n_1}(z - r_2)^{n_2} \dots (z - r_j)^{n_j}$$

der r_1, r_2, \dots, r_j er forskjellige komplekse tall, og n_1, n_2, \dots, n_j er positive, hele tall slik at $n_1 + n_2 + \dots + n_j = n$. Vi sier at r_i er en rot i $P(z)$ med multiplisitet n_i . Vi kan nå presisere Girards utsagn om at en n -te gradsligning alltid har n «mulige eller umulige røtter»: *En n -te gradsligning har alltid nøyaktig n komplekse røtter dersom vi lar hver rot telle like mange ganger som den har multiplisitet.* Matematikere sier gjerne at «vi teller røttene med multiplisitet».

3.5.2 Eksempel

Ved å multiplisere sammen høyresiden, ser man lett at

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2(z - i)(z + i).$$

Polynomet $P(z)$ har altså røttene $-1, i, -i$; den første med multiplisitet 2, de to andre med multiplisitet 1. Teller vi røttene med multiplisitet, får vi $2 + 1 + 1 = 4$, akkurat som vi skal for et fjerdegradspolynom. ■

Hvorfor er algebraens fundamentalteorem så betydningsfullt? Hvis det er sant som Kronecker sa, at de naturlige tallene er skapt av Vårherre, mens alle de andre er menneskeverk, så er det naturlig å spørre *hvorfor* vi har behovd å skape tallsystemene \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} og \mathbb{C} . Ett svar er at alle disse tallsystemene er skapt for å gi oss muligheter til å løse ligninger; \mathbb{Z} er laget for å gi oss muligheter til å løse ligninger av typen $x + 7 = 0$; \mathbb{Q} er laget for at vi skal kunne løse ligninger av typen $5x + 3 = 0$; \mathbb{R} er laget for at vi skal kunne løse ligninger av typen $x^2 - 2 = 0$; og \mathbb{C} er laget for at vi skal kunne løse ligninger av typen $x^2 + 1 = 0$. Algebraens fundamentalteorem sier at vi nå er kommet til veis ende i denne prosessen; alle (algebraiske) ligninger med komplekse koeffisienter har løsninger i \mathbb{C} , og det er ikke lenger noe behov for å fortsette. (Dette er en sannhet med modifikasjoner; det finnes andre grunner til å danne nye tallsystemer enn ønsket om å kunne løse ligninger, og det finnes tallsystemer som er skreddersydd for å møte disse andre behovene, men ingen av dem har den samme universelle anvendbarheten som \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} og \mathbb{C} har.)

Reell faktorisering

I resten av dette avsnittet skal vi se at algebraens fundamentalteorem har viktige konsekvenser for reelle polynomer. Vi begynner med en hjelpesetning:

3.5.3 Lemma

La

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \cdots + c_1 z + c_0$$

være et reelt polynom (dvs. at $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1, c_0$ er reelle tall). Dersom r er en rot i P , så er den konjugerte \bar{r} også en rot.

Bevis: Siden r er en rot, er

$$0 = c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + c_{n-2} r^{n-2} + \cdots + c_1 r + c_0.$$

Dersom vi først konjugerer begge sider av denne ligningen og så bruker regnereglerne 3.1.5 for konjugasjon, får vi

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} &= \overline{c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + c_{n-2} r^{n-2} + \cdots + c_1 r + c_0} \\ &= \bar{c}_n \bar{r}^n + \bar{c}_{n-1} \bar{r}^{n-1} + \bar{c}_{n-2} \bar{r}^{n-2} + \cdots + \bar{c}_1 \bar{r} + \bar{c}_0 \\ &= c_n \bar{r}^n + c_{n-1} \bar{r}^{n-1} + c_{n-2} \bar{r}^{n-2} + \cdots + c_1 \bar{r} + c_0 \end{aligned}$$

hvor vi i det siste trinnet benytter at $\bar{\bar{c}}_i = c_i$ siden polynomet er reelt. Dette viser at \bar{r} er en rot i P . ■

Det er viktig å bite merke i at resultatet ovenfor og alle andre resultater i dette avsnittet bare gjelder for polynomer med *reelle* koeffisienter.

Vi trenger å vite litt mer enn lemmaet forteller oss, nemlig at to konjugerte røtter alltid har samme multiplisitet. Vi begynner med en viktig observasjon. Dersom $r = a + ib$ og $\bar{r} = a - ib$ er to konjugerte tall, så er

$$(z - r)(z - \bar{r}) = z^2 - (r + \bar{r})z + r\bar{r} = z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$$

som er et *reelt* polynom.

3.5.4 Lemma

To konjugerte røtter til et reelt polynom har alltid samme multiplisitet.

Bevis: Vi skal anta det motsatte og utlede en motsigelse. Anta at $P(z)$ er et reelt polynom med to konjugerte røtter r og \bar{r} slik at multiplisiteten m til r er større enn multiplisiteten k til \bar{r} . Ifølge algebraens fundamentalteorem kan vi skrive

$$P(z) = c_n (z - r)^m (z - \bar{r})^k (z - r_1)^{n_1} (z - r_2)^{n_2} \cdots (z - r_j)^{n_j}$$

der r_1, r_2, \dots, r_j er de andre røttene til P . Deler vi $P(z)$ på $(z - r)^k (z - \bar{r})^k$, får vi et nytt polynom

$$Q(z) = c_n (z - r)^{m-k} (z - \bar{r})^{n_1} (z - r_2)^{n_2} \cdots (z - r_j)^{n_j}$$

hvor r er rot men ikke \bar{r} . Dette polynomet må være reelt siden det fremkommer når vi deler det reelle polynomet $P(z)$ med et annet reelt polynom

$$(z - r)^k (z - \bar{r})^k = [z^2 - 2az + (a^2 + b^2)]^k$$

(husk observasjonen ovenfor). Dermed er $Q(z)$ et reelt polynom hvor r er rot, men ikke \bar{r} , og det strider mot lemma 3.5.3. ■

Vi kan nå begynne å høste fruktene av våre anstrengelser:

3.5.5 Korollar

Ethvert reelt polynom av odde grad har en reell rot.

Bevis: Dersom P ikke har en reell rot, så vil røttene kunne ordnes som konjugerte par: $(r_1, \bar{r}_1), (r_2, \bar{r}_2), \dots, (r_j, \bar{r}_j)$. Hvis n_1, n_2, \dots, n_j er multiplisitetene til r_1, r_2, \dots, r_j , så vil antall røtter tallet med multiplisitet være $2n_1 + 2n_2 + \dots + 2n_j$ siden konjugerte røtter har samme multiplisitet. Men dette er et like tall, og siden graden til polynomet er odde, har vi en selvmotsigelse. ■

Bemerkning

Korollaret gjelder ikke for polynomer av like grad; $P(z) = z^2 + 1$ er et eksempel på et reelt polynom av like grad som *ikke* har reelle røtter. Det er for øvrig mulig å gi et mye mer elementært bevis for korollaret uten å bruke komplekse tall. Idéen er som følger (vi antar for enkelhets skyld at den ledende koeffisienten c_n er positiv, og vi skriver $P(x)$ istedenfor $P(z)$ for å markere at vi nå bare betrakter reelle variabelverdier): Siden $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$ og $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$, og P er kontinuerlig, så må det finnes en (reell) x slik at $P(x) = 0$ (en kontinuerlig funksjon kan ikke hoppe fra negative til positive verdier uten å passere gjennom 0 – dette er et fenomen vi skal diskutere nærmere i kapittel 5).

Selv om vi ikke alltid kan spalte et reelt polynom som et produkt av reelle førstegrads-polynomer, kan vi allikevel oppnå ganske mye:

3.5.6 Setning

Ethvert reelt n -te grads polynom $P(z)$ kan skrives som et produkt av reelle første- og annengrads polynomer; dvs. det finnes reelle tall $r_1, \dots, r_j, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ slik at

$$P(z) = c_n(z - r_1) \dots (z - r_j)(z^2 + a_1z + b_1) \dots (z^2 + a_kz + b_k).$$

Bevis: La r_1, r_2, \dots, r_j være de reelle røttene til P (hvis det finnes noen). Alle de andre røttene kommer i konjugerte par $(r_{j+1}, \bar{r}_{j+1}), (r_{j+2}, \bar{r}_{j+2}), \dots, (r_{j+k}, \bar{r}_{j+k})$, hvor vi har listet opp hvert par like mange ganger som det har multiplisitet. Ifølge algebraens fundamentalteorem er

$$P(z) = c_n(z - r_1) \dots (z - r_j)(z - r_{j+1})(z - \bar{r}_{j+1}) \dots (z + r_{j+k})(z + \bar{r}_{j+k}).$$

Fra regningene våre ovenfor vet vi at dersom vi multipliserer ut

$$(z - r_{j+1})(z - \bar{r}_{j+1}) = z^2 + a_1z + b_1,$$

så er resultatet et *reelt* annengradspolynom, og tilsvarende gjelder for de andre faktorene. Altså er

$$P(z) = c_n(z - r_1) \dots (z - r_j)(z^2 + a_1z + b_1) \dots (z^2 + a_kz + b_k)$$

der alle faktorene er reelle, og beviset er fullført. ■

Bemerkning

Legg merke til at det i setningen ovenfor kan hende at $j = 0$ eller $k = 0$; altså at P er et produkt enten av bare annengradsfaktorer eller av bare førstegradsfaktorer. Legg også merke til at vi kan anta at annengradspolynomene $(z^2 + a_1z + b_1), \dots, (z^2 + a_kz + b_k)$ ikke har reelle røtter – med dette som tilleggsbetingelse blir produktfremstillingen entydig (på rekkefølgen nær).

La oss avslutte med et eksempel hvor vi får bruk for noe av det vi lært.

3.5.7 Eksempel

Vis at det komplekse tallet $1 + i$ er rot i polynomet

$$P(z) = z^4 - z^3 - 2z^2 + 6z - 4,$$

og finn de andre røttene.

Setter vi $z = 1 + i$ inn i polynomet, får vi

$$\begin{aligned} P(1 + i) &= (1 + i)^4 - (1 + i)^3 - 2(1 + i)^2 + 6(1 + i) - 4 \\ &= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 - 1 - 3i + 3 + i - 2 - 4i + 2 + 6 + 6i - 4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

som viser at $1 + i$ er en rot. Siden polynomet er reelt, betyr dette at det konjugerte tallet $1 - i$ også må være en rot, og følgelig er $P(z)$ delelig med produktet

$$[z - (1 + i)][z - (1 - i)] = z^2 - 2z + 2.$$

Utfører vi polynomdivisjonen, ser vi at

$$P(z) = z^4 - z^3 - 2z^2 + 6z - 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + z - 2).$$

Det siste annengradspolynomet er lett å faktorisere ved å løse en annengradsligning; vi har

$$z^2 + z - 2 = (z - 1)(z + 2).$$

Dermed ser vi at $P(z)$ kan faktorerises som

$$P(z) = (z - 1)(z + 2)(z^2 - 2z + 2) = (z - 1)(z + 2)[z - (1 + i)][z - (1 - i)]$$

alt ettersom vi foretrekker reell eller kompleks faktorisering. Røttene til $P(z)$ er $1, -2, 1 + i$ og $1 - i$. ■

Oppgaver i seksjon 3.5

1. Bruk det du kan om n -te røtter til å finne komplekse og reelle faktoriseringer av polynomene:

a) $z^3 + 8$

b) $z^4 - 1$

c) $z^5 + 1$

2. Utfør polynomdivisjonen:

a) $z^3 - iz^2 + (3 - i)z - 2 - 2i : z - 2i$

b) $z^4 + 5iz^3 - (1 + i)z^2 + (4 + 6i)z + (2 - 2i) : z^2 + 4iz + 2$

3. Finn komplekse og reelle faktoriseringer av polynomene:

a) $z^4 + 2z^2 + 1$

b) $z^3 + 2z^2 + 4z$

c) $z^6 - 4z^3 + 4$

4. Vis at -2 er en rot i polynomet

$$P(z) = z^3 + 2z^2 + z + 2.$$

Finn den reelle og komplekse faktoriseringen til $P(z)$.5. a) Vis at i er en rot i polynomet

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 2z + 3.$$

b) Finn komplekse og reelle faktoriseringer av $P(z)$.6. a) Vis at $i + 1$ er en rot i polynomet

$$P(z) = z^3 + (i - 1)z^2 + (1 - 2i)z + (i + 1).$$

b) Skriv $P(z)$ som et produkt av (komplekse) førstegradsfaktorer.7. a) Vis at $r = 1 - 2i$ er en rot i polynomet $P(z) = z^3 + 2z^2 - 3z + 20$.b) Finn de andre røttene til $P(z)$ og skriv opp den reelle og komplekse faktoriseringen til $P(z)$.8. (UiO) Vis at $1 + i\sqrt{3}$ er en rot i $P(z) = z^4 + 4z^2 + 16$. Finn den reelle og komplekse faktoriseringen til $P(z) = z^4 + 4z^2 + 16$.9. (UiO) Vis at $r = 1 + i$ er en rot i polynomet $P(z) = z^3 - iz^2 - iz - 1 - i$ og finn de andre røttene.10. (UiO) La $f(x)$ være et reelt polynom og anta at a er en reell rot med multiplisitet ≥ 2 . Vis at a er en rot i $f'(x)$.

11. (UiO) Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$1 + z + z^2 + z^3 = 0.$$

(Hint: Venstresiden er en geometrisk rekke.)

12. Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0.$$

13. a) (UiO) Finn de komplekse kvadratrøttene til $-1 + i\sqrt{3}$. Gi svaret både på formen $a + ib$ og på polarform.

- b) Finn alle de komplekse løsningene til ligningen

$$z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

Vis på en figur hvordan løsningene ligger i det komplekse planet. Skriv polynomet $z^4 + z^2 + 1$ som et produkt av to annengradspolynomer med reelle koeffisienter.

14. a) (UiO) Finn alle de komplekse løsningene til ligningen

$$z^6 - 8z^3 + 64 = 0.$$

- b) Vis at alle løsningene ligger på en sirkel i det komplekse plan.

- c) Skriv $z^6 - 8z^3 + 64$ som et produkt av annengradspolynomer med reelle koeffisienter.

15. (UiO) La z være et komplekst tall slik at $z^6 = 1$, men $z^2 \neq 1$. Vis at

$$z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

16. La $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0$ være et polynom med røtter r_1, r_2, \dots, r_n .

- a) Vis at

$$a_0 = (-1)^n r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n \quad \text{og} \quad a_{n-1} = -(r_1 + r_2 + \dots + r_n).$$

- b) Kan du finne en tilsvarende formel for en generell koeffisient a_i ?

- c) Vis at dersom w_1, w_2, \dots, w_n er de n -te røttene til et komplekst tall a , så er

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 0.$$

17. La z, u, w være tre komplekse tall. Vis at trekanten med hjørner i z, u og w er likesidet hvis og bare hvis

$$z^2 + u^2 + w^2 = zu + zw + uw.$$

3.6 Historisk epistel: Komplekse tall og ligningenes historie

Han tegner Landkort og læser
Loven,
Han er saa flittig som jeg er doven.
— *Johan Herman Wessel*
(1742–1785),
om Caspar Wessel

Allerede babylonerne kunne løse annengradsligninger, men tredjegradslikningene lot vente på seg. Det første alvorlige forsøket ble gjort innenfor den islamske kulturkretsen av den persiske dikteren, astronomen og matematikeren Omar Khayyam (1048–1131). Khayyams angrepsmåte var geometrisk; han fant løsningene som skjæringspunkter mellom kjeglesnitt (se Onstad [11] og Berggren [3] for mer informasjon). En annen persisk matematiker, Sharaf al-Din (død i 1213), videreutviklet Khayyams teori, men også hans løsninger var geometriske.

Omar Khayyam er kanskje den eneste som har skaffet seg et verdensnavn både som matematiker og dikter. Han var født i Naishapur som den gangen var hovedstaden i Khorasan i det nordøstlige Iran. I 1074 ble han utpekt av sultan Malek Shah av Iran til å lede en gruppe astronomer og matematikere som skulle reformere kalenderen. Dette arbeidet gjorde Khayyam kjent over hele den islamske verden, og han fikk innpass ved hoffet i Isfahan. I 1092 ble Khayyams beskytter og sultanens nærmeste rådgiver, Nizam ul-Mulk, myrdet av en gruppe religiøse fanatikere, og da sultanen selv døde kort etter, falt Khayyam i unåde. Han trakk seg etter hvert tilbake til Naishapur, hvor han fortsatte sine matematiske studier.

Første gang vi hører om Khayyams diktning, er 40 år etter hans død. Dette kan skyldes at tidligere kilder er gått tapt, men Khayyam har også hatt god grunn til bare å sirkulere sine dikt blant venner – i en tid preget av religiøs vekkelse og fanatisme, var han en skeptiker og tviler. I vest ble Khayyams diktning først kjent etter at engelskmannen Edward FitzGerald (1809–1883) utga en (meget fri) gjendiktning i 1859 (se [6]; vil du ha en mindre fri oversettelse, anbefales Johannes Gjerdåkers nynorske gjendiktning [8] på det varmeste). FitzGerald's versjon av Khayyams *Rubaiyat* skal være den mest solgte diktsamlingen som har kommet på engelsk de siste to hundre år. I sine dikt uttrykker Khayyam skepsis til det evige liv, og en resignert men sanselig verdsettelse av det jordiske. En berømt strofe lyder slik i FitzGerald's oversettelse:

*Here with a Loaf of Bread beneath the Bough,
A Flask of Wine, a Book of Verse – and Thou
Beside me singing in the Wilderness –
And Wilderness is Paradise enow.*

Omar Khayyam var nok ikke helt fornøyd med sine geometriske løsninger – han ville ha foretrukket algebraiske. Den første som maktet å finne algebraiske løsninger av en generell klasse tredjegradslikninger, var den italienske matematikeren Scipione del Ferro (1465–1526). Før vi beskriver hans resultat, er det imidlertid en ting vi må ha klart for oss. Siden hverken araberne eller renessansematematikerne i Italia kjente de

negative tallene, skrev de alltid ligningene slik at koeffisientene var positive. Mens vi tenker oss at alle annegradsligninger har formen $ax^2 + bx + c = 0$, delte tidligere tiders matematikere dem inn i tre klasser

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 = bx + c, \quad ax^2 + c = bx,$$

der a , b og c er positive tall (i virkeligheten var det enda verre siden 0 heller ikke var oppfunnet, og man derfor måtte ha spesialregler for ligninger der et av leddene manglet). Hver av disse ligningstypene hadde sin egen løsningsprosedyre. Tilsvarende problemer hadde man selvfølgelig for tredjegradslikningen, og Khayyam opererer med fjorten forskjellige typer!

Scipione del Ferro underviste i matematikk ved Universitetet i Bologna. En gang mellom 1500 og 1515 oppdaget han hvordan man kan løse tredjegradslikninger av typen

$$x^3 + bx = c$$

($b, c > 0$) ved regning. I dag ville han øyeblikkelig ha publisert resultatet i øst og vest for å gjøre alle klokere og seg selv berømt, men på del Ferros tid var sedvanen annerledes – man vocket på nye oppdagelser som store, personlige hemmeligheter. Mye av grunnen lå i universitetssystemet der nye stillinger ble avgjort ved tvekamper mellom søkerne. Hver søker stilte den andre et visst antall spørsmål, og den som hadde løst flest ved tidsfristens utløp, fikk stillingen (forutsatt at han også kunne løse sine egne problemer!). Mange steder var det også mulig å utfordre en sittende professor til tvekamp og overta stillingen hvis man vant. I en slik duell var selvfølgelig en ny og ukjent metode et knusende våpen.

Del Ferro døde uten å ha offentliggjort sin oppdagelse, men han lot hemmeligheten gå videre til sin etterfølger Annibale della Nave (ca. 1500–1558) og sin elev Antonio Maria Fior. Fior var en ubetydelig matematiker, men bevæpnet med del Ferros hemmelighet følte han seg uovervinnelig, og i 1535 utfordret han en av sine ledende kolleger, Niccolo Tartaglia (1499–1557), til tvekamp. Tartaglia var ingen tosk – han oppdaget raskt at alle Fiors problemer var av samme type, og skjønnte at her måtte det finnes en generell metode. Han arbeidet dag og natt, og kvelden før fristen gikk ut, hadde han gjenoppdaget løsningen. Seieren var sikret, men Tartaglia avstod fra gevinsten – 30 banketter på taperens regning. Han levde tross alt i giftmordets gullalder.

Tvekampen mellom Fior og Tartaglia ble fulgt med stor oppmerksomhet, og i omverdenen var det i alle fall én som forstod hva som foregikk – Gerolamo Cardano (1501–1576). Cardano skrev til Tartaglia og ba om å få se løsningen slik at han kunne ta den med i en aritmetikkbok han holdt på å skrive. Tartaglia avsto innledningsvis, men etter at Cardano hadde lovet å presentere Tartaglia og hans militære oppfinnelser for hoffet i Milano, røpet Tartaglia metoden mot et løfte om at Cardano aldri skulle offentliggjøre den. Cardano holdt løftet i aritmetikkboken som snart ble utgitt, men i stillhet begynte han å arbeide på alle de andre variantene av tredjegradslikningen. Etter noen års arbeid hadde han behandlet dem alle. Cardano reiste også til Bologna hvor Nave lot ham studere del Ferros etterlatte papirer, og der fikk Cardano bekreftet ryktet som sa at det var del Ferro og ikke Tartaglia som først hadde løst tredjegradslikninger.

Cardano bestemte seg for å publisere, og i 1545 utkom hans matematiske hovedverk *Ars Magna (Den store kunst)*. Her beskrev han ikke bare løsningen av tredjegradslikningen, men han tok også med fjerdegradsligningen som hans briljante student Lodovico Ferrari (1522–1565) nettopp hadde løst (Onstad forklarer begge løsningene

i [11]). Til tross for at Tartaglia fikk full kreditt for sitt bidrag, var han rasende, og en bitter ordkrig utviklet seg. Cardano selv holdt seg i bakgrunnen og overlot kranlingen til Ferrari som skal ha beseiret Tartaglia overlegent i den matematiske tvekampen som omsider kom i stand i 1548.

Gerolamo Cardano var et typisk renessansemenneske – vitebegjærlig, mangfoldig og sammensatt. Hans beskrivelse av seg selv ligner en komplett fortegnelse over menneskelige dyder og laster. For ettertiden har han blitt stående som en merkelig blanding av skarpsinn og overtro, og i hans forfatterskap lever kritiske analyser side om side med den merkverdige lettroenhet. Blant hans oppfinnelser var «vitenskapen» metoposkopi der man utifra ansiktet kan lese et menneskes karakter og forutsi dets fremtid. Her kan man blant annet lære at «en kvinne med en vorte på venstre kinn, litt til venstre for smilehullet, ufravikelig vil bli forgiftet av sin ektemann».

Cardano var utdannet lege, men legekollegiet i hjembyen Milano nektet å ta ham opp fordi han var født utenfor ekteskap. Cardano svarte med å skrive en bok der han beskrev legestandens misgjerninger. Kombinert med en populær piratpraksis ble denne motoffensiven så effektiv at kollegiet fant det best å ta ham opp likevel. To år senere var Cardano leder for kollegiet og en av Europas fremste leger. Legegjerningen var lukrativ, men hans egentlige lidenskap var å skrive. Han skrev om alt og ingenting – medisin, matematikk, tekniske oppfinnelser, astrologi, overnaturlige hendelser, terningspill, barneoppdragelse. Hans egen barneoppdragelse bar sørgelige frukter; hans eldste sønn og yndling ble henrettet for å ha myrdet sin kone med gift, og den yngste var en notorisk kriminell som ranet sin egen far. Bare datteren skikket seg så vel at hun nesten ikke er nevnt i Cardanos biografi. I 1570 ble Cardano selv arrestert av inkvisisjonen. Ifølge en gammel historie ble han anklaget for å ha stilt Jesu horoskop, men det er neppe tilfellet siden han fikk en mild dom og endte sine dager med en pensjon fra paven.

Cardanos *Ars Magna* er blitt beskrevet som det første betydelige fremskrittet i europeisk matematikk siden antikken. I tillegg til *Ars Magna* skrev Cardano en bok om sjansespill, *Liber de Ludo Alea*, som er et av utgangspunktene for sannsynlighetsteorien. Mer om Cardano og hans samtidige kan du finne i Ores spennende biografi [13].

Selv om *Ars Magna* er et vitenskapelig gjennombrudd, er den slett ikke lett å lese. Rafael Bombelli (1526–1572) satte seg fore å gi en mer leservennlig fremstilling av den nye algebraen. Cardano hadde gjort noen få regninger med kvadratrotter til negative tall, men det er i Bombellis *Algebra* at disse regningene virkelig blir systematisert slik vi så i innledningen til dette kapitlet.

Renessansematematikernes løsning av tredje- og fjerdegradsligningene er forbløffende prestasjoner når vi tar hensyn til forholdene de arbeidet under. Ikke bare manglet de negative tall, men de hadde heller ikke et matematisk symbolspråk og måtte skrive ned løsningene med ord. Det matematiske formelspråket vi er så vant til, vokste sakte frem gjennom 1400- og 1500-tallet, men det er først hos den franske matematikeren François Viète (1540–1603) at vi finner det i noenlunde utviklet form.

Med Viète flyttes tyngdepunktet i den videre utviklingen nord for Alpene. Den første formuleringen av algebraens fundamentalteorem finner vi hos Albert Girard (1595–1632) som var født i Frankrike, men levde hele sitt voksne liv i Belgia. Girard var klar over at røttene måtte telles med multiplisitet, og han var en av de første som godtok negative løsninger og ga dem en geometrisk tolkning. Han visste også at der-

som regelen skulle ha full gyldighet, måtte han tillate komplekse røtter (han kalte dem «umulige» røtter). Girards ideer ble tatt opp av den innflytelsesrike filosofen og matematikeren René Descartes (1596–1650), men han var mindre villig til å godta negative og komplekse løsninger. Du kan finne utdrag av Girards og Descartes arbeider i Struik [15].

På 1500- og 1600-tallet var komplekse tall nærmest å regne som nødløsninger i ligningsteorien, men på 1700-tallet fikk de en bredere plass i matematikken. De første tegnene ser vi i England der Abraham de Moivre (1667–1754) publiserer (en versjon av) sin berømte formel i 1707, og der Roger Cotes (1682–1716) angir formelen $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ i 1714. Utledningene var fortsatt knyttet til ligningsteorien og hadde ikke noe geometrisk innhold.

Den som først og fremst forbandt de komplekse tallene med funksjonslæren, var imidlertid Euler. Som vi skal se i kapittel 12, kan alle de vanlige funksjonene i skolematematikken skrives som uendelige summer, for eksempel er

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \end{aligned}$$

Euler brukte disse uttrykkene til å definere funksjonene også for komplekse argumenter – han satte

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \end{aligned}$$

for $z \in \mathbb{C}$. Ved å velge $z = i\theta$, kunne han da regne ut at

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

(Prøv å finne ut hvordan han gjorde det!) For Euler var dette altså ikke en definisjon, men et teorem. Ved å velge $\theta = \pi$, fikk han også sin berømte formel $e^{\pi i} = -1$. I den innflytelsesrike lærebok *Introductio in analysis infinitorum* fra 1748 bruker Euler disse sammenhengene til en systematisk oppbygning av funksjonslæren.

Euler trodde på algebraens fundamentalteorem og hadde ingen skrupler med å bruke det, men hans forsøk på å bevise teoremet er lite overbevisende. Det samme gjelder et litt tidligere forsøk (1746) av den franske matematikeren Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783). Bedre forsøk gjorde Lagrange og en annen av tidens store, franske matematikere, Pierre Simon de Laplace (1749–1827). Men igjen var det Gauss som løste den siste knuten, og i sin doktoravhandling fra 1799 ga han det første, fullverdige beviset for fundamentalteoremet. Selv om Gauss på dette tidspunktet utvilsomt hadde en god forståelse av de komplekse tallene, brukte han dem ikke i beviset – han viste faktisk den reelle faktoriseringen som vi har i setning 3.5.6. (Du

finner en god diskusjon av fundamentalteoremets historie i [5], og en del av bevisene og bevisforsøkene er gjengitt i [15].)

Noen år før Gauss beviste fundamentalteoremet, hadde et annet gjennombrudd funnet sted. I 1796 skrev den norske landmåleren Caspar Wessel (1745–1818) en avhandling *Om Directionens analytiske Betegning* som han i 1797 presenterte for Det Kongelige Videnskabers Selskab i København, og som Selskabet i 1799 lot trykke i sine skrifter. I denne avhandlingen finner vi for første gang den geometriske tolkningen av de komplekse tallene.

Caspar Wessel var født i Vestby i Akershus der hans far, Jonas Wessel, var kapellan og senere sogneprest. Farfaren, Jan Wessel, var bror av selveste Tordenskjold og ble også selv marinekaptein etter hvert. Caspar og hans brødre ble først utdannet ved Katedralskolen i Christiania og deretter sendt til København for å studere. I 1764 ble Caspar landmålerassistent hos sin eldre bror, Ole Christopher, og sin juridiske embedseksamen fikk han ikke fullført før i 1778. Til gjengjeld gjorde han karriere som landmåler – med enorm flid og presisjon utarbeidet han det ene kartet etter det andre og ble en av hovedpersonene i den systematiske kartleggingen av Danmark. Da hertugen av Oldenburg i 1782 forespurte Danmark om en person som kunne lede oppmålingen av hertugdømmet, var det Caspar Wessel som fikk oppdraget. Ved slottet i Oldenburg står det fortsatt et solur som han laget under oppholdet. Caspar Wessel fortsatte å tegne kart til 1812 da «jeg blev af Gigt saa svag, at jeg neppe kunde gaae», som han selv skriver.

I ungdomsårene var Caspar Wessel et perifert medlem av det Norske Selskab i København. Hans bror, dikteren Johan Herman Wessel (1742–1785 – kjent for *Kierlighed uden Strømper* og *Smeden og Bageren*), stod atskillig mer sentralt i kretsen som rimsmed, muntrasjonsråd og svirebror. Selv om brødrene var ulike av natur – «han er så flittig som jeg er doven», skrev dikteren om matematikeren – så er det takket være ettertidens interesse for Johan Herman at vi vet så mye om Caspars bakgrunn som vi gjør. Vil du lese mer om Caspar Wessel, er Bruns bok [4] et godt sted å starte. Linne-stads bok om Johan Herman Wessel [9] gir mer informasjon om familiebakgrunn og oppvekst, og artikkelen til Kirsti Møller Pedersen [10] gir en grei gjennomgang av innholdet i Wessels artikkel. Artikkelen selv er utgitt på nytt både på dansk [16] og engelsk [17], og her kan du også finne mer informasjon om både Caspar Wessel og hans matematikk.

Om Directionens analytiske Betegning er Caspar Wessels eneste matematiske verk. Det må ha vokst naturlig ut av hans landmålervirksomhet – ingen arbeider så mye med linjestykkers lengde og retning som nettopp landmålerne. Hans siktemål var først og fremst å lette det møysommelige regnearbeidet som datidens landmåling var så full av. Dette går også frem av den andre delen av avhandlingen der han behandler sfærisk geometri (geometrien på en kuleflate) – et annet tema av stor betydning for landmålere.

Selv om Wessel bare skrev ett matematisk arbeid, er problemet han løste så sentralt at det sikret ham en plass i matematikkhistorien for all fremtid. Dessverre tok det lang tid før han virkelig fikk den plassen han fortjente – fordi avhandlingen hans var trykt på dansk i en skriftserie som ingen matematikere leste, forble den uoppdaget i nesten hundre år. Det var først i 1894 da overlærer S.A. Christensen fra Odense disputerte for doktorgraden over emnet «Matematikkens Udvigling i Danmark og Norge i det 18. Aarhundrede», at Wessels arbeid kom frem i lyset. Artikkelen ble publisert på nytt i fransk oversettelse, og etter hvert fikk Wessel den anerkjennelsen han hadde krav på.

I mellomtiden hadde andre gjort hans oppdagelse på nytt. Gauss kjente utvilsomt den geometriske tolkningen da han beviste algebraens fundamentalteorem i 1799, men sin vane tro publiserte han ingen ting før 1831. I 1806 fulgte imidlertid en annen hobbyamatiker i Wessels fotspor; den sveitsiske bokholderen Jean Robert Argand (1768–1822) trykte for egne penger sin versjon av den geometriske fremstillingen. Heller ikke Argand ble mye lest, og det var først da Gauss' avhandling endelig kom i 1831 at samtiden virkelig fikk øynene opp for den nye teorien. Deretter gikk imidlertid utviklingen raskt, og spesielt betydningsfull ble den læren for komplekse funksjoner som Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) utviklet – den kom blant annet til å spille den ene hovedrollen i analytisk tallteori (se seksjon 1.6).

Det er to måter å betrakte de komplekse tallene på. Vi kan enten tenke på dem som en utvidelse av tallbegrepet slik at vi kan trekke kvadratrøtter av negative tall, eller vi kan tenke på dem som vektorer i planet som multipliseres på en ny og snedig måte. Tar vi det siste synspunktet, er det naturlig å spørre om vi på en tilsvarende måte kan multiplisere vektorer i rommet. Dette spørsmålet forfulgte den irske matematikeren William Rowan Hamilton (1805–1865) i en årrekke.

I første omgang ville vi kanskje foreslå vektorproduktet (kryssproduktet) som en kandidat, men det tilfredsstillte ikke Hamiltons krav – han ønsket nemlig en multiplikasjon som også gjorde det mulig å dividere. Etter mer enn ti års arbeid fant Hamilton løsningen i et tankeglimt i 1843 – det var umulig å multiplisere 3-dimensjonale vektorer (x, y, z) på denne måten, men til gjengjeld fantes det en multiplikasjon for 4-dimensjonale vektorer (x, y, z, w) ! Hamilton kalte de nye vektorene *kvaternioner*, og satte i gang å utforske deres egenskaper med spesiell tanke på fysikkens behov. Du finner en levende beskrivelse av Hamiltons kamp med kvaternionene i Bells bok [2]. Her er hans egen beskrivelse i et brev til sønnen Archibald mange år senere:

«But on the 16th day of the same month—which happened to be a Monday, and a Council day of the Royal Irish Academy—I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me, along the Royal Canal, to which she had perhaps driven; and although she talked with me now and then, yet an under-current of thought was going on in my mind, which gave at last a result, whereof it is not too much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close; and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw, immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work, by myself if spared, and at all events on the part of others, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery. Nor could I resist the impulse—unphilosophical as it may have been—to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge, as we passed it, the fundamental formula with the symbols, i, j, k ; namely,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

which contains the Solution of the Problem, but of course, as an inscription, has long since mouldered away.»

Kvaternionene hadde en uventet egenskap – multiplikasjonen var ikke lenger kommutativ, så generelt ville $ab \neq ba$! Dette satte folk på tanken at de kanskje kunne finne enda flere tallsystemer hvis de bare ga opp flere krav. Mulighetene ble utforsket av

den engelske matematikeren Arthur Cayley (1821–1895) og tyskeren Georg Frobenius (1849–1917), men av de tallsystemene som går utover de komplekse tallene, er det bare kvaternionene som har en viss generell interesse.

La oss til slutt gå tilbake til ligningene. Da algebraens fundamentalteorem endelig ble bevist i 1799, visste man omsider at enhver n -te gradsligning har n komplekse røtter. Gauss' bevis sa imidlertid ingen ting om hvordan man finner disse løsningene, og heller ikke på annen måte hadde det vært noen fremgang siden Ferrari løste fjerdegradsligningen midt på 1500-tallet. En ny, overraskende utvikling stod imidlertid for døren. For å forstå hva den går ut på, må vi først presisere språkbruken.

Ser vi på løsningsformlene for annen-, tredje- og fjerdegradsligningene er de alle av samme type. Formelen for annengradsligningen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

er bygd opp av koeffisientene til ligningen (det vil si a , b , c), de algebraiske operasjonene $+$, $-$, \cdot , $:$, og kvadratroten $\sqrt{\quad}$. Tilsvarende gjelder for tredje- og fjerdegradsligningen bortsett fra at vi trenger tredje- og fjerderøtter i tillegg til kvadratrøttene. Dersom løsningene til en ligningstype kan skrives på denne måten ved hjelp av koeffisienter, algebraiske operasjoner og rottegn, sier vi at ligningene er *løsbare ved rotutdraging*.

I 1799 publiserte den italienske legen og matematikeren Paolo Ruffini (1765–1822) et bevis for at den generelle femtegradsligningen *ikke* er løsbar ved rotutdraging. Ruffinis bevis var imidlertid meget uklart og svært vanskelig å lese, og det ble lite påaktet i samtiden. Gehalten i beviset diskuteres ennå idag, men det ser nå ut til å være avklart at selv om Ruffini hadde mange av de riktige ideene, så har beviset hans vesentlige mangler (se Skaus artikkel [14]). Det første fullverdige beviset ble publisert av Niels Henrik Abel (1802–1829) i 1824. Abel (som ikke kjente til Ruffinis arbeider) trodde først han hadde funnet en løsningsformel for femtegradsligningen, men oppdaget raskt feilen og beviste isteden det omvendte. I løpet av sitt korte liv klarte ikke Abel å nå sitt endelige mål innenfor ligningsteorien som var å klassifisere de ligningstypene som er løsbare ved rotutdraging, men dette arbeidet ble slutført kort tid etter av den unge franskmannen Evariste Galois (1811–1832). Vi skal komme tilbake til historien om Abel og Galois i seksjon 9.6.

Selv om ligninger ikke er løsbare ved rotutdraging, kan det selvfølgelig hende at de kan løses på annen måte, og rundt 1850 viste den franske matematikeren Charles Hermite (1822–1901) at den generelle femtegradsligningen kan løses ved hjelp av såkalte elliptiske modulfunksjoner. Hundre år etter Abels tid viste den norske matematikeren Richard Birkeland (1879–1928) at femtegradsligningen også kan løses ved hjelp av en annen type funksjoner – de hypergeometriske. Ingen av disse løsningstypene har imidlertid noen praktisk interesse.

Vil du lese mer om komplekse tall, inneholder Holmes hefte [7] mange morsomme eksempler og oppgaver. Ebbinghaus et al. [5] har mye interessant stoff både om komplekse tall, kvaternioner og mer generelle tallsystemer, men fremstillingen er ofte ganske avansert. Onstads beskrivelse av ligningenes historie [11] er derimot meget tilgjengelig, og vil du vite mer, finnes det en mer omfattende bok på dansk redigert av Kirsti Andersen [1]. Øystein Ore har skrevet glimrende biografier av Cardano [13] og Abel [12]. (Du vil finne flere bøker og artikler om Abel i litteraturlisten til kapittel 9.)

Litteratur

- [1] Andersen, Kirsti (red.): *Kilder og kommentarer til ligningernes historie*, TRIP forlag, Vejle, 1986.
- [2] Bell, E.T.: *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York, 1961.
- [3] Berggren, J.L.: *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [4] Brun, Viggo: *Regnekunsten i det gamle Norge*, Universitetsforlaget, Oslo, 1962.
- [5] Ebbinghaus, H. et al.: *Numbers*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [6] FitzGerald, Edward: *Ruba'iyat of Omar Khayyam*, Penguin Books, London, 1989.
- [7] Holme, Finn: *Komplekse tall*, Temahefte 3 i matematikk, Gyldendal, Oslo, 1993.
- [8] Khayyam, Omar: *Ruba'iyat*, utvalg og gjendiktning ved Johannes Gjerdåker, Samlaget, Oslo, 1997.
- [9] Linnestad, Bjørn: *Vesen gjennom vidd og vers*, Vestby historielag, Vestby, 1992.
- [10] Pedersen, Kirsti Møller: «Caspar Wessel og de komplekse talls representasjon», *NORMAT* 27 (1979), 49–55.
- [11] Onstad, Torgeir: *Fra Babel til Abel – likningenes historie*, NKS-Forlaget, Oslo, 1994.
- [12] Ore, Øystein: *Niels Henrik Abel*, Gyldendal, Oslo, 1954.
- [13] Ore, Øystein: *Cardano: The Gambling Scholar*, Dover Publications, New York 1965.
- [14] Skau, Christian: «Gjensyn med Abels og Ruffinis bevis for umuligheten av å løse den generelle n -tegradsligningen algebraisk når $n \geq 5$ », *NORMAT* 38 (1990), 53–84.
- [15] Struik, Dirk: *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*, Princeton University Press, Princeton, 1986.
- [16] Wessel, Caspar: *Om Directionens analytiske Betegning : 1798–1998, med en biografisk skisse av Nils Voje Johansen*. Wesselakademiets småskrifter nr 1, Vestby, 1998.
- [17] Wessel, Caspar: *On the analytical representation of direction: an attempt applied chiefly to solving plane and spherical polygons*: oversatt av Flemming Damhus, med innledende kapitler av Bodil Branner, Nils Voje Johansen and Kirsti Andersen, Matematisk-fysiske meddelelser, Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab; 46:1, København, 1999.

4 Følger

1 lagt til 1 blir til
2 lagt til 1 blir til
3 lagt til 2 blir til
5 lagt til 3 blir til
8... slik måtte Chagall
ha kjent Fibonacci's tall.
— Lillebjørn Nilsen (1950–),
Chagalls gylne snitt

En *følge* er en uendelig sekvens av tall

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Tallene $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ kalles *leddene* i følgen. Noen eksempler på følger er: følgen av alle kvadrattall

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots, n^2, \dots,$$

følgen av alle stambrøker

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

følgen av cosinus til alle naturlige tall

$$\cos 1, \cos 2, \cos 3, \dots, \cos n, \dots$$

Det tar mye plass og tid å skrive ut leddene i følgen slik vi har gjort ovenfor, og man er derfor blitt enige om å benytte $\{a_n\}$ som en forkortet skrivemåte for følgen

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Med denne notasjonen kan vi skrive følgene ovenfor som $\{n^2\}$, $\{1/n\}$ og $\{\cos n\}$. Det er selvfølgelig lov å bruke andre bokstaver enn n i denne notasjonen, så vi kunne godt ha skrevet $\{k^2\}$, $\{1/k\}$, $\{\cos k\}$ eller $\{m^2\}$, $\{1/m\}$, $\{\cos m\}$ isteden.

I eksemplene ovenfor er a_1 alltid det første leddet i følgen, men det hender at det er nyttig å starte med en annen verdi enn $n = 1$. Starter vi for eksempel med $n = -2$, får vi en følge

$$a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Dersom det er viktig å vite hvilke verdier av n som er med i følgen, kan vi angi dette i den forkortede notasjonen ved å skrive $\{a_n\}_{n=-2}^{\infty}$.

Følger spiller en sentral rolle i matematikken, teoretisk så vel som praktisk. I dette kapitlet skal vi først se hvordan følger kan brukes til å løse en del praktiske problemer, for deretter å gå over til mer teoretiske spørsmål.

4.1 Homogene differensligninger

Etter sin voldsomme oppblomstring innenfor gresk og hellenistisk kultur, gikk matematikken i Europa inn i en forfallsperiode. Mens arven fra grekerne ble ivaretatt og videreført av arabiske matematikere, måtte deres europeiske kolleger nøye seg med å begrense forfallet så mye som mulig. En av de få europeiske middelaldermatematikerne som ytet selvstendige bidrag til matematikken, var Leonardo Pisano (ca. 1170 til ca. 1250), bedre kjent som Fibonacci (sønn av Bonaccio).

Fibonacci's hovedverk er *Liber abaci* fra 1202. Historisk er denne boken viktig fordi den inneholder det første systematiske forsøket i Europa på å erstatte de upraktiske romertallene med det langt smidigere tallsystemet som vi bruker i dag, og som araberne hadde brakt med seg fra India. Det er imidlertid ikke denne viktige historiske innsatsen Fibonacci først og fremst huskes for, men for følgende lille passasje i *Liber abaci*: «En mann har et par kaniner i en inngjerdet have. Vi ønsker å vite hvor mange par som avles i løpet av ett år dersom disse kaninene er slik av natur at de føder et nytt par hver måned, og begynner å formere seg to måneder etter at de er født. La det første paret føde et nytt par den første måneden, slik at de fordobler seg og er 2 par etter en måned. Av disse 2 parene vil ett, nemlig det første, avle et nytt par i den andre måneden, slik at det ialt er 3 par etter to måneder. Av disse vil 2 unnfange i neste måned, slik at det i den tredje måneden blir født 2 par kaniner. Altså er det 5 par kaniner i denne måneden. Av disse vil så 3 par unnfange neste måned, slik at det i den fjerde måneden vil være 8 par. Av disse parene vil de første 5 føde 5 nye par, som addert til de 8, gir 13 par i den femte måneden, og av disse vil 5 par (som ble født den samme måneden) ikke føde i neste måned, men de andre vil unnfange. Altså vil det være 21 par etter seks måneder. . . [Ved å fortsette på denne måten finner Fibonacci ut at det i de neste månedene vil være henholdsvis 34, 55, 89, 144, 233 og 377 kaniner. Han avslutter med å si:] . . . Til slutt vil det altså være 377. Og dette er tallet på kaninpar som nedkommer fra det opprinnelige paret i løpet av et år. Du kan se i margen hvordan vi har gjort dette, nemlig ved å kombinere det første tallet med det andre, altså 1 og 2, det andre med det tredje, det tredje med fjerde. . . Til slutt kombinerer vi det tiende med det ellevte, altså 144 med 233, og vi har summen av alle kaninene nevnt ovenfor, nemlig 377, og på denne måten kan du gjøre det i det tilfellet hvor det er uendelig mange måneder.»

nullte	1
første	2
andre	3
tredje	5
fjerde	8
femte	13
sjette	21
sjuende	34
åttende	55
niende	89
tiende	144
ellevte	233
tolvte	377

Det er tallfølgen ovenfor som først og fremst har gjort Fibonacci kjent; tallene 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . (det er vanlig å ta med et ekstra ett-tall til å begynne med) kalles *Fibonacci-tallene*, og de dukker opp i forbausende mange sammenhenger. Som Fibonacci selv påpeker til slutt i sitatet, er det lett å huske hvordan følgen av Fibonacci-tallene er bygget opp – hvert ledd (bortsett fra de to første) er summen av de to foregående; for eksempel er 21 summen av 8 og 13, mens 34 er summen av 13 og 21.

Det er ikke vanskelig å se hvorfor vi har denne sammenhengen. Lar vi x_n betegne antall par etter n måneder, så må

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad (1)$$

siden antall par etter $n + 2$ måneder må være lik antallet etter $n + 1$ måneder (som er x_{n+1}), pluss antallet nyfødte par (som er x_n , siden hvert par som var født for minst to måneder siden, nedkommer med et nytt par).

I moderne terminologi kan vi si at Fibonacci i sitatet ovenfor setter opp en enkel matematisk modell for hvordan kaniner formerer seg, og så sjekker gjennom regning hvilke konsekvenser denne modellen har. Løsningen hans har imidlertid en ulempe – den er temmelig tungvint å bruke dersom vi ønsker å se langt inn i fremtiden. Vil vi for eksempel vite hvor mange kaninpar det er etter fem år (dvs. 60 måneder), må vi gjennomføre 48 operasjoner til. Det vi kunne ønske oss er en formel som forteller oss dette direkte uten at vi behøver å regne ut alle de 59 første leddene. Ser vi på følgen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

er det vanskelig å forestille seg hva slags formel dette skulle være, men den finnes faktisk og har den forbausende formen

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad (2)$$

der x_n er det n -te leddet i følgen $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ (på grunn av det ekstra ett-tallet til å begynne med er nummereringen litt forskjellig fra Fibonacci). Denne formelen er forbausende av mange grunner – det virker for eksempel usannsynlig at uttrykket på høyre side alltid skal være et helt tall, og det er høyst uklart hva de irrasjonale tallene $(1 + \sqrt{5})/2$ og $(1 - \sqrt{5})/2$ har med Fibonacci problem å gjøre.

Hensikten med denne seksjonen er å forklare hvordan man kommer frem til en formel som (2). Vi skal imidlertid gjøre rammen litt videre og ikke bare behandle Fibonacci-tallene, men alle følger som tilfredsstillende en relasjon av samme type som (1) – det vil si

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad (3)$$

der b og c er kjente tall og $c \neq 0$. Slike relasjoner kalles *annenordens homogene differensligninger* eller *rekurrensrelasjoner*. Som vi skal se, dukker de opp i mange forskjellige sammenhenger.

Det er lurt å tenke på (3) som en ligning hvor den ukjente størrelsen er en følge: Gitt tallene b og c , søker vi en følge $\{x_n\}$ slik at (3) holder for alle n . Det viser seg at det alltid finnes uendelig mange slike følger, men som regel ønsker vi at vår følge skal tilfredsstillende visse tilleggskrav. For Fibonacci-følgen vet vi for eksempel at vi i tillegg til (1) ønsker at $x_1 = 1$ og $x_2 = 1$. Slike tilleggskrav kan benyttes til å plukke den løsningen av differensligningen som vi er interessert i.

Det er ikke så lett å gå rett løs på (3), så vi skal først se på et enklere problem. Gitt et tall r , ønsker vi å finne de følgene $\{x_n\}$ slik at

$$x_{n+1} - rx_n = 0 \quad (4)$$

for alle n . Dette problemet kalles en *homogen, førsteordens differensligning*.

Bemerkning

Det er nå lett å innse hvorfor vi bruker ordene førsteordens og annenordens om ligningene våre: I en *førsteordens* ligning (4) kan hvert ledd x_{n+1} regnes ut ved hjelp av ett foregående ledd x_n , og i en *annenordens* ligning (3) kan hvert ledd x_{n+2} regnes ut fra to foregående ledd x_{n+1} og x_n . Generelt kalles

$$x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + a_2x_{n+k-2} + \cdots + a_{k-1}x_{n+1} + a_kx_n = 0,$$

der $a_1, a_2, \dots, a_k, a_k \neq 0$ er gitte tall, for en k -te ordens *homogen, lineær differensligning*. At ligningen er *homogen*, betyr rett og slett at det står 0 og ikke en mer generell funksjon $f(n)$ på høyre side av ligningen. Vi skal studere inhomogene ligninger i neste seksjon.

Vi er blitt enige om å begynne med homogene førsteordens ligninger, det vil si ligninger på formen

$$x_{n+1} = rx_n. \quad (5)$$

Anta nå at vi kjenner det første leddet x_0 i den ukjente følgen $\{x_n\}$. Bruker vi (5) med $n = 0$, ser vi at $x_1 = rx_0$. Bruker vi så (5) med $n = 1$, får vi $x_2 = rx_1 = r^2x_0$. Deretter gir (5) med $n = 2$ at $x_3 = rx_2 = r^3x_0$, og så videre. Generelt får vi at

$$x_n = r^n x_0. \quad (6)$$

Siden vi kan velge det første leddet x_0 til å være et hvilket som helst reelt tall C , betyr dette at den generelle løsningen til differensligningen (5) er

$$x_n = Cr^n. \quad (7)$$

Vi skriver opp dette som vårt første resultat i denne seksjonen.

4.1.1 Setning

En følge $\{x_n\}$ er en løsning av differensligningen

$$x_{n+1} = rx_n$$

hvis og bare hvis det finnes et reelt tall C slik at $x_n = Cr^n$ for alle n .

La oss ta med et enkelt eksempel som gir en liten indikasjon på hvorfor differensligninger er viktige.

4.1.2 Eksempel

På en konto som gir 4 % rente setter vi inn 5000 kroner. Hvor mye har dette beløpet vokst til etter 15 år?

Dersom beløpet etter n år har vokst til x_n kroner, må beløpet ett år senere være $1.04 \cdot x_n$ kroner, dvs.

$$x_{n+1} = 1.04x_n.$$

Dette er en differensligning av den typen vi nettopp har studert, og vi ser at den generelle løsningen er

$$x_n = Cr^n = C(1.04)^n.$$

I tillegg vet vi at $x_0 = 5000$, så vi må ha

$$5000 = C(1.04)^0 = C.$$

Altså er $C = 5000$, og vi får løsningen

$$x_n = 5000(1.04)^n.$$

Etter 15 år har det opprinnelige beløpet altså vokst til

$$x_{15} = 5000 \text{ kr.} \cdot (1.04)^{15} = 9004.72 \text{ kr.}$$

Selvfølgelig kunne vi ha løst denne oppgaven vel så lett uten å bruke differensligninger, men i neste seksjon skal vi ta utgangspunkt i en beslektet oppgave som ikke er så lett å løse uten bruk av teori. ■

Vi har nå vist hvordan førsteordens, homogene differensligninger kan løses, og det er på tide å gå løs på annenordens – altså på ligninger av typen

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0. \quad (8)$$

Det er fristende å prøve samme strategi som vi brukte på førsteordens ligninger: Antar vi at x_0 og x_1 er kjent, kan vi bruke (8) med $n = 0$ til å beregne

$$x_2 = -bx_1 - cx_0.$$

Deretter kan vi bruke (8) med $n = 1$ til å beregne

$$x_3 = -bx_2 - cx_1 = -b(-bx_1 - cx_0) - cx_1 = (b^2 - c)x_1 + bcx_0,$$

og så videre. Dessverre leder denne prosedyren bare til mer og mer kompliserte formler som det er vanskelig å få informasjon ut av. Men én viktig ting forteller den oss – at verdiene til x_0 og x_1 bestemmer hele løsningen:

4.1.3 Lemma

La b_0 og b_1 være to reelle tall. Da finnes det nøyaktig én løsning av (8) slik at $x_0 = b_0$ og $x_1 = b_1$.

Bemerkning

Dersom vi er gitt to tall b_0 og b_1 , og ønsker en løsning av differensligningen slik at $x_0 = b_0$ og $x_1 = b_1$, så kaller vi b_0 og b_1 for *begynnelsesbetingelser* eller *initialbetingelser*. Det er lett å skrive et dataprogram som starter med b_0 og b_1 som input, og deretter beregner leddene i følgen $\{x_n\}$ fortløpende. Dette kaller vi en *numerisk* løsning av differensligning, mens den formelen vi er på jakt etter, kalles en *analytisk* løsning. For mer kompliserte ligninger er numeriske løsninger det eneste vi kan håpe på.

En annen nyttig observasjon er også lett å bevise:

4.1.4 Lemma

Dersom følgene $\{y_n\}$ og $\{z_n\}$ er to løsninger av differensligningen $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$, og C og D er to vilkårlige tall, så er følgen $\{x_n\}$ der $x_n = Cy_n + Dz_n$, også en løsning.

Bevis: At $\{y_n\}$ og $\{z_n\}$ er løsninger, betyr at

$$y_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$$

og

$$z_{n+2} + bz_{n+1} + cz_n = 0.$$

Multipliserer vi den første ligningen med C og den andre med D , og legger sammen resultatene, får vi

$$(Cy_{n+2} + Dz_{n+2}) + b(Cy_{n+1} + Dz_{n+1}) + c(Cy_n + Dz_n) = 0.$$

Med andre ord

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0,$$

som viser at $\{x_n\}$ er en løsning. ■

Dette resultatet gir oss en effektiv metode til å produsere mange løsninger dersom vi har noen få, men foreløpig er det til lite hjelp siden vi ikke kjenner noen løsninger i det hele tatt. Hvordan skal vi så få fatt i løsninger til våre annenordens differensligninger? La oss være litt frekke. Vi husker at førsteordens differensligninger hadde løsninger på formen $x_n = r^n$. Med litt flaks har kanskje annenordens ligningene også slike løsninger? Vi setter inn i ligningen og prøver. Dersom $x_n = r^n$, så er

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = r^{n+2} + br^{n+1} + cr^n = r^n(r^2 + br + c).$$

Skal dette uttrykket være null for alle n (inkludert $n = 0$), må

$$r^2 + br + c = 0.$$

Vi ser altså at $x_n = r^n$ er en løsning av differensligningen vår hvis og bare hvis r er en rot i annengradsligningen $r^2 + br + c = 0$. Denne annengradsligningen kalles den *karakteristiske* ligningen til differensligningen $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$.

Hvis den karakteristiske ligningen har to reelle røtter r_1 og r_2 , har vi dermed to løsninger $x_n = r_1^n$ og $x_n = r_2^n$. Men ikke alle reelle annengradsligninger har to reelle røtter – noen har bare en rot (med multiplisitet 2), og noen har to konjugerte, komplekse røtter (husk setning 3.4.8). Vi skal se på disse tilfellene hver for seg.

Tilfelle 1: To reelle røtter

Anta at den karakteristiske ligningen har to forskjellige, reelle røtter r_1 og r_2 . Etter det vi nettopp så, må differensligningen ha løsninger $y_n = r_1^n$ og $z_n = r_2^n$. Lemma 4.1.4 forteller oss dermed at

$$x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$$

må være en løsning for alle mulige valg av konstanter C og D .

Med et slag er situasjonen forandret, og vi har en hærskare med løsninger. Men har vi funnet alle? Svaret er «ja», og nøkkelen er lemma 4.1.3. Dette lemmaet forteller oss at enhver løsning er bestemt av sine begynnelsesverdier $x_0 = b_0$ og $x_1 = b_1$. For å vise at vi har funnet samtlige løsninger, må vi derfor vise at uansett hva b_0 og b_1 er, så kan vi tilpasse konstantene C og D slik at $x_0 = b_0$ og $x_1 = b_1$, det vil si

$$b_0 = Cr_1^0 + Dr_2^0 = C + D$$

og

$$b_1 = Cr_1^1 + Dr_2^1 = Cr_1 + Dr_2.$$

Siden $r_1 \neq r_2$, kan vi løse dette ligningsettet med hensyn på C og D . Vi får

$$C = \frac{r_2 b_0 - b_1}{r_2 - r_1} \quad \text{og} \quad D = \frac{r_1 b_0 - b_1}{r_1 - r_2}.$$

Dette viser at en hvilket som helst løsning kan skrives på formen $x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$.

La oss oppsummere våre resultater så langt.

4.1.5 Setning

La $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$ være en annenordens differensligning, og anta at den karakteristiske ligningen $r^2 + br + c = 0$ har to forskjellige, reelle røtter r_1 og r_2 . Løsningene til differensligningen er nøyaktig de følgene som kan skrives på formen

$$x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$$

der C og D er konstanter.

Bemerkning

Det er vanlig å uttrykke dette resultatet ved å si at

$$x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$$

er den *generelle løsning* til differensligningen $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$. Med en *spesiell* eller *partikulær* løsning, mener vi simpelthen én av de løsningene vi får ved å velge spesielle verdier for konstantene C og D . Denne terminologien kan virke en smule underlig, men den er ganske nyttig og svært utbredt.

4.1.6 Eksempel

Finn den generelle løsningen til differensligningen

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0.$$

Den karakteristiske ligningen er $r^2 + r - 6 = 0$ som har løsningene $r = 2$ og $r = -3$. Differensligningen har dermed generell løsning

$$x_n = C2^n + D(-3)^n.$$



4.1.7 Eksempel

Finn følgen som oppfyller differensligningen

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0$$

og begynnelsesbetingelsene $x_0 = 1, x_1 = -2$.

I dette tilfellet er vi altså ikke interessert i alle løsningene, men bare i den ene som tilfredsstiller tilleggskravene $x_0 = 1, x_1 = -2$. Allikevel lønner det seg å finne den generelle løsningen først. Siden den karakteristiske ligningen

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

har røttene $r = 1$ og $r = 4$, er den generelle løsningen

$$x_n = C \cdot 1^n + D4^n = C + D4^n.$$

I tillegg skal

$$1 = x_0 = C + D$$

$$-2 = x_1 = C + 4D.$$

For å løse dette ligningsettet subtraherer vi den nederste ligningen fra den øverste, og får $3 = -3D$. Altså er $D = -1$, og setter vi dette inn i den første ligningen, ser vi at $C = 2$. Dermed har vi løsningen

$$x_n = 2 - 4^n.$$



4.1.8 Eksempel

Det er på tide å vende tilbake til Fibonacci-tallene. Vi kan nå oppfatte Fibonaccis relasjon $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ som differensligningen

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0.$$

I tillegg har vi begynnelseskravene $x_1 = 1$ og $x_2 = 1$. Den karakteristiske ligningen

$$r^2 - r - 1 = 0$$

har røttene $r = (1 \pm \sqrt{5})/2$, så den generelle løsningen til differensligningen er

$$x_n = C \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + D \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

For å tilfredsstille begynnelseskravene, må vi i tillegg ha

$$1 = x_1 = C \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + D \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$1 = x_2 = C \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + D \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2.$$

Løser vi disse ligningene (gjør det!), får vi

$$C = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{og} \quad D = \frac{-\sqrt{5}}{5}.$$

Dette betyr at

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Vi har dermed utledet den underlige formelen for det n -te Fibonacci-tallet som vi innledet denne seksjonen med. Underveis har vi fått avmystifisert de to irrasjonale tallene $(1 + \sqrt{5})/2$ og $(1 - \sqrt{5})/2$ som opptrer i denne formelen – de er rett og slett røttene i den karakteristiske ligningen. ■

Tilfelle 2: Én reell rot

La oss nå se på tilfellet der den karakteristiske ligningen $r^2 + br + c = 0$ bare har én rot r_1 . I dette tilfellet gir argumentene ovenfor oss bare ett sett med løsninger, $x_n = Cr_1^n$, og det er ikke tilstrekkelig til å dekke alle begynnelsesbetingelser. Men heldigvis finnes det en annen type løsninger i dette tilfellet.

4.1.9 Lemma

Anta at den karakteristiske ligningen $r^2 + br + c = 0$ bare har én rot r_1 . Da er $x_n = nr_1^n$ en løsning av differensligningen $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$.

Bevis: Siden ligningen bare har én rot, må

$$r^2 + br + c = (r - r_1)^2.$$

(Hvis dette høres mystisk ut, ta enten en titt på algebraens fundamentalteorem 3.5.1 eller repeter seksjon 1.5.) Multipliserer vi ut høyresiden, ser vi at

$$r^2 + br + c = r^2 - 2r_1r + r_1^2,$$

og siden dette skal holde for alle r , må $b = -2r_1$ og $c = r_1^2$. Differensligningen kan derfor skrives

$$x_{n+2} - 2r_1x_{n+1} + r_1^2x_n = 0.$$

La oss nå sjekke at den foreslåtte løsningen $x_n = nr_1^n$ virkelig passer i differensligningen. Siden $x_{n+2} = (n+2)r_1^{n+2}$, $x_{n+1} = (n+1)r_1^{n+1}$ og $x_n = nr_1^n$, er

$$\begin{aligned} x_{n+2} - 2r_1x_{n+1} + r_1^2x_n &= (n+2)r_1^{n+2} - 2r_1(n+1)r_1^{n+1} + r_1^2nr_1^n \\ &= r_1^{n+2}[(n+2) - 2(n+1) + n] \\ &= r_1^{n+2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

og følgelig er $x_n = nr_1^n$ en løsning. ■

Vi vet nå at både $y_n = r_1^n$ og $z_n = nr_1^n$ er løsninger av differensligningen vår. Ifølge lemma 4.1.4 er da $x_n = Cr_1^n + Dnr_1^n$ også en løsning for ethvert valg av konstanter C og D . Men er dette alle løsningene? Igjen må vi sjekke om vi kan få frem alle begynnelsesverdier b_0 og b_1 gjennom passende valg av C og D . Spørsmålet er altså om vi alltid kan løse ligningene

$$\begin{aligned} b_0 &= Cr_1^0 + D \cdot 0 \cdot r_1^0 = C \\ b_1 &= Cr_1^1 + D \cdot 1 \cdot r_1^1 = Cr_1^1 + Dr_1^1, \end{aligned}$$

med hensyn på C og D . Det kan vi – vi får

$$C = b_0$$

$$D = \frac{b_1 - Cr_1}{r_1}.$$

(Vi jukser litt her; skal vi være pinlig korrekte, må vi påpeke at ligningsystemet ikke har noen løsning når $r_1 = 0$. Men hvis $r_1 = 0$ er en dobbeltrot, må differensligningen være $x_{n+2} + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_n = 0$, som er totalt uinteressant.) Vi har dermed vist:

4.1.10 Setning

Anta at den karakteristiske ligningen $r^2 + br + c = 0$ bare har én rot r_1 (og at $r_1 \neq 0$). Da er den generelle løsningen til differensligningen

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

gitt ved

$$x_n = Cr_1^n + Dnr_1^n.$$

4.1.11 Eksempel

Finn en følge $\{x_n\}$ slik at

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$$

og $x_0 = 1, x_1 = 8$.

Den karakteristiske ligningen $r^2 - 4r + 4 = 0$ har bare én rot, $r = 2$ (sjekk det!). Den generelle løsningen til differensligningen er derfor

$$x_n = C2^n + Dn2^n.$$

I tillegg har vi begynnelsesbetingelsene

$$1 = x_0 = C \cdot 2^0 + D \cdot 0 \cdot 2^0 = C$$

$$8 = x_1 = C \cdot 2^1 + D \cdot 1 \cdot 2^1 = 2C + 2D.$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $C = 1$ og $D = 3$. Følgen vår er altså

$$x_n = 2^n + 3n \cdot 2^n = (1 + 3n) \cdot 2^n.$$



Tilfelle 3: To komplekse røtter

Til slutt skal vi se på tilfellet der den karakteristiske ligningen $r^2 + br + c = 0$ har to forskjellige, *komplekse* røtter r_1 og r_2 . Egentlig er ikke dette tilfellet så forskjellig fra tilfellet med to *reelle* røtter, og alle de argumentene og beregningene vi foretok i det tilfellet, gjelder fortsatt for komplekse røtter. Med andre ord er den generelle løsningen på formen

$$x_n = Cr_1^n + Dr_2^n.$$

Den eneste forskjellen er at siden r_1 og r_2 nå er komplekse tall, så må vi også regne med at C og D kan være komplekse. Et eksempel vil gjøre situasjonen klarere.

4.1.12 Eksempel

Vi tar for oss differensligningen

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$$

med begynnelsesbetingelser $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

Den karakteristiske ligningen

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

har to komplekse røtter

$$r_1 = -1 + i \quad \text{og} \quad r_2 = -1 - i.$$

Den generelle løsningen til differensligningen er derfor

$$x_n = C(-1 + i)^n + D(-1 - i)^n.$$

Det gjenstår å finne konstanter C og D som oppfyller begynnelseskravene $x_0 = 1$ og $x_1 = 2$. Vi har

$$1 = x_0 = C + D$$

$$2 = x_1 = C(-1 + i) + D(-1 - i).$$

Selv om disse ligningene inneholder komplekse tall, kan de løses på vanlig måte: Multipliserer vi den første ligningen med $(1 + i)$ og adderer resultatet til den andre ligningen, får vi

$$3 + i = 2iC.$$

Følgelig er (husk regnereglene for komplekse tall):

$$C = \frac{3 + i}{2i} = \frac{(3 + i)(-2i)}{(2i)(-2i)} = \frac{-6i + 2}{4} = \frac{1 - 3i}{2}.$$

Setter vi dette inn i den første ligningen, får vi $1 = \frac{1 - 3i}{2} + D$. Altså er

$$D = 1 - \frac{1 - 3i}{2} = \frac{1 + 3i}{2}.$$

Dermed har vi kommet frem til følgende formel:

$$x_n = \left(\frac{1 - 3i}{2}\right) \cdot (-1 + i)^n + \left(\frac{1 + 3i}{2}\right) \cdot (-1 - i)^n.$$

Dette er uenkelig et uventet uttrykk, og ved første øyekast er det ikke engang opplagt at høyresiden er et reelt tall. Det *må* den imidlertid være dersom regningene våre er riktige – går vi tilbake til den opprinnelige differensligningen, er det innlysende at løsningen er reell. For å vise at formelen ovenfor også gir reelle løsninger, tar vi utgangspunkt i det første leddet

$$z = \left(\frac{1 - 3i}{2}\right) \cdot (-1 + i)^n.$$

Komplekskonjugerer vi dette uttrykket, får vi

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{1-3i}{2}\right) \cdot (-1+i)^n} = \left(\frac{1+3i}{2}\right) \cdot (-1-i)^n,$$

som er det andre leddet i formelen for x_n . Altså er $x_n = z + \bar{z}$, og siden summen av to konjugerte tall alltid er reell (fordi imaginærdelene er motsatt like store og slår hverandre ihjel), er x_n reell. ■

La oss vise at dette er et generelt fenomen:

4.1.13 Setning

La

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

være en annenordens, homogen differensligning med reelle koeffisienter b og c . Anta at den karakteristiske ligningen har to komplekse røtter r og \bar{r} . De reelle løsningene er da

$$x_n = Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n \quad (9)$$

der C er et (fritt valgt) komplekst tall.

Bevis: Siden koeffisientene b og c er reelle, har den karakteristiske ligningen to komplekskonjugerte røtter r og \bar{r} . Den generelle, komplekse løsningen av differensligningen er derfor

$$x_n = Cr^n + D\bar{r}^n$$

der C og D er komplekse tall. Siden løsningen er reell, er spesielt $b_0 = x_0$ og $b_1 = x_1$ reelle tall. Løser vi ligningene

$$\begin{aligned} b_0 = x_0 &= C + D \\ b_1 = x_1 &= Cr + D\bar{r} \end{aligned}$$

for C og D , får vi:

$$C = \frac{\bar{r}b_0 - b_1}{\bar{r} - r} \quad \text{og} \quad D = \frac{rb_0 - b_1}{r - \bar{r}}.$$

Bruker vi at $\overline{r - \bar{r}} = \bar{r} - r$, ser vi at (husk at b_0 og b_1 er reelle):

$$\bar{C} = \overline{\left(\frac{\bar{r}b_0 - b_1}{\bar{r} - r}\right)} = \frac{\overline{\bar{r}b_0 - b_1}}{\overline{\bar{r} - r}} = \frac{rb_0 - b_1}{r - \bar{r}} = D.$$

Dette viser at alle reelle løsninger er på formen (9), og omvendt er det enkelt å se at alle løsninger på denne formen må være reelle. ■

Setningen ovenfor uttrykker den reelle løsningen på et reelt problem ved hjelp av komplekse tall. Finnes det en måte å uttrykke denne sammenhengen på uten å gå

veien om de komplekse tallene? Det gjør det, og ved hjelp av resultatene ovenfor er denne sammenhengen ikke så vanskelig å finne. Anta at

$$x_n = Cr^n + \overline{C}\overline{r}^n$$

er de reelle løsningene av differensligningen vår. Skriver vi $C = A + iB$, så er $\overline{C} = A - iB$. Skriver vi dessuten r på polarform, $r = \rho e^{i\theta}$, så er $\overline{r} = \rho e^{-i\theta}$, og vi får

$$\begin{aligned} x_n &= (A + iB)(\rho e^{i\theta})^n + (A - iB)(\rho e^{-i\theta})^n \\ &= (A + iB)\rho^n e^{in\theta} + (A - iB)\rho^n e^{-in\theta}. \end{aligned}$$

Bruker vi nå at

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

og

$$e^{-in\theta} = \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta),$$

får vi

$$x_n = (A + iB)\rho^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] + (A - iB)\rho^n [\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)].$$

Vi vet at imaginærdelen til dette uttrykket er 0 (det er jo reelt), og regner vi ut realdelen, får vi

$$x_n = 2A\rho^n \cos(n\theta) - 2B\rho^n \sin(n\theta).$$

Siden $C = A + iB$ er et vilkårlig komplekst tall, er A og B (og dermed $2A$ og $-2B$) to vilkårlige reelle tall. Følgelig er den generelle, *reelle* løsningen til differensligningen

$$x_n = E\rho^n \cos(n\theta) + F\rho^n \sin(n\theta)$$

der E og F er vilkårlige, reelle tall.

La oss formulere dette som et eget resultat:

4.1.14 Setning

La

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

være en annenordens, homogen differensligning med reelle koeffisienter b og c . Anta at den karakteristiske ligningen har to komplekse røtter r og \overline{r} . De reelle løsningene til differensligningen er da

$$x_n = E\rho^n \cos(n\theta) + F\rho^n \sin(n\theta)$$

der ρ og θ er henholdsvis modulus og argument til r , og E og F er (fritt valgte) reelle tall.

4.1.15 Eksempel

La oss se hvordan løsningene til differensligningen i eksempel 4.1.12 blir seende ut i

den nye formuleringen. Siden $r = -1 + i$, blir $\rho = \sqrt{2}$ og $\theta = 3\pi/4$. Altså er den generelle løsningen

$$x_n = E2^{n/2} \cos \frac{3n\pi}{4} + F2^{n/2} \sin \frac{3n\pi}{4}.$$



Bemerkning

Utledningen av setning 4.1.14 er et utmerket eksempel på bruken av komplekse tall i reelle problemstillinger. Selvfølgelig er det mulig å komme frem til dette resultatet uten å bruke komplekse tall, men det krever en ny idé – vi må på en eller annen måte få ferten av at ρ^n , $\sin(n\theta)$ og $\cos(n\theta)$ har noe med løsningen å gjøre. Bruker vi komplekse tall, trenger vi ikke noen ny idé – alt vi trenger er å omformulere de komplekse løsningene i reelle termer.

Oppsummering

La oss samle resultatene vi har kommet frem til i denne seksjonen i ett teorem.

4.1.16 Teorem

La

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

være en annenordens, homogen differensligning med reelle koeffisienter.

- a) Dersom den karakteristiske ligningen $r^2 + br + c = 0$ har to forskjellige, reelle røtter r_1 og r_2 , så er den generelle løsningen til differensligningen

$$x_n = Cr_1^n + Dr_2^n,$$

der C og D er vilkårlige reelle tall.

- b) Dersom den karakteristiske ligningen bare har én (reell) rot $r \neq 0$, så er den generelle løsningene av differensligningen

$$x_n = Cr^n + Dnr^n,$$

der C og D er vilkårlige reelle tall.

- c) Dersom den karakteristiske ligningen har to komplekse røtter r og \bar{r} , så er den generelle, reelle løsningen

$$x_n = Cr^n + \overline{C}\bar{r}^n,$$

der C er et vilkårlig, komplekst tall. Denne løsningen kan også skrives

$$x_n = E\rho^n \cos(n\theta) + F\rho^n \sin(n\theta),$$

der ρ og θ er henholdsvis modulus og argument til r , og E og F er vilkårlige reelle tall.

Anvendelser

Hvorfor er vi interessert i å løse differensligninger? Hittil er kaninene til Fibonacci den eneste praktiske anvendelsen vi har sett, men til slutt i denne seksjonen skal vi ta for oss to eksempler som viser andre anvendelsesområder.

4.1.17 Eksempel

Vi har klosser i tre forskjellige farger – røde, hvite og svarte. De hvite og de svarte er 1 centimeter lange, mens de røde er 2 centimeter. Vi setter klossene etter hverandre til et «tog» som er 50 centimeter langt, og lurer på hvor mange forskjellige tog vi kan lage.



Figur 4.1.1. Et 10 centimeter langt «tog»

Vi begynner med et lite triks. I stedet for å konsentrere oss om de femti centimetrene vi ble spurt om, vil vi generalisere spørsmålet til en hvilken som helst lengde. La x_n være antall tog som er n centimeter lange. Vi må da ha

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n \quad (10)$$

siden et tog på $n + 2$ centimeter kan fremkomme på to måter: Den ene muligheten er at vi starter med et tog på $n + 1$ centimeter og legger til en kloss på 1 centimeter. Siden det finnes x_{n+1} tog av lengde $n + 1$, og vi kan velge om vi vil legge til en hvit eller en svart kloss, må det finnes $2x_{n+1}$ slike kombinasjoner. Den andre muligheten er å starte med et tog på n centimeter og legge til en rød kloss. Slike tog er det x_n av. Til sammen har vi da $2x_{n+1} + x_n$ muligheter, akkurat som ligning (10) sier.

Vi ser nå vitsen med å generalisere spørsmålet; vi har oppdaget at følgen $\{x_n\}$ må være en løsning av differensligningen

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0.$$

For å se *hvilken* løsning det er, må vi finne begynnelsesverdiene. Siden det er to tog som er 1 centimeter lange (nemlig de som består av henholdsvis en hvit og en svart kloss), må $x_1 = 2$. I tillegg må $x_2 = 5$ siden det finnes fem tog som er to centimeter lange (fire av disse togene består av to klosser på en centimeter, og det siste av én kloss på to centimeter).

Vi kan nå løse differensligningen. Den karakteristiske ligningen er

$$r^2 - 2r - 1 = 0,$$

som har røttene $r = (1 \pm \sqrt{2})$, så den generelle løsningen er

$$x_n = C(1 + \sqrt{2})^n + D(1 - \sqrt{2})^n.$$

I tillegg må vi kreve

$$\begin{aligned} 2 &= x_1 = C(1 + \sqrt{2}) + D(1 - \sqrt{2}) \\ 5 &= x_2 = C(1 + \sqrt{2})^2 + D(1 - \sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Løser vi dette ligningssettet, får vi $C = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{4}$ og $D = -\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{4}$ (prøv å gjennomføre regningene; de er bryssomme men lærerike). Dermed er

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Vi er interessert i $n = 50$, så vårt svar blir

$$x_{50} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(1+\sqrt{2})^{51} - (1-\sqrt{2})^{51} \right]$$

som er av størrelsesorden 10^{19} . Antallet muligheter er altså enormt, men det overrasker kanskje ikke etter våre tidligere møter med kombinatoriske problemer? ■

I sannsynlighetsregningen finnes det mange problemstillinger som leder til differensligninger. Vi skal se på et typisk eksempel.

4.1.18 Eksempel

Per og Kari spiller om penger. Etter hvert spill må den som taper betale én krone til vinneren. De har bestemt seg for å spille til førstemann er blakk. Kari er flinkere enn Per til å spille og vinner $3/5$ av spillene, men Per starter med 15 kroner mot Kari 5. Hva er sannsynligheten for at det er Kari som vinner til slutt? (Prøv å gjette!)

Igen lønner det seg å generalisere spørsmålet. Per og Kari har til sammen 20 kroner. La x_n være sannsynligheten for at Kari vinner dersom hun starter med n av de 20 kronene (og Per med de gjenværende $20 - n$). Vi er altså i utgangspunktet interessert i å finne x_5 , men det viser seg å være lurt først å finne et uttrykk for alle x_n .

Det er ikke så vanskelig å se at

$$x_n = \frac{3}{5}x_{n+1} + \frac{2}{5}x_{n-1}.$$

Argumentet er som følger (hvis du synes det er vanskelig, kan det være lurt å ta en kikk på det som står om sum- og produktregelen til slutt i seksjon 1.3): x_n er sannsynligheten for at Kari skal vinne dersom hun starter med n kroner. Nå er det to mulige måter Kari kan vinne på: Med $3/5$ sannsynlighet vinner hun første spill, innkasserer én krone, og har nå sannsynlighet x_{n+1} for å sikre seg sluttseieren. Den totale sannsynlighet for at Kari skal vinne på denne måten er $\frac{3}{5}x_{n+1}$. Den andre måten Kari kan vinne på, er gjennom å tape første spill (sannsynlighet $2/5$), gi fra seg én krone, for deretter å vinne sluttseieren med sannsynlighet x_{n-1} . Den totale sannsynligheten for å vinne på denne måten er $\frac{2}{5}x_{n-1}$. Den samlede sannsynligheten for at Kari skal vinne, må være summen av de to sannsynlighetene vi nå har regnet ut, og dermed får vi formelen vi er på jakt etter:

$$x_n = \frac{3}{5}x_{n+1} + \frac{2}{5}x_{n-1}.$$

Snur vi litt om på dette uttrykket, får vi differensligningen

$$x_{n+1} - \frac{5}{3}x_n + \frac{2}{3}x_{n-1} = 0.$$

Den karakteristiske ligningen er

$$r^2 - \frac{5}{3}r + \frac{2}{3} = 0,$$

og vi får røttene $r_1 = 1$ og $r_2 = 2/3$. Den generelle løsningen av differensligningen er derfor

$$x_n = C + D\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Men hvordan bestemmer vi konstantene C og D ? Vi legger merke til at $x_0 = 0$ (fordi Kari er blakk og vinner med sannsynlighet 0), mens $x_{20} = 1$ (nå er det Per som er blakk, og Kari vinner med sannsynlighet 1). Vi har altså ligningene

$$\begin{aligned} 0 = x_0 &= C + D\left(\frac{2}{3}\right)^0 = C + D \\ 1 = x_{20} &= C + D\left(\frac{2}{3}\right)^{20}. \end{aligned}$$

Løser vi disse ligningene (gjør det!), får vi

$$C = \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}}, \quad D = \frac{-1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}}.$$

Dermed er

$$x_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}} - \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}}.$$

Vi var i utgangspunktet interessert i x_5 , og den er nå lett å beregne:

$$x_5 = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}} \approx 0.87.$$

Kari vinner altså med 87 % sannsynlighet. Legg merke til at $x_1 \approx 0.33$, så selv om hun starter med bare én krone mot Pers 19, så vinner Kari i 33 % av tilfellene! Av og til er det bedre å være smart enn rik. ■

Oppgaver i seksjon 4.1

1. Finn de generelle løsningene til differensligningene.
 - a) $x_{n+1} + 3x_n = 0$
 - b) $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 4x_n = 0$
 - c) $x_{n+2} + 5x_{n+1} - 14x_n = 0$
2. Finn de generelle løsningene til differensligningene.
 - a) $3x_{n+1} + 7x_n = 0$
 - b) $x_{n+2} - 9x_n = 0$
 - c) $4x_{n+2} = 8x_n - 4x_{n+1}$
3. Finn de generelle løsningene til differensligningene. Dersom den karakteristiske ligningen har komplekse røtter, skal du oppgi svaret både på reell og kompleks form.
 - a) $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 0$
 - b) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = 0$
 - c) $x_{n+2} + 9x_n = 0$
 - d) $4x_{n+2} - 12x_{n+1} + 9x_n = 0$
4. Finn de generelle løsningene til differensligningene. Dersom den karakteristiske ligningen har komplekse røtter, skal du oppgi svaret både på kompleks og reell form.
 - a) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 3x_n = 0$
 - b) $x_{n+2} + 2\sqrt{5}x_{n+1} + 5x_n = 0$
 - c) $x_{n+2} + \sqrt{2}x_{n+1} + x_n = 0$
5. Finn følgen som oppfyller differensligningen og begynnelsesbetingelsene.
 - a) $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0, x_0 = 9, x_1 = -2$
 - b) $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0, x_0 = 2, x_1 = 1$
 - c) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, x_0 = 2, x_1 = 1$
 - d) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0, x_0 = 1, x_1 = -2$
6. Finn følgen som oppfyller differensligningen og begynnelsesbetingelsene.
 - a) $x_{n+2} - 4x_n = 0, x_0 = 0, x_1 = -4$
 - b) $x_{n+2} + 4x_n = 0, x_0 = 0, x_1 = 4$
 - c) $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0, x_0 = 4, x_1 = 9$
7. a) (UiO) Finn følgen $\{a_n\}$ slik at $a_0 = 0, a_1 = 9/2$ og
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad \text{for } n \geq 0.$$

- b) Vis at $2a_n$ er et helt tall for $n \geq 0$.
- c) Finn det største naturlige tallet som deler $2a_n$ for alle n .

8. a) (UiO) La a_n være antall utfall av n forskjellige terningkast foretatt i rekkefølge slik at to påhverandre følgende kast aldri får samme utfall. Forklar hvorfor a_n tilfredsstillers

$$a_{n+1} = 5a_n, \quad n \geq 1, \quad a_1 = 6,$$

og finn a_n .

- b) La P_n være sannsynligheten for at utfallet av n forskjellige terningkast foretatt i rekkefølge inneholder to etter hverandre følgende kast med samme utfall. Beregn P_n og beregn også $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

9. (UiO) Betrakt sekvenser av lengde n bestående av 0'ere og 1'ere der første siffer er 1 og to 1'ere aldri følger etter hverandre. La a_n betegne antallet av slike sekvenser. Forklar hvorfor a_n tilfredsstillers differensligningen

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n > 2, \quad a_1 = a_2 = 1.$$

Finn a_n ved å løse denne ligningen.

10. Løs problemet i eksempel 4.1.18 dersom Per og Kari er like gode til å spille og derfor vinner spillene med sannsynlighet $1/2$.

11. Du har bestemt deg for å sprengre et av kasinoene i Monaco. I hver omgang setter du 1 million på rødt. Med sannsynlighet $18/37$ vinner du 1 million, og med sannsynlighet $19/37$ taper du millionen du satset. Du fortsetter spillet til enten du eller kasinoet er konkurs. Hva er sannsynligheten for at du vinner dersom du starter med 90 millioner og kasinoet med 10 millioner?

12. Kaja og Astrid spiller *stein-saks-papir* om glansbilder. Spillet foregår ved at de samtidig skal vise frem et fingersymbol for enten stein, saks eller papir. Stein slår saks, saks slår papir, papir slår stein. Dersom begge viser samme symbol, ender omgangen uavgjort. Etter hver omgang må vinneren gi et glansbilde til taperen.

- a) Vis at i hver omgang har både Kaja og Astrid $1/3$ sannsynlighet for å vinne (forutsatt at begge velger symbol tilfeldig).
- b) Jentene bestemmer seg for å spille til en av dem har vunnet alle glansbildene. Forklar at hvis x_n er Astrids sannsynlighet for å vinne når hun starter med n av glansbildene, så er

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 0.$$

- c) Da de begynte, hadde Kaja 5 glansbilder og Astrid 7. Hva er sannsynligheten for at det er Kaja som til slutt taper alle sine glansbilder?

13. (UiO) En smittsom sykdom sprer seg i en befolkning. Av dem som er syke én uke, vil 25 % fortsatt være syke uken etter. Sykdommen har en inkubasjonstid på to uker, og en person som var syk for to uker siden, vil i gjennomsnitt ha smittet $\frac{5}{4}$ person som blir syk denne uken. Vi lar x_n være antall personer som er syke etter n uker.

a) Forklar hvorfor

$$x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} - \frac{5}{4}x_{n-2} = 0$$

og finn den generelle løsningen til denne differensligningen.

b) Den uken sykdommen ble oppdaget, var 190 personer syke. Uken etter var 260 personer syke. Hvor mange var syke n uker etter at sykdommen ble oppdaget? Hvordan vil det gå med antall syke etter som tiden går?

c) Sykdommen viser seg å være mindre smittsom enn først antatt. Det viser seg at en person som var syk for to uker siden, i gjennomsnitt bare har smittet $\frac{3}{4}$ person som blir syk denne uken. Hva skjer med antall syke når tiden går? Hva skjer dersom det viser seg at hver syk person i gjennomsnitt smitter færre enn $\frac{3}{4}$ person per uke?

14. I en enkel klimamodell avviker middeltemperaturen i måned nummer n fra den årlige middeltemperaturen med en størrelse x_n . Anta at x_n er gitt ved

$$x_{n+2} - \sqrt{3}x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_1 = -12, \quad x_3 = -6.$$

I hvilken måned er det varmest og i hvilken er det kaldest? Tegn en kurve som viser temperatursvingningene fra måned til måned.

15. Bier formerer seg på en uvanlig måte. Både befruktede og ubefruktede egg utvikler seg til bier, de befruktede blir hunner og de ubefruktede hanner. En hunn har altså to foreldre, mens en hann bare har en mor og ikke en far. En hunn har dermed to foreldre, tre besteforeldre, 5 oldeforeldre osv. Hvis vi lar x_n være antall forgjengere n generasjoner tilbake, er altså $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. Forklar hvorfor

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

og finn hvor mange forfedre en hunn har n generasjoner tilbake. Hvor mange forfedre har en hann n generasjoner tilbake?

16. a) Vis at det ikke finnes noen løsning av differensligningen $x_{n+2} - 4x_n = 0$ slik at $x_0 = 0$, $x_2 = 1$.

b) Anta at den karakteristiske ligningen til

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 \tag{*}$$

har to forskjellige løsninger r_1 og r_2 . La $m, n \geq 0$ være to forskjellige, hele tall og anta at

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{m-n} \neq 1.$$

Vis at for alle tall α, β finnes det en løsning av (*) slik at $x_m = \alpha$ og $x_n = \beta$.

- c) Anta nå at (*) har en dobbeltrot $r \neq 0$. La $m, n \geq 0$ være to forskjellige, hele tall og vis at det alltid finnes en løsning av (*) slik at $x_m = \alpha$ og $x_n = \beta$ uansett hva α og β er.

17. I denne oppgaven skal vi studere tredjeordens, homogene differensligninger

$$x_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = 0, \quad n \geq 0, \quad \text{der } d \neq 0. \quad (*)$$

- a) Gitt tre tall a_0, a_1, a_2 , vis at det er nøyaktig én løsning av (*) slik at $x_0 = a_0$, $x_1 = a_1$ og $x_2 = a_2$.
- b) Den karakteristiske ligningen til (*) er

$$r^3 + br^2 + cr + d = 0.$$

Vis at dersom den karakteristiske ligningen har tre forskjellige røtter r_1, r_2, r_3 , så er den generelle løsningen til (*)

$$x_n = Cr_1^n + Dr_2^n + Er_3^n.$$

- c) Vis at dersom den karakteristiske ligningen har en rot r_1 med multiplisitet én og en rot $r_2 \neq 0$ med multiplisitet to, så er den generelle løsningen til (*)

$$x_n = Cr_1^n + (D + nE)r_2^n.$$

- d) Vis at dersom den karakteristiske ligningen har en rot r med multiplisitet tre, så er den generelle løsningen til (*)

$$x_n = (C + nD + n^2E)r^n.$$

- e) Finn den generelle løsningen til

$$x_{n+3} - 8x_n = 0$$

og skriv den uten bruk av komplekse tall.

4.2 Inhomogene differensligninger

La oss starte med et problem. En humanitær stiftelse har satt inn et beløp på 10 millioner kroner på en høyrentekonto som gir 6 % rente. I slutten av hvert år utbetaler stiftelsen stipendier på til sammen en halv million kroner fra denne kontoen (legg merke til at 6 % av 10 millioner er mer enn en halv million). Hva har beløpet på kontoen vokst til etter n år?

Anta at beløpet ved utgangen av det n -te året er x_n . I løpet av det neste året vokser dette beløpet til $1.06x_n$, og så deles det ut stipendier på en halv million kroner. Beløpet som står igjen er da

$$x_{n+1} = 1.06x_n - 0.5.$$

(Vi måler alle beløp i millioner for å slippe alle nullene.) Skrevet på en annen måte er

$$x_{n+1} - 1.06x_n = -0.5.$$

Dette ligner på de førsteordens differensligningene vi studerte i forrige seksjon, men problemet er at det nå står -0.5 og ikke 0 på høyresiden av ligningen. Mens ligningene vi studerte ovenfor var *homogene*, har vi nå fått en *inhomogen* ligning.

Mer generelt kaller vi en ligning på formen

$$x_{n+1} + rx_n = f(n),$$

der f er en kjent funksjon, for en *inhomogen, førsteordens differensligning*. Tilsvarende kaller vi en ligning på formen

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n)$$

for en *inhomogen, annenordens differensligning*.

Spørsmålet vi skal studere i denne seksjonen, er hvordan man løser slike inhomogene problemer. Det viser seg at det er flere metoder, og den vi skal velge er kanskje ikke den beste fra et teoretisk synspunkt, men den er lett å lære og tilstrekkelig for våre formål. Vi skal ta en liten kikk på en annen metode i avsnittet om genererende funksjoner (seksjon 12.11).

Vi begynner med en enkel, men viktig observasjon (*i denne seksjonen skal vi for enkelthets skyld formulere og bevise alle resultater for annenordens differensligninger, men de gjelder like godt for førsteordens*).

4.2.1 Lemma

Anta at $\{x_n^p\}$ er en løsning av den inhomogene, annenordens differensligningen

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n). \quad (1)$$

Da vil de andre løsningene av (1) være

$$x_n = x_n^p + x_n^h, \quad (2)$$

der $\{x_n^h\}$ er en vilkårlig løsning av den *homogene* ligningen

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0. \quad (3)$$

Bemerkning

Husk at en spesiell løsning av en differensligning ofte kalles en *partikulær* løsning. Lemmaet ovenfor sier derfor at den generelle løsningen av en inhomogen ligning er summen av en partikulær løsning og den generelle løsningen av den *homogene* ligningen. Bokstavene p og h skal minne oss om ordene «partikulær» og «homogen», og de er altså ikke eksponenter som x_n skal opphøyes i.

Bevis for lemma 4.2.1: Vi skal først vise at dersom $\{x_n^p\}$ er en partikulær løsning av (1), og $\{x_n^h\}$ er en hvilket som helst løsning av den homogene ligningen, så er

$x_n = x_n^p + x_n^h$ også en løsning av (1). Alt vi behøver å gjøre, er å sette inn i ligningen:

$$\begin{aligned} x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n &= (x_{n+2}^p + x_{n+2}^h) + b(x_{n+1}^p + x_{n+1}^h) + c(x_n^p + x_n^h) \\ &= (x_{n+2}^p + bx_{n+1}^p + cx_n^p) + (x_{n+2}^h + bx_{n+1}^h + cx_n^h) \\ &= f(n) + 0 = f(n). \end{aligned}$$

Vi har dermed vist at alle følger på formen (2) er løsninger av differensligningen (1). Det gjenstår å vise at ligningen ikke har noen andre løsninger enn disse.

La $\{x_n\}$ være en vilkårlig løsning av (1), og definer $y_n = x_n - x_n^p$. Legg merke til at dersom vi kan vise at $\{y_n\}$ er en løsning av den homogene ligningen (3), så er $x_n = x_n^p + y_n$ på formen (2) og beviset er ferdig. Setter vi y_n inn i ligningen, får vi

$$\begin{aligned} y_{n+2} + by_{n+1} + cy_n &= (x_{n+2} - x_{n+2}^p) + b(x_{n+1} - x_{n+1}^p) + c(x_n - x_n^p) \\ &= (x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n) - (x_{n+2}^p + bx_{n+1}^p + cx_n^p) \\ &= f(n) - f(n) = 0, \end{aligned}$$

akkurat som vi ønsket oss. ■

4.2.2 Eksempel

Det er lett å kontrollere at $x_n^p = n$ er en løsning av den inhomogene differensligningen

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = -6n + 1.$$

Den homogene ligningen $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0$ har karakteristisk ligning

$$r^2 - r - 6 = 0.$$

Røttene er $r_1 = -2$ og $r_2 = 3$, så den generelle løsningen til den homogene ligningen er

$$x_n^h = C(-2)^n + D3^n.$$

Ifølge lemmaet er da

$$x_n = x_n^p + x_n^h = n + C(-2)^n + D3^n$$

den generelle løsningen av den inhomogene ligningen. ■

For å få nytte av lemmaet ovenfor, trenger vi en metode til å finne minst én løsning av den inhomogene differensligningen

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n).$$

Metoden vi skal benytte bygger på at differensligningen som regel vil ha en løsning av «samme type» som den kjente funksjonen $f(n)$. Er, for eksempel, $f(n)$ et annengradspolynom, vil som regel differensligningen ha en løsning som også er et annengradspolynom, og det gjelder bare å finne frem til hvilket polynom det er snakk om. Det er lettest å forstå hvordan dette gjøres ved å se på et eksempel.

4.2.3 Eksempel

Vi ønsker å finne en løsning av differensligningen

$$x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = n^2 + 1.$$

Siden funksjonen $f(n) = n^2 + 1$ er et annengradspolynom, håper vi å finne en løsning som også er et annengradspolynom – altså en løsning på formen

$$x_n^p = An^2 + Bn + C.$$

Planen er å sette dette uttrykket inn i ligningen og se hva koeffisientene A , B og C må være for at vi skal ha en løsning. Vi får

$$\begin{aligned} x_{n+2}^p + x_{n+1}^p + x_n^p &= [A(n+2)^2 + B(n+2) + C] + [A(n+1)^2 \\ &\quad + B(n+1) + C] + [An^2 + Bn + C] \\ &= An^2 + 4An + 4A + Bn + 2B + C + An^2 \\ &\quad + 2An + A + Bn + B + C + An^2 + Bn + C \\ &= 3An^2 + (6A + 3B)n + (5A + 3B + 3C). \end{aligned}$$

For at dette uttrykket skal være lik $n^2 + 1$ for alle n , må vi kreve at

$$\begin{aligned} 3A &= 1 \\ 6A + 3B &= 0 \\ 5A + 3B + 3C &= 1. \end{aligned}$$

Løser vi dette ligningssystemet, ser vi at $A = 1/3$, $B = -2/3$, $C = 4/9$. Altså er

$$x_n^p = \frac{1}{3}n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{4}{9}$$

en partikulær løsning av ligningen vår. ■

Vi har nå de ideene vi trenger for å løse det problemet vi innledet denne seksjonen med:

4.2.4 Eksempel

Husk at vi ønsket å finne den løsningen av differensligningen

$$x_{n+1} - 1.06x_n = -0.5$$

som tilfredsstiller begynnelseskrevet $x_0 = 10$ (millioner).

I dette tilfellet er $f(n) = -0.5$, og siden $f(n)$ er konstant, er det naturlig å tippe at det finnes en konstant løsning $x_n^p = A$. Setter vi dette inn i ligningen får vi

$$-0.5 = x_{n+1}^p - 1.06x_n^p = A - 1.06A = -0.06A,$$

som gir $A = 0.5/0.06 = 25/3$. Altså er $x_n^p = 25/3$ en partikulær løsning.

Siden $x_n^h = C(1.06)^n$ er den generelle løsningen av den homogene ligningen

$$x_{n+1} - 1.06x_n = 0,$$

må den generelle løsningen av ligningen vår være

$$x_n = x_n^p + x_n^h = \frac{25}{3} + C(1.06)^n.$$

Vi ønsker den løsningen hvor $x_0 = 10$, så C er gitt ved

$$10 = x_0 = \frac{25}{3} + C(1.06)^0 = \frac{25}{3} + C.$$

Altså er

$$C = 10 - \frac{25}{3} = \frac{5}{3},$$

og kapitalen etter n år er

$$x_n = \frac{25}{3} + \frac{5 \cdot (1.06)^n}{3} = \frac{5}{3} [5 + (1.06)^n].$$

Regner vi ut x_{10} , ser vi at kapitalen etter 10 år er steget til

$$x_{10} = \frac{5}{3} [5 + (1.06)^{10}] \approx 11.318 \text{ millioner};$$

altså en økning på drøye 1.3 millioner. Hadde vi isteden latt være å utbetale stipendie-
ne, ville kapitalen ha vokst til $10 \cdot (1.06)^{10}$ som er nesten 18 millioner – det vil si en
vekst på omlag åtte millioner. ■

Vi skal nå lage en kort liste over sammenhengen mellom den gitte funksjonen $f(n)$
og smarte valg av løsninger. Vi begynner med polynomer.

$f(n)$ er et polynom

Når $f(n)$ er et polynom, kan man i de aller fleste tilfeller tippe på en løsning $x_n^p = g(n)$ der $g(n)$ er et polynom av samme grad som $f(n)$. I noen tilfeller må man imidlertid tippe på løsninger av typen $x_n^p = ng(n)$ eller $x_n^p = n^2g(n)$ der $g(n)$ fortsatt er et polynom av samme grad som $f(n)$. Dette skjer når 1 er en rot i den karakteristiske ligningen til den homogene differensialligningen. Den presise regelen er:

Regel 1: Dersom $f(n)$ er et polynom, tipper man løsninger på formen

- $x_n^p = g(n)$ dersom 1 ikke er en rot i den karakteristiske ligningen
- $x_n^p = ng(n)$ dersom 1 er en *enkeltrot* i den karakteristiske ligningen
- $x_n^p = n^2g(n)$ dersom 1 er en *dobbeltrot* i den karakteristiske ligningen

og der $g(n)$ i alle tilfeller er et polynom av samme grad som $f(n)$. Siden en konstant er et nulltegradspolynom, gjelder regelen også når $f(n)$ er en konstant.

Bemerkning

Legg merke til $ng(n)$ er et polynom av én grad mer enn $g(n)$, og at $n^2g(n)$ er et polynom av to grader mer enn $g(n)$. Grunnen til at vi skriver disse polynomene på en såpass uvanlig måte, er for at du skal slippe å dra med deg ledd du ikke har bruk for.

4.2.5 Eksempel

La oss se på en ligning som illustrerer hva som skjer når vi må øke graden. Vi tar differensligningen

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = n - 3.$$

Siden $f(n) = n - 3$ er et førstegradspolynom, er det i utgangspunktet naturlig å tro at løsningen også kan være et førstegradspolynom $x_n^p = An + B$. Setter vi inn i ligningen, får vi

$$\begin{aligned} x_{n+2}^p + x_{n+1}^p - 2x_n^p &= [A(n+2) + B] + [A(n+1) + B] - 2(An + B) \\ &= 0 \cdot n + 3A = 3A. \end{aligned}$$

Siden koeffisienten til n er 0, ser vi at uansett hvordan vi velger A og B , kan vi aldri få dette uttrykket lik $n - 3$. Ligningen har altså ikke førstegradspolynomer som løsninger.

Grunnen til dette er at 1 er en enkeltrot i den karakteristiske ligningen, og at konstantfølgen $\{1\}$ dermed er en løsning av den homogene differensligningen. Ifølge regelen ovenfor bør vi derfor isteden prøve å finne en løsning av formen $x_n^p = n(An + B) = An^2 + Bn$. Setter vi inn i ligningen, får vi

$$\begin{aligned} x_{n+2}^p + x_{n+1}^p - 2x_n^p &= [A(n+2)^2 + B(n+2)] + [A(n+1)^2 \\ &\quad + B(n+1)] - 2(An^2 + Bn) \\ &= 0 \cdot n^2 + 6An + (5A + 3B) = 6An + (5A + 3B). \end{aligned}$$

For at x_n^p skal være en løsning, må vi kreve at

$$\begin{aligned} 6A &= 1 \\ 5A + 3B &= -3. \end{aligned}$$

Dette betyr at $A = 1/6$, $B = -23/18$, og dermed har vi vist at

$$x_n^p = \frac{n^2}{6} - \frac{23n}{18}$$

er en løsning av differensligningen. ■

Regningene i dette eksemplet er typisk for hva som skjer i de tilfellene hvor vi må øke graden. Prøver vi oss med en løsning av samme grad som $f(n)$, faller det høyeste leddet bort, og vi greier ikke å oppfylle kravene. Går vi opp i grad, får vi de ligningene vi trenger.

 $f(n)$ er på formen $a^n p(n)$

Dersom $f(n)$ er på formen $a^n p(n)$ der a er et tall og $p(n)$ er et polynom, kan vi vanligvis tippe en løsning på formen $x_n^p = a^n g(n)$ der $g(n)$ er et polynom av samme grad

som $p(n)$. I noen tilfeller må vi imidlertid tippe løsninger på formen $x_n^p = a^n n g(n)$ eller $x_n^p = a^n n^2 g(n)$ isteden. Dette skjer når a er en rot i den karakteristiske ligningen. Den presise regelen er:

Regel 2: Dersom $f(n)$ er av formen $a^n p(n)$ der a er et tall og $p(n)$ er et polynom, tipper man løsninger på formen

- a) $x_n^p = a^n g(n)$ dersom a ikke er en rot i den karakteristiske ligningen
- b) $x_n^p = a^n n g(n)$ dersom a er en *enkeltrot* i den karakteristiske ligningen
- c) $x_n^p = a^n n^2 g(n)$ dersom a er en *dobbeltrot* i den karakteristiske ligningen

og der $g(n)$ i alle tilfeller er et polynom av samme grad som $p(n)$. Siden en konstant er et nulltegradspolynom, gjelder regelen også når $f(n)$ er av formen Ca^n der C er en konstant.

4.2.6 Eksempel

Vi skal finne en løsning av

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 3x_n = n2^n.$$

Siden vi har et førstegradspolynom n ganget med en eksponentialfunksjon 2^n , er det naturlig å tippe en løsning på samme form – altså

$$x_n^p = (An + B)2^n.$$

Setter vi inn i ligningen, får vi (husk at $2^{n+2} = 4 \cdot 2^n$ og $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$):

$$\begin{aligned} x_{n+2}^p - 2x_{n+1}^p + 3x_n^p &= (A(n+2) + B)2^{n+2} \\ &\quad - 2(A(n+1) + B)2^{n+1} + 3(An + B)2^n \\ &= (4An + 8A + 4B)2^n \\ &\quad - (4An + 4A + 4B)2^n + (3An + 3B)2^n \\ &= [3An + (4A + 3B)]2^n. \end{aligned}$$

Dette uttrykket skal være lik $n2^n$, så vi må ha

$$\begin{aligned} 3A &= 1 \\ 4A + 3B &= 0. \end{aligned}$$

Disse ligningene gir $A = 1/3$, $B = -4/9$, så løsningen vår er

$$x_n^p = \frac{3n - 4}{9} \cdot 2^n.$$

La oss også finne den generelle løsningen. Siden den karakteristiske ligningen $r^2 - 2r + 3 = 0$ har to komplekse røtter $r_1 = 1 + i\sqrt{2}$, $r_2 = 1 - i\sqrt{2}$, er den generelle løsningen til den homogene ligningen

$$x_n^h = C(1 + i\sqrt{2})^n + D(1 - i\sqrt{2})^n.$$

Den generelle løsningen til den inhomogene ligningen er dermed

$$x_n = x_n^p + x_n^h = \left(\frac{3n-4}{9}\right) \cdot 2^n + C(1+i\sqrt{2})^n + D(1-i\sqrt{2})^n.$$

For at løsningen skal være reell, må vi velge C og D til å være komplekskonjugerte av hverandre (eller vi kan formulere løsningene ved hjelp av sinus og cosinus som i setning 4.1.14). ■

$f(n)$ er på formen $b^n[A \sin(an) + B \cos(an)]$

Regel 3: Dersom $f(n) = b^n(A \sin(an) + B \cos(an))$ der A , B , a og b er konstanter, bør man tippe en løsning på formen $x_n^p = b^n[C \sin(an) + D \cos(an)]$. I noen tilfeller må man forsøke $x_n^p = nb^n[C \sin(an) + D \cos(an)]$ isteden (det skjer når $y_n = b^n \cos(an)$ er løsning av den homogene ligningen – noe som forøvrig er ekvivalent med at $z_n = b^n \sin(an)$ er det). Du får ikke bruk for denne regelen så ofte, og du kan godt vente med å lese følgende eksempel til behovet melder seg.

4.2.7 Eksempel

Vi skal finne en løsning av

$$x_{n+1} - x_n = \sin(an).$$

Vi prøver en løsning på formen $x_n^p = C \sin(an) + D \cos(an)$ (selv om $f(n)$ mangler cosinus-ledd, vil løsningen som regel ha det!). Legg merke til at ifølge formlene for sinus og cosinus til en sum, er

$$\begin{aligned} x_{n+1}^p &= C \sin[a(n+1)] + D \cos[a(n+1)] \\ &= C \cdot [\sin(an) \cos a + \cos(an) \sin a] \\ &\quad + D \cdot [\cos(an) \cos a - \sin(an) \sin a] \\ &= (C \cos a - D \sin a) \sin(an) \\ &\quad + (C \sin a + D \cos a) \cos(an). \end{aligned}$$

Setter vi inn i ligningen, får vi

$$\begin{aligned} x_{n+1}^p - x_n^p &= (C \cos a - D \sin a) \sin(an) \\ &\quad + (C \sin a + D \cos a) \cos(an) - C \sin(an) - D \cos(an) \\ &= (C \cos a - D \sin a - C) \sin(an) \\ &\quad + (C \sin a + D \cos a - D) \cos(an). \end{aligned}$$

Skal x_n^p være en løsning av ligningen, må dette uttrykket være lik $\sin(an)$, så

$$\begin{aligned} C \cos a - D \sin a - C &= 1 \\ C \sin a + D \cos a - D &= 0. \end{aligned}$$

Dette ligningssystemet har løsningen $C = -1/2$, $D = -\frac{\sin a}{2(1 - \cos a)}$, så vår partikulære løsning av differensligningen blir

$$x_n^p = -\frac{\sin(na)}{2} - \frac{\sin a}{2(1 - \cos a)} \cos(na).$$



Samlingen av regler kan utvides ytterligere, men de tre ovenfor er tilstrekkelige for vårt behov, og vi skal stoppe her. Det er imidlertid nyttig å være klar over at reglene kan kombineres: Ønsker vi for eksempel å finne en partikulær løsning av

$$x_{n+1} - 2x_n = n + 3^n,$$

ser vi at høyresiden er en sum av to ledd som vi kan behandle hver for seg: n er et førstegradspolynom og tilsier en løsning på formen $x_n^p = An + B$, mens 3^n er en eksponentialfunksjon, og tilsvarer en løsning av typen $x_n^p = E \cdot 3^n$. Som en kombinasjon av disse to løsningsforslagene, prøver vi da

$$x_n^p = An + B + E \cdot 3^n.$$

Sett inn i ligningen og overbevis deg om at dette fungerer.

Anvendelser

Vi skal avslutte denne seksjonen med noen eksempler på problemer som kan løses ved hjelp av inhomogene differensligninger. Det første eksemplet viser hvordan vi kan summere uttrykk av typen $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

4.2.8 Eksempel

Finn et uttrykk for summen

$$x_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2.$$

Siden $x_{n+1} = x_n + (n+1)^2$, må x_n være en løsning av differensligningen

$$x_{n+1} - x_n = n^2 + 2n + 1,$$

Siden $x_1 = 1^2 = 1$, vet vi også at vi er interessert i den løsningen som oppfyller begynnelsesbetingelsen $x_1 = 1$.

I dette tilfellet er $f(n) = n^2 + 2n + 1$ et annengradspolynom, og normalt ville vi tippe en løsning som også er et annengradspolynom, men siden 1 er rot i den karakteristiske ligningen, må vi isteden tippe en løsning på formen

$$x_n^p = n(An^2 + Bn + D) = An^3 + Bn^2 + Dn.$$

Setter vi inn i ligningen, får vi

$$\begin{aligned} x_{n+1}^p - x_n^p &= A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + D(n+1) - An^3 - Bn^2 - Dn \\ &= 3An^2 + (3A + 2B)n + A + B + D. \end{aligned}$$

Dette skal være lik $n^2 + 2n + 1$, så vi må ha

$$3A = 1, \quad 3A + 2B = 2, \quad A + B + D = 1.$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $A = 1/3$, $B = 1/2$ og $D = 1/6$. Den generelle løsningen av differensligningen er dermed

$$x_n = x_n^p + x_n^h = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + C.$$

Vi er interessert i løsningen hvor $x_1 = 1$, så vi må ha

$$\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} + C = 1$$

som gir $C = 0$. Altså er løsningen vår

$$x_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Dermed har vi vist at

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

■

Det neste eksemplet er en gjenganger i bøker om differensligninger, men det er så pass morsomt at det forsvaret en plass også her.

4.2.9 Eksempel

Vi skal studere et puslespill som kalles «Tårnene i Hanoi». Puslespillet består av tre loddrette staver og noen runde brikker med hull i som kan tres ned på stavene. Brikkene er av forskjellig størrelse, og i utgangsstillingen er de alle plassert på den ene staven med de største brikkene nederst (se figur 4.2.1). Formålet med spillet er å flytte brikkene fra stav til stav slik at de til slutt ender opp i samme rekkefølge på en av de andre stavene. Det er bare lov å flytte én brikke av gangen, og vi må aldri plassere en større brikke oppå en mindre.



Figur 4.2.1.

Puslespillet er ikke så gammelt som det gir seg ut for; det ble oppfunnet av den franske matematikeren Édouard Lucas (1842–1891). Lucas diktet også en legende om hvordan Gud i tidens morgen skapte et slikt spill av 64 gullbrikker og 3 diamanttårn, og ga et presteskap i oppgave å løse det. Når prestene endelig lykkes i å flytte alle brikkene over på ett av de andre tårnene, vil spillet falle i grus, og verdens ende komme.

Spørsmålet er om denne oppgaven er løsbart og om hvor mange trekk man i så fall trenger for å gjennomføre den. Det er vanskelig å eksperimentere med 64 brikker, så la oss ta utgangspunkt i færre. Dersom det bare er én brikke, er oppgaven opplagt løsbart i ett trekk – vi tar bare den ene brikken og flytter den over på en av de andre stavene.

Anta nå at vi kan løse oppgaven for n brikker i x_n trekk. Vi kan da løse oppgaven for $n + 1$ brikker på følgende måte: Vi later først som den nederste brikken ikke finnes og flytter de øverste n brikkene over på én av de andre stavene i x_n trekk. Så flytter vi den nederste brikken over på den tredje staven, og glemmer så dens eksistens mens vi flytter de n andre brikkene opp på den i x_n nye trekk. Vi har dermed løst oppgaven for $n + 1$ brikker i $x_{n+1} = 2x_n + 1$ trekk. Legg også merke til at dersom x_n er det minste antall trekk vi trenger for n brikker, så er det umulig å løse oppgaven for $n + 1$ brikker med færre enn $2x_n + 1$ trekk. Før vi flytter den nederste brikken, må vi nemlig samle de andre på én stav, og dét tar minst x_n trekk. Deretter må vi bruke ett trekk på å flytte den nederste; og deretter minst x_n trekk på å samle de andre opp på den igjen.

Dette betyr at puslespillet er løsbart for alle n , og at det minste antall trekk vi trenger, er gitt ved differensligningen

$$x_{n+1} - 2x_n = 1$$

og begynnelseskravet $x_1 = 1$.

Den generelle løsningen av den homogene ligningen er $z_n = C2^n$. Siden høyresiden i den inhomogene ligningen er en konstant, burde ligningen også ha en konstant løsning $y_n = A$. Setter vi inn, får vi

$$y_{n+1} - 2y_n = A - 2A = -A.$$

Skal dette være lik 1, må $A = -1$. Den generelle løsningen av den inhomogene ligningen er dermed

$$x_n = C2^n - 1.$$

Det gjenstår å finne konstanten C . Siden $x_1 = 1$, må

$$1 = x_1 = C \cdot 2^1 - 1 = 2C - 1,$$

som viser at $C = 1$. Altså kan puslespillet med n brikker løses i

$$x_n = 2^n - 1$$

trekk. For prestene våre betyr dette at de må holde på i $2^{64} - 1$ trekk – et tall av størrelsesorden 10^{19} ! Og dét vel å merke hvis de ikke går surr i trekkene underveis. ■

I vårt siste eksempel skal vi tilbake til sannsynlighetsregningen og et problem som er nært knyttet til eksempel 4.1.18.

4.2.10 Eksempel

Liv og Therese spiller om penger. Etter hvert spill må taperen betale én krone til vinneren. De har satset fem kroner hver, og har bestemt seg for å spille til én av dem har tapt hele innsatsen. Per og Aleksander ser på. De er ikke det minste interessert i hvem som vinner, men siden jentene har lovet dem en tur på byen når spillet er over, lurer de på hvor lenge de må regne med å vente.

Siden vi ikke kjenner utfallet av spillene, kan vi selvfølgelig ikke si med sikkerhet hvor lenge det vil ta. Men kjenner vi sannsynligheten for at hver av jentene skal vinne

hvert enkelt spill, kan vi regne ut den *forventede* ventetiden – altså den tiden guttene i gjennomsnitt måtte regne med å vente dersom de gjentok forsøket mange ganger.

La oss anta at Liv og Therese er like gode, og at de derfor vinner hvert spill med 50 % sannsynlighet. Som vanlig generaliserer vi utgangspunktet og lar x_n være forventet ventetid dersom Liv starter med n av de ti kronene og Therese med de gjenværende $10 - n$. Hvis Liv starter med n kroner, kan to ting skje i første spill. Med sannsynlighet $1/2$ vinner Liv første spill, innkasserer én krone, og må nå regne med å spille x_{n+1} ganger til før hun er ferdig. Med den gjenværende sannsynligheten (som også er $1/2$) taper Liv første spill, gir fra seg én krone, og må nå regne med å spille x_{n-1} ganger til. Ialt betyr dette at hun med sannsynlighet $1/2$ må regne med å spille $1 + x_{n+1}$ ganger, og at hun også med sannsynlighet $1/2$ må regne med å spille $1 + x_{n-1}$ ganger (ett-tallene kommer av at vi må huske på å ta med det første spillet i regnestykket). Altså er

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot (1 + x_{n+1}) + \frac{1}{2} \cdot (1 + x_{n-1}).$$

Ordner vi litt på dette uttrykket, får vi

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = -2$$

som er en annenordens, inhomogen differensligning. Vi legger også merke til at $x_0 = x_{10} = 0$ siden dette er tilfeller hvor enten Liv eller Therese har tapt hele innsatsen, og spillet er over.

Den karakteristiske ligningen $r^2 - 2r + 1 = 0$ har $r_1 = 1$ som eneste rot, så den generelle løsningen til den homogene ligningen er

$$x_n^h = C \cdot 1^n + Dn \cdot 1^n = C + Dn.$$

Høyresiden i den inhomogene ligningen er en konstant, og normalt ville vi da ha prøvd en partikulær løsning som også er en konstant, men siden 1 er en løsning av den karakteristiske ligningen, vil ikke dette fungere. Siden 1 faktisk er en dobbeltrot i den karakteristiske ligningen, må vi gå opp to hakk (husk regel 1c) og forsøke en løsning av formen

$$x_n^p = n^2 A = An^2.$$

Setter vi nå inn i differensligningen, får vi

$$\begin{aligned} x_{n+1}^p - 2x_n^p + x_{n-1}^p &= A(n+1)^2 - 2An^2 + A(n-1)^2 \\ &= An^2 + 2An + A - 2An^2 + An^2 - 2An + A \\ &= 2A. \end{aligned}$$

For å passe i differensligningen skal dette uttrykket være lik -2 , så vi må velge $A = -1$. Demed blir den generelle løsningen av den inhomogene ligningen

$$x_n = x_n^p + x_n^h = -n^2 + C + Dn.$$

Det gjenstår å bestemme konstantene C og D . Siden $x_0 = x_{10} = 0$, må vi ha

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 = -0^2 + C + D \cdot 0 = C \\ 0 &= -10^2 + C + D \cdot 10 = -100 + C + 10D. \end{aligned}$$

Dette ligningssystemet har løsningen $C = 0$, $D = 10$, så løsningen av vårt problem er

$$x_n = -n^2 + 10n.$$

Setter vi inn $n = 5$, ser vi at guttene må regne med å vente i

$$x_5 = -25 + 10 \cdot 5 = 25$$

spill! ■

Oppgaver i seksjon 4.2

1. Finn den generelle løsningen til differensligningen:

a) $x_{n+1} - 2x_n = n$

b) $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 7$

2. Finn den generelle løsningen til differensligningen:

a) $x_{n+1} + 3x_n = 3n - 1$

b) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n^2 + 1$

3. Finn den generelle løsningen til differensligningen:

a) $x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 6$

b) $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 4^n$

c) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2 \cdot 3^n$

d) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 3^n$

4. Finn den generelle løsningen til differensligningen:

a) $x_{n+1} - 2x_n = \sin n$

b) $x_{n+1} + 3x_n = \cos \frac{n\pi}{3}$

5. Finn følgen som oppfyller differensligningen og begynnelsesbetingelsene:

a) $x_{n+1} - 2x_n = 2$, $x_0 = 4$

b) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 9n$, $x_0 = x_1 = 3$

c) $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 4$, $x_0 = -1$, $x_1 = -8$

d) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 5$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$

6. (UiO) Finn den generelle løsningen til differensligningen

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 2^n + n + 1.$$

7. (UiO) Finn følgen som oppfyller differensligningen og begynnelsesbetingelsene

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 12(-1)^n + 2n + 1, \quad x_0 = x_1 = 3.$$

8. (UiO) Finn følgen $\{x_n\}$ slik at $x_0 = 1$ og

$$x_n - \pi x_{n-1} = e^n \quad \text{for } n \geq 1.$$

9. (UiO) Finn følgen som oppfyller differensligningen og begynnelsesbetingelsene

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^n + 1, \quad x_0 = x_1 = 0.$$

10. Finn den generelle, reelle løsningen til differensligningen

$$x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$$

og skriv den på både kompleks og reell form. Finn så løsningen til

$$x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 2n + 1, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0$$

11. Finn et uttrykk for summen

$$x_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

12. Finn et uttrykk for summen

$$x_n = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \dots + \sin na.$$

13. Et fond har 50 millioner i grunnkapital og gir 6 % rente. Ved utgangen av hvert år utbetales det 2 millioner fra fondet. La x_n være kapitalen i fondet n år etter stiftelsen, og vis at

$$x_{n+1} = x_n \cdot 1.06 - 2, \quad x_0 = 50$$

der alle beløp er målt i millioner. Hvor stor kapital har fondet etter n år?

14. Per og Kari spiller om penger. Kari starter med 7 kroner og Per med 13, og Kari vinner hvert spill med sannsynlighet $5/9$. Etter hvert spill må taperen betale en krone til vinneren. De har bestemt seg for å spille til førstemann er blakk.

- Hva er sannsynligheten for at det er Per som blir blakk?
- Hvor mange spill må de i gjennomsnitt spille før en av dem er blakk?

15. Salget til en forretning er sesongavhengig, og det ser ut til at salget n kvartaler etter åpningen tilfredsstillers differensligningen

$$x_{n+2} + r^2 x_n = 20r^{n+2}$$

der $r = 1.02$ og alle beløp er målt i millioner. Anta at $x_0 = 13$ og $x_1 = 14.28$. Finn salget x_n i det n -te kvartalet og lag en figur som viser salgskurven.

16. Et fond har 100 millioner i grunnkapital og gir 7 % rente. På slutten av hvert år deles det ut stipender. Summen indeksreguleres med 3 % hvert år, slik at det første året deles ut stipender for a millioner, neste år $a(1.03)$ millioner, deretter $a(1.03)^2$ millioner osv. La x_n være kapitalen i fondet etter n år (målt i millioner), og vis at

$$x_{n+1} = (1.07)x_n - (1.03)^n a, \quad x_0 = 100.$$

- Finn et uttrykk for x_n

- b) Hva er det største a kan være når vi ønsker at ordningen skal vedvare uendelig lenge.
- c) Løs oppgaven en gang til, men erstatt rentesatsene 7 % og 3 % med generelle størrelser r og p .

17. Du har lånt et beløp L i banken. Lånet skal tilbakebetales med et fast beløp a i slutten av hver måned (annuitetslån). Anta at den månedlige renter er p %.

- a) Vis at restlånet etter n måneder er gitt ved

$$x_{n+1} = rx_n - a, \quad x_0 = L$$

der $r = 1 + \frac{p}{100}$. Finn x_n . Anta at tilbakebetalingstiden er 20 år (= 240 måneder). Finn a uttrykt ved L og r . Anta at $L = 300\,000$ og at $p = 0.5$ (som tilsvarer en årlig rente på noe over 6 %). Regn ut hvor mye du vil betale tilbake i løpet av de 240 månedene.

18. Du har nettopp vunnet 10 millioner i Lotto og lurer på hva du skal gjøre med pengene. En mulighet er å sette de 10 millionene inn på en høyrentekonto som gir 6 % rente, og så leve av de 600 000 du får i rente hvert år. Problemet er at du regner med en årlig inflasjon på 2 %, og de årlige utbetalingene blir derfor mindre og mindre verd. Anta at du isteden tar ut a kroner det første året, $1.02a$ kroner det neste året osv.

- a) Vis at beløpet på kontoen etter n år er gitt ved

$$x_{n+1} = 1.06x_n - (1.02)^n a, \quad x_0 = 10$$

(vi måler beløpene i millioner og antar at du venter med det første uttaket til utgangen av det første året).

- b) Hva er det største a kan være dersom du ønsker utbetalingene til å fortsette evig?
- c) Du regner ikke med å leve mer enn 80 år til. Du velger derfor a slik at kontoen er tom etter 80 år ($x_{80} = 0$). Hvor stort blir beløpet a i dette tilfellet?

19. (UiO) I begynnelsen av et bestemt år setter du a kroner inn på en konto som gir 5 % rente. Ved utgangen av samme år tar du ut 100 000 kroner, ved utgangen av neste år 110 000 kroner, ved utgangen av året deretter 120 000 kroner osv.

- a) La x_n være beløpet som står på kontoen rett etter det n -te uttaket. Forklar hvorfor

$$x_{n+1} = 1.05x_n - 100\,000 - 10\,000n, \quad x_0 = a$$

og finn x_n .

- b) Hvor stor må a være for at utbetalingene skal fortsette i det uendelige?
- c) Du ønsker at kontoen skal være tom etter 50 år. Hvor stor må a da være?

20. (UiO) En dyrestamme med 6 000 dyr lever i et begrenset område. Stammen har et årlig fødselsoverskudd på 6 %. I år utvandrer a dyr fra stammen til andre områder, og dette tallet ventes å øke med 2 % per år. Vi lar x_n betegne antall dyr i området etter n år.

- a) Forklar hvorfor

$$x_{n+1} = 1.06x_n - 1.02^n a \quad x_0 = 6000$$

- b) Finn et uttrykk for x_n .
- c) Bruk lommeregner eller datamaskin til å illustrere utviklingen til dyrestammen gjennom de neste 50 år når a er lik henholdsvis 200 og 275.
- d) For hvilke verdier av a vil dyrestammen forsvinne fra området og for hvilke vil den bestandig være der?

21. (UiO) Geir har et akvarium der vannet er blitt for hardt, det vil si at konsentrasjonen av salter er for stor. Denne konsentrasjonen måles i gram per liter, g/l, og er kommet opp i $c_0 = 1.0$ g/l. Av hensyn til sine kjære dyr og planter kan ikke Geir bytte alt vannet på en gang, men må nøye seg med å bytte S liter en gang i uken. Dette gjør han ved å tappe S liter fra akvariet og erstatte det med S liter vann fra springen. Vi ser bort fra fordampning o.l.

- a) Forklar hvorfor konsentrasjonen av salter etter n uker, c_n , er styrt av differensligningen

$$c_n = \left(1 - \frac{S}{V}\right) c_{n-1} + \frac{S}{V} K$$

der K er konsentrasjonen av salter i vannet i springen, og V er det totale vannvolumet i akvariet målt i liter.

- b) Vi setter nå $K = 0.1$ g/l, $V = 100.0$ l, $S = 10.0$ l i tillegg til $c_0 = 1.0$ g/l. Løs differensligningen og finn saltkonsentrasjonen etter n uker. Hvor mange uker går det før Geir får saltinnholdet ned til det halve?

22. En sykdom med to ukers inkubasjonstid sprer seg i en befolkning. Man regner med at halvparten av dem som var syke i forrige uke, også er syke denne uken, og at de som var syke for to uker siden, i gjennomsnitt har smittet $1/2$ person som blir syk denne uken. I tillegg regner man det hver uke kommer til 15 nye syke som har brakt sykdommen med fra utlandet. La x_n være antall syke etter n uker.

- a) Forklar at dersom antagelsene ovenfor holder, så er

$$x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 15$$

- b) Finn den generelle løsningen til differensligningen i a).
- c) I uke 0 var det ingen syke, men i uke 1 kom de første 9 sykdomstilfellene. Hvor mange er syke i uke n ?

23. a) (UiO) Vis at den generelle løsningen til differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{2}{5}x_{n+1} + \frac{4}{25}x_n = 0$$

kan skrives

$$x_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \left(C \cos \frac{n\pi}{3} + D \sin \frac{n\pi}{3}\right),$$

der C og D er vilkårlige konstanter.

b) Løs differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{2}{5}x_{n+1} + \frac{4}{25}x_n = 16$$

med startverdiene $x_0 = x_1 = 0$.

c) Vi skal se på en enkel modell for hvordan en sykdom sprer seg i en folkegruppe. Ifølge denne modellen vil 40 % av dem som var syke forrige uke fortsatt være syke denne uken. I tillegg er det kommet til en ny gruppe syke som tilsvarer 16 % av dem som var friske for to uker siden. Vi lar x_n være den prosentandelen av folkegruppen som er syk etter n uker. Forklar hvorfor

$$x_{n+2} - \frac{2}{5}x_{n+1} + \frac{4}{25}x_n = 16$$

d) Sykdommen brøt ut i uke 2 slik at det i uke 0 og uke 1 ikke var noen syke. Hvor stor prosentandel av folkegruppen var syk etter n uker? Hva skjer med denne prosentandelen når $n \rightarrow \infty$?

24. a) (UiO) Finn den generelle løsningen til den homogene differensligningen

$$x_{n+2} - 1.2x_{n+1} + 0.72x_n = 0$$

b) Finn den generelle løsningen til den inhomogene differensligningen

$$x_{n+2} - 1.2x_{n+1} + 0.72x_n = 2080$$

c) I en feriekubb binder du deg til å være medlem i to år når du melder deg inn. En undersøkelse viser at det hvert år melder seg ut et antall som svarer til 72 % av medlemsmassen to år tidligere. I løpet av året verver hvert medlem i gjennomsnitt 0.2 nye medlemmer, og klubben får i tillegg 2080 nye medlemmer på annen måte. La x_n være medlemsmassen etter n år. Forklar hvorfor

$$x_{n+2} - 1.2x_{n+1} + 0.72x_n = 2080$$

d) Finn x_n når $x_0 = 2000$ og $x_1 = 2800$. Hvordan går det med medlemsmassen i klubben når tiden går?

25. (UiO) En høyskole planlegger et nytt, to-årig studium. Hvert år ønsker man å ta opp b nye studenter, og ett år senere venter man at 60 % av studentene fra første klasse vil fortsette på det andre året, 20 % vil ta det første året om igjen, mens 20 % vil ha sluttet. Man regner også med at 10 % av studentene i annen klasse vil ta det andre året på nytt.

a) Hvis b_n og c_n er tallet på studenter som følger henholdsvis første og annet års undervisning n år etter at studiet har åpnet, vis at

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{5}b_n + b, & n \geq 0, & \quad b_0 = b \\ c_{n+1} &= \frac{1}{10}c_n + \frac{3}{5}b_n, & n \geq 0, & \quad c_0 = 0. \end{aligned}$$

Finn b_n .

- b) Finn c_n . Hvis man ønsker at det totale studenttallet skal stabilisere seg rundt 250, hvor mange nye studenter bør man da ta opp i året?

26. I denne oppgaven skal vi se på samspillet mellom to dyrearter, et rovdyr og et byttedyr. Vi antar at antall rovdyr etter n år er gitt ved

$$x_{n+1} = rx_n$$

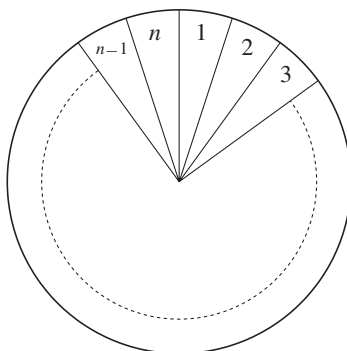
og at mengden av byttedyr er gitt ved

$$y_{n+1} = py_n - qx_n$$

der r , p og q er positive konstanter, $p > 1$.

- Forklar i grove trekk ideen bak disse ligningene og gi en tolkning av konstantene r , p , q .
- Finn en formel for x_n og y_n uttrykt ved x_0 og y_0 .
- Vis at dersom $r > p$, så vil byttedyrene dø ut.
- Anta at $p > r$. Vis at byttedyrene dør ut dersom $y_0 < \frac{qx_0}{p-r}$ og at de overlever dersom $y_0 \geq \frac{qx_0}{p-r}$.
- Hva skjer når $p = r$?

27. (UiO) En sirkel er delt inn i n like store og nummererte sektorer som vist på figuren. Hver sektor skal males med én farge, og vi har ialt k ($k \geq 2$) farger til rådighet.



- Hvor mange forskjellige måter kan vi fargelegge figuren på?
- La a_n være antall måter å fargelegge figuren på slik at to nabofelt aldri har samme farge. Vis at

$$a_{n+1} + a_n = k(k-1)^n \quad \text{når } n \geq 2,$$

og beregn a_n .

28. a) Du har n linjer i planet slik at ingen er parallelle og det aldri går tre gjennom samme punkt. La x_n være antallet områder som disse linjene deler planet inn i. Vis at

$$x_{n+1} = x_n + n + 1$$

og finn x_n .

- b) Du har n plan i rommet. La y_n være det maksimale antall områder disse planene kan dele rommet inn i. Vis at

$$y_{n+1} = y_n + x_n$$

og finn y_n .

- c) Du skal dele opp en pakke smør ved hjelp av 6 (plane) knivkutt. Hva er det største antall deler du kan få til?

29. Du spiller «Svarteper» med lille Jonas. Kortstokken dere spiller med, består av 31 kort – 15 par pluss Svarteper. Spillet foregår på denne måten: Først deles kortene ut, og spillerne legger bort de parene de har på hånden. Deretter trekker spilleren med færrest kort ett kort fra motspilleren. Dersom dette kortet danner et par sammen med et kort som spilleren har fra før, legges dette paret bort. Deretter er det motstanderens tur til å trekke osv. Etter en stund er alle parene lagt bort, og den som sitter igjen med Svarteper, har tapt.

- a) Vis at når kortene er delt ut og parene er lagt bort, vil spilleren med Svarteper ha et kort mer på hånden enn motstanderen.

I resten av oppgaven antar vi at det er du som får utdelt Svarteper. Hvis du har k andre kort i tillegg til Svarteper, lar vi v_k være sannsynligheten for at du vinner (Jonas starter altså med k kort ifølge a)).

- b) Tipp resultatet! Tror du v_k er større enn eller mindre enn $1/2$? Vil v_k øke eller avta når k vokser?
- c) Forklar hvorfor

$$v_k = \frac{1}{k+1}(1 - v_k) + \frac{k}{k+1}v_{k-2}$$

(tenk på hva som kan skje i første runde av spillet). Vis at denne ligningen kan skrives

$$(k+2)v_k - kv_{k-2} = 1. \quad (*)$$

- d) Definer $x_n = (n+2)v_n$ for alle n , og vis at

$$x_n - x_{n-2} = 1. \quad (**)$$

Finn den generelle løsningen til (**). Hva er den generelle løsningen til (*)?

- e) Vis at $v_0 = 0$ og $v_1 = 1/3$. Finn v_k .
- f) Lag en tabell som viser v_k fra k lik 0 til 15. Stemmer resultatene med det du tippet i b)?

Oppgavene nedenfor forutsetter at du kan bruke en lommeregner eller datamaskin til å finne løsningene til differensligning med gitte initialbetingelser, og at du kan fremstille disse løsningene grafisk.

30. Tegn grafene til disse tallfølgene på lommeregneren eller datamaskinen og sammenlign med de svarene du får ved regning.

a) $x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = n$

b) $x_{n+1} - 2x_n = 2^n$

c) $x_{n+1} + 3x_n = \cos \frac{n\pi}{3}$

31. Tegn grafen til tallfølgen $x_n = \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n$.

32. Skisser løsningen til oppgave 11 grafisk.

33. Kontroller løsningen av oppgave 16 grafisk.

34. Finn løsningen til oppgave 17 grafisk.

35. Tegn opp løsningene til oppgave 18 for forskjellige verdier av parametrene r , p , q , x_0 og y_0 . Illustrer de forskjellige løsningsforløpene.

36. På en del lommeregnerne kan du ikke løse annenordens differensligninger direkte, men du kan «kode» dem som et system av to førsteordens ligninger. For eksempel kan du skrive ligningen

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \quad x_0 = c, \quad x_1 = d$$

som et system

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}, \quad x_1 = d, \quad y_1 = c$$

$$y_n = x_{n-1}$$

Forklar hvorfor dette knepet virker og bruk det til å løse oppgave 7 og 13 grafisk.

37. I denne oppgaven skal vi se på en mer interessant modell for samspillet mellom rovdyr og byttedyr enn den vi så på i oppgave 18. Vi lar x_n og y_n betegne henholdsvis antall rovdyr og antall byttedyr etter n perioder, og vi antar at

$$x_{n+1} = x_n(r + cy_n), \quad y_{n+1} = y_n(q - dx_n)$$

der r er litt mindre enn 1, q litt større enn 1, og c og d er to små, positive tall.

a) Forklar tankegangen bak modellen.

b) Velg $r = 0.98$, $q = 1.04$, $c = 0.0002$, $d = 0.001$, $x_0 = 50$, $y_0 = 200$ og tegn løsningskurvene på lommeregneren. Kommenter løsningen. Hvorfor er toppene på de to kurvene forskjøvet i forhold til hverandre?

4.3 Konvergens av følger

I følgen

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

nærmer leddene seg mot 1 når n vokser. Leddene i følgen

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$$

vokser derimot over alle grenser når n øker, og nærmer seg ikke noe tall. Vi sier at den første følgen *konvergerer* mot grenseverdien 1, mens den andre følgen *divergerer*. Dette er de to viktigste begrepene vi har i teorien for følger, og vi skal nå se litt nærmere på dem.

Vi skal begynne med å definere presist hva det betyr at følgen $\{a_n\}$ konvergerer mot grenseverdien a , men før vi gjør det, er det et lite poeng det er lurt å få med seg. I resten av boken vil det stadig dukke opp uttrykk av typen $|x - a|$ der x og a er reelle tall, og det er viktig å tolke disse uttrykkene riktig: Vi skal alltid tenke på $|x - a|$ som *avstanden mellom x og a* (tegn opp punktene på tallinjen og se at dette stemmer uansett hvilket av tallene x og a som er størst).

Så hva skal det betyr at følgen $\{a_n\}$ konvergerer mot grenseverdien a ? Et godt forslag er å si at $\{a_n\}$ konvergerer mot a dersom vi kan få avstanden $|a_n - a|$ så liten vi måtte ønske ved å velge n tilstrekkelig stor. Det lønner seg imidlertid å presisere denne ideen enda et hakk (skjønner du ikke denne definisjonen på første forsøk, kan det være smart å lese kommentarene etter den før du prøver på nytt):

4.3.1 Definisjon

Følgen $\{a_n\}$ konvergerer mot et tall a dersom det for ethvert reelt tall $\epsilon > 0$ (uansett hvor lite), finnes et tall $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. (Symbolet ϵ er den greske bokstaven epsilon som det er vanlig å bruke i definisjoner av denne typen.) I så fall skriver vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

En følge som konvergerer mot et tall kalles *konvergent*, mens en følge som ikke konvergerer kalles *divergent*. I stedet for $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ skriver man av og til « $a_n \rightarrow a$ når $n \rightarrow \infty$ ».

Bemerkning

Definisjonen ovenfor kan virke temmelig ubegripelig første gang man møter den, men siden den danner mønster for en lang rekke lignende definisjoner senere i denne boken (og i mange andre matematikkbøker), lønner det seg å bruke tid på å forstå hva den sier, og hvorfor den er som den er. La oss først observere at den virkelig er en presisering av vårt opprinnelig forslag til definisjon – det som sa at $\{a_n\}$ konvergerer mot a dersom vi kan få avstanden $|a_n - a|$ så liten vi måtte ønske ved å velge n tilstrekkelig stor. Det er to spørsmål som uvilkårlig melder seg når man møter dette definisjonsforslaget: Hvor liten ønsker vi at $|a_n - a|$ skal være? Og hvor stor må vi velge n for at den skal være «tilstrekkelig stor»? La oss sette et navn på vårt ønske ved å si at vi

ønsker at $|a_n - a|$ skal være mindre enn et tall som vi kaller ϵ . Ifølge definisjonen skal det være mulig å få oppfylt dette ønsket ved å velge n tilstrekkelig stor. Dette må bety at det finnes en eller annen nedre grense N slik at hvis vi bare velger n større enn eller lik N , så er ønsket oppfylt. Men dermed har vi kommet frem til at uansett hvilket ønske $\epsilon > 0$ vi måtte ha, så skal det være mulig å finne en nedre grense N slik at hvis $n \geq N$, så er $|a_n - a| < \epsilon$. Dette er nøyaktig hva den mystiske definisjon 4.3.1 sier.

«Javel,» svarer man kanskje, «jeg ser nå at de to definisjonsforslagene egentlig sier det samme, men det er da ingen god grunn til å velge den mest pedantiske og ubegripelige versjonen.» Nå viser det seg at det er minst to grunner for at vi skal velge definisjon 4.3.1 fremfor den mer uformelle varianten. Den første grunnen er at selv om definisjon 4.3.1 er én presisering av det uformelle forslaget, så kan det tenkes at det finnes en annen og like rimelig presisering som fører til et annet sluttresultat – matematikkhistorien har flere eksempler på at uformelle definisjoner har latt seg tolke på ulike måter med generell forvirring som resultat. Den andre og kanskje viktigste grunnen er at definisjon 4.3.1 har innebygget i seg en *metode* for å vise at en følge $\{a_n\}$ konvergerer mot en grenseverdi a ; alt vi må gjøre er å vise at uansett hvilken $\epsilon > 0$ vi blir gitt, så må det finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Denne metoden er svært nyttig, og vi skal gjøre bruk av den gang på gang.

4.3.2 Eksempel

Vi så ovenfor på følgen

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

og påsto at den konvergerer mot grenseverdien 1. La oss sjekke at dette virkelig er tilfellet. Vi skriver $a_n = (n-1)/n$. Siden

$$|a_n - a| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| \left(1 - \frac{1}{n} \right) - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n},$$

må vi vise at uansett hvilken $\epsilon > 0$ vi blir gitt, så kan vi finne en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a| = 1/n < \epsilon$ når $n \geq N$. Men dette er lett; vi velger bare N til å være et naturlig tall slik at $1/N < \epsilon$ (at et slikt naturlig tall alltid finnes, vet vi fra Arkimedes' prinsipp 2.2.6). Dermed har vi vist at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$



Det ville være svært tungvint å bruke definisjon 4.3.1 på denne måten for å finne grenseverdien til mer kompliserte uttrykk, men heldigvis finnes det regneregler som gjør arbeidet lettere. Selv om disse reglene er kjent fra skolematematikken, tar vi med et par av bevisene for å illustrere bruken av definisjon 4.3.1.

4.3.3 Regneregler for grenseverdier La $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ være to konvergente følger med $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$. Da er

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B \text{ (spesielt er } \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = -B)$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

$$(iv) \text{ Dersom } B \neq 0, \text{ er } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{A}{B}$$

Bevis: Vi nøyer oss med å vise (i) og (iii). Selv om noen vil synes at det er pedantisk å gi formelle bevis for påstander som er så «opplagte», kan det allikevel være lurt å sette seg grundig inn i disse argumentene. De er nemlig enkle eksempler på bevisstrategier som vi senere skal benytte til å bevise resultater som slett ikke er opplagte.

(i) Vi må vise at uansett hvilken $\epsilon > 0$ vi blir gitt, så finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|(a_n + b_n) - (A + B)| < \epsilon$ når $n \geq N$. Ifølge trekantulikheten 2.1.1 er

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|,$$

så det er godt nok å vise at vi kan få både $|a_n - A|$ og $|b_n - B|$ mindre enn $\epsilon/2$ ved å velge n stor nok. Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, finnes det et tall $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - A| < \epsilon/2$ for alle $n \geq N_1$. Tilsvarende finnes det et tall $N_2 \in \mathbb{N}$ slik at $|b_n - B| < \epsilon/2$ for alle $n \geq N_2$. Velger vi derfor N lik det største av tallene N_1 og N_2 , ser vi at dersom $n \geq N$, så er både $|a_n - A| < \epsilon/2$ og $|b_n - B| < \epsilon/2$. Følgelig er

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

og beviset er fullført.

(iii) Gitt en $\epsilon > 0$, må vi finne en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n b_n - AB| < \epsilon$ når $n \geq N$. Det er vanskelig å beregne avstanden $|a_n b_n - AB|$ direkte fordi både a_n og b_n varierer med n . Vi skal bruke et triks som spalter opp uttrykket i to deler – ett som inneholder variasjonen til a_n , og ett som inneholder variasjonen til b_n . Vi begynner med å legge til og trekke fra leddet $a_n B$, og bruker deretter trekantulikheten:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |(a_n b_n - a_n B) + (a_n B - AB)| \\ &\leq |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| = |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A|. \end{aligned}$$

Som i (i) skal vi nå vise at vi kan få hvert av leddene $|a_n| \cdot |b_n - B|$ og $|B| \cdot |a_n - A|$ mindre enn $\epsilon/2$ ved å velge n stor nok.

Vi tar det enkleste leddet $|B| \cdot |a_n - A|$ først. Hvis $B = 0$ er det ingen ting å vise, så vi kan anta at $B \neq 0$. Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, må det finnes en $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - A| < \epsilon/2|B|$ når $n \geq N_1$. Dermed er $|B| \cdot |a_n - A| < \epsilon/2$.

Leddet $|a_n| \cdot |b_n - B|$ kan behandles på omtrent samme måten, men det er litt mer komplisert fordi faktoren $|a_n|$ ikke er konstant. Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, vet vi imidlertid at det må finnes en $N_2 \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n| < |A| + 1$ når $n \geq N_2$. Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, finnes det en $N_3 \in \mathbb{N}$ slik at $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2(|A| + 1)}$ når $n \geq N_3$. Velger vi derfor n større enn eller lik både N_2 og N_3 , er

$$|a_n| \cdot |b_n - B| < (|A| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2(|A| + 1)} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Lar vi nå N være det største av de tre tallene N_1, N_2 og N_3 , ser vi at dersom $n \geq N$, så er

$$|a_n b_n - AB| \leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

og beviset er fullført. ■

Legg merke til bruken av trekantulikheten i bevisene ovenfor; den er typisk for problemer som har med konvergens og kontinuitet å gjøre.

4.3.4 Eksempel

Finn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + 1/n}{3 - 1/n^2}.$$

Vi skal finne denne grensen skritt for skritt ved hjelp av regnereglene ovenfor. Siden følgen som er konstant lik 7, opplagt konvergerer mot 7, og følgen $1/n$ konvergerer mot 0, så forteller regneregelen 4.3.3(i) oss at grenseverdien til telleren er $7 + 0 = 7$. La oss så se på nevneren. Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$, må

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$$

ifølge 4.3.3(iii) (dette kan man selvfølgelig også innse på annen måte). Siden følgen som er konstant lik 3 må konvergere mot 3, kan vi nå bruke 4.3.3(ii) til å konkludere med at nevneren konvergerer mot $3 - 0 = 3$. Dermed vet vi at telleren konvergerer mot 7 og nevneren mot 3, og ifølge 4.3.3(iv) er da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + 1/n}{3 - 1/n^2} = \frac{7}{3}.$$
■

I praksis er det selvfølgelig ingen som resonnerer så møysommelig som vi har gjort her, men det er ofte nyttig å vite nøyaktig *hvorfor* man kan argumentere som man gjør – spesielt når man plutselig kommer i tvil om at det virkelig er riktig!

La oss også se på et eksempel der vi må omforme uttrykket litt før vi benytter regnereglene våre.

4.3.5 Eksempel

Beregn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3n^4}{n^4 - 5n^3 + n}.$$

I eksempler av denne typen lønner det seg å dividere med den høyeste potensen av n i teller og nevner. I vårt tilfelle er n^4 den høyeste potensen, og vi får

$$\frac{1 - 3n^4}{n^4 - 5n^3 + n} = \frac{1/n^4 - 3}{1 - 5/n + 1/n^3}.$$

Siden både $1/n^4$, $5/n$ og $1/n^3$ går mot null, ser vi at telleren i det siste uttrykket går mot -3 , mens nevneren går mot 1 . Ifølge regneregel 4.3.3(iv) er da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3n^4}{n^4 - 5n^3 + n} = -\frac{3}{1} = -3.$$



Det er nå på tide å se litt nærmere på de følgene som ikke konvergerer mot noen grenseverdi – de *divergente* følgene. Følger kan divergere på ulike vis; for eksempel divergerer følgen $\{(-1)^n\}$ fordi den hopper frem og tilbake mellom verdiene -1 og 1 uten å slå seg til ro ved en grenseverdi, mens følgen $\{n^2\}$ divergerer fordi den vokser over alle grenser når n går mot uendelig. Den siste typen av divergens er spesielt viktig, og vi skal nå studere den nærmere.

Uformelt sier vi at en følge $\{a_n\}$ går mot uendelig dersom vi kan få leddene så store vi måtte ønske ved å velge n tilstrekkelig stor, men også i dette tilfelle lønner det seg å basere teorien på en litt mer formalistisk definisjon.

4.3.6 Definisjon

Følgen $\{a_n\}$ *divergerer mot uendelig* dersom det for ethvert tall $c \in \mathbb{R}$ (uansett hvor stort det måtte være), finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $a_n \geq c$ for alle $n \geq N$. I så fall skriver vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Tilsvarende sier vi at følgen $\{a_n\}$ *divergerer mot minus uendelig* dersom det for ethvert tall $c \in \mathbb{R}$, finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $a_n \leq c$ for alle $n \geq N$. I så fall skriver vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Dette er en definisjon av akkurat samme type som definisjon 4.3.1; c spiller den samme rollen her som ϵ spilte forrige gang. Legg merke til at det i den første delen av definisjonen lønner seg å tenke på c som et stort positivt tall, mens det i den andre delen av definisjonen lønner seg å tenke på c som et «stort negativt tall», det vil si et negativt tall med stor tallverdi.

4.3.7 Eksempel

Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Gitt en $c \in \mathbb{R}$, må vi finne en N slik at $\sqrt{n} \geq c$ når $n \geq N$. Lar vi N være det minste hele tallet større enn c^2 , ser vi at $\sqrt{N} > \sqrt{c^2} = c$. Dersom $n \geq N$, så er $\sqrt{n} \geq \sqrt{N} > c$, og beviset er ferdig. ■

Det finnes regneregler for divergente følger også. De fleste av disse kjenner du fra skolematematikken selv om du kanskje er mer vant til å bruke dem på funksjoner enn på følger. For eksempel vet du at hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, så er $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$. Du vet også at hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ er et positivt tall, så divergerer $\{a_n/b_n\}$. De viktigste regnereglene for følger som divergerer mot $\pm\infty$ er listet opp i oppgave 12.

Det neste eksemplet minner om et triks som ofte er nyttig.

4.3.8 Eksempel

Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \infty.$$

Siden både $\sqrt{n+1}$ og \sqrt{n} går mot uendelig, er det ikke umiddelbart klart hva differansen går mot. I uttrykk som inneholder en differanse eller en sum av to kvadratrøtter, er det imidlertid et triks som ofte er nyttig: Vi multipliserer over og under brøkstrekken med det «konjugerte» uttrykket, det vil si det uttrykket vi får om vi bytter ut tegnet mellom kvadratrøttene med det motsatte. Det konjugerte uttrykket til $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ er $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, og multipliserer vi med det over og under brøkstrekken, får vi

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}.$$

Her har vi brukt tredje kvadratsetning («konjugatsetningen») til å se at

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 = (n+1) - n = 1.$$

Siden både $\sqrt{n+1}$ og \sqrt{n} går mot uendelig, følger påstanden umiddelbart. ■

Bemerkning

Legg merke til at vi her snakker om den konjugerte i en litt annen betydning enn vi gjorde i kapitlet om komplekse tall.

Det er en del grenseuttrykk vi ikke har generelle regler for. Det finnes for eksempel ingen regel som forteller oss hva $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$ blir dersom både a_n og b_n går mot null, og heller ingen regel som sier hva $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ blir dersom både a_n og b_n går mot ∞ . Slike problemer må studeres enkeltvis; å vite at a_n og b_n går mot null, gir oss ikke nok informasjon til å avgjøre hva brøken a_n/b_n går mot.

Uttrykk av typen $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$ der både a_n og b_n går mot null, kaller vi ofte «0/0»-uttrykk. Tilsvarende kaller vi et uttrykk av typen $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ der både a_n og b_n går mot ∞ , for et « $\infty - \infty$ »-uttrykk. Både «0/0»-uttrykkene og « $\infty - \infty$ »-uttrykkene er det vi kaller *ubestemte uttrykk*; det vil si uttrykk hvor det er umulig å gi generelle regler for hva grenseverdien blir. Andre typer ubestemte uttrykk er « ∞/∞ », « $0 \cdot \infty$ », « 1^∞ », « ∞^0 » og « 0^0 ». Den meste effektive metoden til å behandle ubestemte uttrykk kalles *L'Hôpitals regel*. Noen kjenner nok denne metoden fra skolematematikken, og vi skal se nærmere på den i kapittel 6.

I de følgene vi hittil har sett på, har vi alltid hatt en pen formel for det n -te leddet a_n . Det er ikke alltid vi er så heldige; det hender at følgene våre er definert på en slik

måte at det er umulig eller uhensiktsmessig å regne ut en formel for a_n . Dersom vi ønsker å vise at en slik følge konvergerer, må vi bruke mer generelle prinsipper. Vi skal nå se på det enkleste av disse prinsippene. Det vil være tilstrekkelig for de fleste formålene i denne boken.

Først litt terminologi: En følge $\{a_n\}$ er *voksende* dersom $a_{n+1} \geq a_n$ for alle n . Følgen er *avtagende* dersom $a_{n+1} \leq a_n$ for alle n . Vi bruker *monoton* som et fellesnavn på voksende og avtagende følger. Husk også at en følge er *begrenset* dersom det finnes et tall $M \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n| \leq M$ for alle n .

4.3.9 Teorem

En monoton, begrenset følge er alltid konvergent.

Bevis: Vi skal bevise teoremet for voksende følger, og overlate de avtagende følgene som en øvelse til leserne. Anta at $\{a_n\}$ er en voksende, begrenset følge. Da er mengden

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

– som består av alle leddene i følgen – ikke-tom og begrenset. Ifølge kompletthetsprinsippet 2.3.2 har A en minste øvre skranke a . Vi skal vise at $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

For enhver $\epsilon > 0$ må vi vise at det finnes en N slik at $|a_n - a| < \epsilon$ når $n \geq N$. Legg først merke til at siden a er en øvre skranke for A , så er $a_n \leq a$ for alle n . Dessuten må det finnes et ledd $a_N > a - \epsilon$; hvis ikke ville jo $a - \epsilon$ være en øvre skranke for A som er mindre enn den minste øvre skranken a . Siden følgen er voksende, må $a_n > a - \epsilon$ for alle $n \geq N$. Dermed har vi vist at $a - \epsilon < a_n \leq a$ for alle $n \geq N$, og beviset er fullført. ■

Bemerkning

Teoremet ovenfor kan se temmelig opplagt ut – dersom følgen $\{a_n\}$ er voksende og begrenset, må den jo før eller siden bremse opp og slå seg til ro nær en grenseverdi. At det ikke er fullt så enkelt, kan vi se fra følgende eksempel: Anta at vi ikke hadde oppfunnet de reelle tallene, men bare arbeidet med de rasjonale. Da ville følgen

$$a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, a_4 = 1.414, a_5 = 1.4142, \dots$$

(som består av bedre og bedre tilnærmelser til $\sqrt{2}$) være en voksende, begrenset følge av rasjonale tall som ikke nærmer seg noen (rasjonal) grenseverdi. Innenfor det rasjonale tallsystemet er altså teoremet galt.

Problemet er at den rasjonale tallinjen er «hullete». Følgen $\{a_n\}$ bremser ganske riktig opp, men det er ikke nok rasjonale tall til å markere hvor den stopper – den stopper nemlig ved det «hullet» i den rasjonale tallinjen der $\sqrt{2}$ burde ha vært. Det er kompletthetsprinsippet som garanterer oss at det ikke finnes tilsvarende hull i den reelle tallinjen.

I det neste kapitlet skal vi se at teorem 4.3.9 er et meget nyttig verktøy i studiet av kontinuerlige funksjoner. Eksemplet vi avslutter denne seksjonen med, viser at teoremet også kan brukes til å bestemme grenseverdien til visse typer følger.

4.3.10 Eksempel

Følgen $\{a_n\}$ er gitt ved $a_1 = 5/2$ og

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5} \quad (1)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Legg merke til at denne definisjonen bestemmer hva a_n er for alle n : a_1 er oppgitt, a_2 kan beregnes ved å bruke formel (1) med $n = 1$, deretter kan a_3 beregnes ved å bruke formelen for $n = 2$, og så videre. Problemet minner om differensligningene vi studerte tidligere i dette kapitlet, men fordi a_n er kvadrert, faller ikke ligningen inn under teorien vår – mens vi tidligere studerte *lineære* differensligninger, har vi nå støtt på et *ikke-lineært* eksempel. Det viser seg at disse ikke-lineære differensligningen er mye mer kompliserte enn de lineære, og vanligvis er det ikke mulig å finne en løsningsformel for dem. I dette eksemplet er vi imidlertid ikke på jakt etter en løsningsformel – alt vi vil finne er grenseverdien av a_n når $n \rightarrow \infty$.

La oss først finne ut hva grenseverdien kan være dersom den finnes. Anta at $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Tar vi grensen på begge sider av formel (1), får vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + 6}{5} = \frac{a^2 + 6}{5}.$$

Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$ (hvorfor?), får vi ligningen

$$a = \frac{a^2 + 6}{5}. \quad (2)$$

Dette er en annengradsligning med løsninger $a = 2$ og $a = 3$. Vi har dermed vist at dersom følgen konvergerer, så må grenseverdien være 2 eller 3.

For å få litt følelse med hvordan følgen oppfører seg, kan det være lurt å regne ut noen verdier. Vi får

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{5}{2} = 2.5 \\ a_2 &= \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6}{5} = \frac{49}{20} = 2.45 \\ a_3 &= \frac{\left(\frac{49}{20}\right)^2 + 6}{5} = \frac{4801}{2000} = 2.4005 \end{aligned}$$

som tyder på at følgen avtar langsomt.

Dette gir oss en idé. Dersom vi kan vise at følgen avtar, men hele tiden holder seg større enn 2, så må den konvergere mot 2. (Hvorfor? Jo, siden følgen er avtagende og begrenset, må den konvergere ifølge teoremet ovenfor. Vi har sett at de eneste mulige grenseverdiene er 2 og 3, og siden følgen starter på $5/2$ og avtar, så er 2 den eneste muligheten.) Men hvordan kan vi vise at følgen er avtagende og alltid større enn 2? Skriver vi denne påstanden med symboler, ser vi at vi må vise at

$$P_n: 2 < a_{n+1} < a_n$$

for alle n . Kanskje det er mulig å vise dette ved induksjon? Det i hvert fall lett å vise at påstanden P_1 holder; siden $a_1 = 5/2$ og $a_2 = 49/20$, så er opplagt $2 < a_2 < a_1$.

La oss anta at påstanden er sann for $n = k$; det vil si at

$$P_k: 2 < a_{k+1} < a_k.$$

Vi må vise at

$$P_{k+1}: 2 < a_{k+2} < a_{k+1}$$

også er sann.

Dette er ikke vanskelig. Først observerer vi at

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1}^2 + 6}{5} > \frac{2^2 + 6}{5} = 2$$

hvor vi har brukt at $a_{k+1} > 2$ (første halvdel av P_k). Deretter ser vi at

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1}^2 + 6}{5} < \frac{a_k^2 + 6}{5} = a_{k+1},$$

hvor vi har brukt at $a_{k+1} < a_k$ (andre halvdel av P_k). Dermed har vi vist at P_k medfører P_{k+1} , og ifølge induksjonsprinsippet er da P_n sann for alle n .

Det gjenstår bare å oppsummere: Siden $2 < a_{n+1} < a_n$ for alle n , er følgen avtagende og begrenset. Ifølge teorem 4.3.9 må den konvergere mot en grenseverdi a . De eneste mulige grenseverdiene er $a = 2$ og $a = 3$, og siden følgen starter på $5/2$ og avtar, må $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. ■

Bemerkning

Vi kan variere eksemplet ovenfor ved å forandre verdien til det første leddet a_1 , men beholde rekursjonsformelen (1). Det kan være fristende å tro at de følgene vi da får, alltid må konvergere mot enten 2 eller 3. Det er imidlertid ikke tilfellet; velger vi forskjellige verdier for det første leddet a_1 , så viser det seg at følgen konvergerer mot 2 dersom $|a_1| < 3$, at den konvergerer mot 3 dersom $|a_1| = 3$, og at den divergerer mot ∞ dersom $|a_1| > 3$. Informasjonen vi får ved å løse annengradsligningen (2) må derfor behandles med forsiktighet; den er slett ikke noen garanti for at følgen vår konvergerer mot én av de to løsningene 2 eller 3.

Oppgaver i seksjon 4.3

1. Finn grenseverdiene:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4 + 2n}{3n^4 - 7}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4}{-2n^3 + 7}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 2n - 13}{7n - 4}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 - 13}{5n^3 - 4} - \frac{4n^4 + 12}{1 - 5n^4} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 2 \sin n}{e^{-n} + 6n^5}$

2. Finn grenseverdiene:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4 + 13n^3}{-4n^3 + 12}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 4n^3}{2n + 1} - \frac{7n^2 - 3}{4n^2 - n} \right)$$

3. Finn grenseverdiene:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n} - \sqrt{n}}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + e^{-2n}} - e^{-n})$$

4. Vis at disse grenseverdiene er riktige ved bare å bruke definisjon 4.3.1.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{n} \right) = 3$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin n}{n} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{3n + 2} = \frac{1}{3}$$

5. Vis at disse grenseverdiene er riktige ved bare å bruke definisjon 4.3.6.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (3n + 7) = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4}{7 - n} = -\infty$$

6. Finn en løsning av differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{3}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 0$$

slik at $x_0 = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

7. Finn en løsning av differensligningen

$$x_{n+2} + \frac{8}{3}x_{n+1} - x_n = 0$$

slik at $x_0 = 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

8. Bevis 4.3.3(ii).

9. I denne oppgaven skal vi se hvordan trikset med å gange med den konjugerte i eksempel 4.3.8 kan utvides til tredjerøtter, fjerderøtter osv.

a) Vis at for alle naturlige tall $n > 1$ er

$$(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n - y^n$$

b) Sett $x = \sqrt[3]{n+1}$, $y = \sqrt[3]{n}$ og bruk formelen i a) til å vise at

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}^2 + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n}^2}$$

c) Finn grenseverdien $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$.

d) Finn grenseverdien $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$.

10. a) Anta at $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B$, der $B \neq 0$. Vis at $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/x_n) = 1/B$ uten å bruke 4.3.3(iv)

b) Bruk a) og 4.3.3(iii) til å vise 4.3.3(iv)

11. Vis at dersom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ og

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \text{for alle } n,$$

så er $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ (uformelt kalles dette ofte «skviseloven»).

12. Vis følgende regneregler for divergente følger:

a) Dersom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, så er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty.$$

b) Dersom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ og $\{b_n\}$ er begrenset, så er $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.

c) Dersom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ og $\{b_n\}$ er begrenset, så er $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n/a_n) = 0$.

Vi sier at følgen $\{b_n\}$ er *begrenset bort fra null* dersom det finnes et reelt tall $b > 0$ slik at $|b_n| \geq b$ for alle n . Vis at:

d) Dersom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ og $\{b_n\}$ er en positiv følge som er begrenset bort fra null, så er $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

e) Anta at $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er to positive følger slik at $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ og $\{b_n\}$ er begrenset bort fra 0. Da er $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n/a_n) = \infty$.

f) Bruk reglene ovenfor til å finne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + n^2}{n + 1} + \sin n \right).$$

13. Finn eksempler på følger $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ slik at $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ og

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = 0$

- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = \infty$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$ er forskjellig fra både 0 og ∞ .

14. Finn eksempler på følger $\{a_n\}, \{b_n\}$ slik at $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ og

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \infty$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ er et endelig tall.

15. Gjennomfør beviset for teorem 4.3.9 for avtagende følger

16. Vis at dersom $\{a_n\}$ kan skrives som en sum av de to begrensede følger $\{b_n\}$ og $\{c_n\}$, den ene voksende og den andre avtagende, så er $\{a_n\}$ konvergent.

17. (UiO) La $\{a_n\}$ være en tallfølge definert ved

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$$

Vis at følgen konvergerer og finn grenseverdien.

18. (UiO) Definer rekursivt en følge $\{x_n\}$ ved $x_1 = 1$, og $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, for $n \geq 1$.

- a) Vis ved induksjon på n at $x_n < x_{n+1}$ for alle naturlige tall n .
 b) Vis at følgen $\{x_n\}$ konvergerer og bestem grensen.
 c) Undersøk konvergens av følgen $\{y_n\}$, definert ved $y_1 = 1$, og $y_{n+1} = \sqrt{2y_n + y_n^2}$ for $n \geq 1$.

19. (UiO) La følgen $\{x_n\}$ være gitt ved

$$x_1 = a \quad \text{hvor} \quad a > 0, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{3}, \quad n \geq 1.$$

- a) Vis at hvis a er slik at $x_2 > x_1$, så er følgen strengt voksende, og at hvis a er slik at $x_2 < x_1$, så er følgen strengt avtagende. (*Hint*: Vis påstanden: « $x_{n+1} > x_n$ (evt. $x_{n+1} < x_n$), for alle n », ved induksjon på n .)
 b) Vis for hvilke (positive) verdier av a følgen er konvergent. Finn grenseverdien.

20. a) (UiO) Funksjonen f er definert for $x \geq 2/3$ ved

$$f(x) = x - \sqrt{3x - 2}.$$

Avgjør hvor f er voksende og avtagende. Finn eventuelle nullpunkter og ekstremalverdier. Skisser grafen til f .

b) Følgen $\{a_n\}$ er definert ved

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} \quad \text{for} \quad n \geq 1.$$

Begrunn at $\{a_n\}$ konvergerer og finn grensen.

- 21.** (UiO) La $\{x_n\}$ være en følge med $x_n > 0$ for alle n . La $y_n = x_{n+1}/x_n$.
- Anta $L = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ eksisterer med $L < 1$. Vis at $\{x_n\}$ konvergerer og $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Vis at dersom $L > 1$, så er $\{x_n\}$ ubegrenset.
 - Gi eksempler på at $L = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$ og at (i) $\{x_n\}$ konvergerer og (ii) $\{x_n\}$ divergerer.
 - Et eksempel på en følge $\{x_n\}$ slik at $L = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ eksisterer, er Fibonacci-tallene, som er definert ved at $x_1 = x_2 = 1, x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ for $x \geq 2$. Vis at $L = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ eksisterer og finn L uten å bruke formelen for det n -te Fibonacci-tallet. (*Hint:* Vis først at hvis L eksisterer så er $L = 1 + (1/L)$. Bruk så dette til å vise at $y_n \rightarrow L$ og til å finne L .)
- 22.** (UiO) La u og v være to ikke-negative reelle tall, $u \leq v$. Vi definerer to tallfølger $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ og $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ rekursivt ved ligningene

$$(i) \quad a_1 = u, \quad b_1 = v \quad (ii) \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

- a) Vis at

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

og at

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n).$$

- b) Vis at $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konvergerer mot en felles grense c .

- 23.** (UiO) Definer følgen $\{a_n\}$ ved

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^3 + 3a_n^2}.$$

- a) Vis først at $a_{n+1} - a_n \leq 1$ for alle n og deretter at

$$\frac{a_n}{1 + a_n + \frac{1}{3a_n}} \leq a_{n+1} - a_n.$$

$$(Hint: a_{n+1}^3 - a_n^3 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n + a_n^2).)$$

- b) Vis at $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 1$.

- c) Vis at $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/n) = 1$.

De siste oppgavene i denne seksjonen forutsetter at du har tilgang til et dataprogram eller en lommeregner som tegner grafen til følger.

- 24.** Tegn grafen til følgen i oppgave 17 for $a = 1.99$, $a = 1.999$, $a = 2.01$ og $a = 2.001$.

- 25.** Tegn grafen til følgen i oppgave 18. Forandre a_1 til 1.001 og tegn grafen da.

- 26.** Tegn grafen til følgen i oppgave 21. Tegn også grafen til (a_n/n) .

27. Vi skal se på en modell for utviklingen til en dyrebestand som kalles *logistisk vekst*. Den enkleste vekstmodellen er *eksponentiell vekst* der bestanden b_n etter n perioder er gitt ved

$$b_{n+1} = \mu b_n \quad (*)$$

der μ er et tall litt større enn 1. Denne modellen er imidlertid urealistisk over lengre perioder fordi den tilsier at bestanden vokser ubegrenset. I logistisk vekst erstatter vi (*) med

$$b_{n+1} = \mu b_n \left(1 - \frac{b_n}{B}\right) \quad (**)$$

der B er en bæregrense for bestanden. Innfører vi den relative bestanden $x_n = b_n/B$, kan (**) skrives

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

Vi skal se litt på hvordan x_n utvikler seg for forskjellige verdier av parameteren μ .

- Velg $\mu = 2.5$ og tegn grafen til x_n for $x_0 = 0.01$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.3$ og $x_0 = 0.5$. Hvilket mønster ser du?
- Velg $\mu = 3.2$ og gjenta eksperimentet fra a). Hva ser du nå?
- Velg $\mu = 3.5$ og gjenta eksperimentet nok en gang.
- Gjenta eksperimentet for $\mu = 3.9$.
- Eksperimenter videre på egenhånd. Konsulter [2], [7] eller [11] dersom du blir altfor nysgjerrig på hva som foregår.

*4.4 Kompletthet og konvergens

I denne seksjonen skal vi se på noen teoretiske spørsmål angående følger og konvergens. Egenskapene vi skal studere, står sentralt i mer avansert matematikk, men i denne boken skal vi stort sett unngå dem. Grunnen til at det er mulig, er at så lenge vi nøyer oss med å studere reelle tall og funksjoner av reelle tall, kan vi stort sett klare oss med de monotone følgene som vi studerte i forrige seksjon. Er vi derimot interessert i komplekse tall eller vektorer, kan vi ikke snakke om monotone følger (det er rett og slett ikke noen naturlig måte å ordne komplekse tall og vektorer på). Det er derfor vanskelig å utvide ideer og argumenter som har med monotone følger å gjøre, til mer generelle sammenhenger. De begrepene vi nå skal studere, avhenger ikke av monotonitet og er derfor bedre egnet for generalisering.

La oss starte med en følge $\{x_n\}$ av reelle tall. Vi skriver ut følgen som vist på figur 4.4.1 og setter en firkant rundt noen av leddene. Så samler vi disse leddene i en ny følge. Denne nye følgen $\{y_k\}$ kalles en *delfølge* av den opprinnelige.

$$x_1, \boxed{x_2}, x_3, \boxed{x_4}, \boxed{x_5}, x_6, x_7, x_8, \boxed{x_9}, x_{10}, \boxed{x_{11}}, \boxed{x_{12}}, x_{13}, x_{14}, \dots$$

$$x_2, x_4, x_5, x_9, x_{11}, x_{12}$$

Figur 4.4.1

La oss forsøke å uttrykke disse idéene litt mer matematisk. På figuren ovenfor hadde de leddene vi plukket ut, indeks 2, 4, 5, 9 osv. La oss si at det k -te leddet vi plukket ut hadde indeks n_k . Da er den nye følgen $\{y_k\}$ gitt ved

$$y_k = x_{n_k}.$$

Vi tar denne observasjonen som utgangspunkt for vår formelle definisjon av delfølge.

4.4.1 Definisjon

La $\{x_n\}$ være en tallfølge, og la $\{n_k\}$ være en strengt voksende følge av naturlige tall. Da kalles følgen $\{y_k\}$ definert ved

$$y_k = x_{n_k},$$

en *delfølge* av $\{x_n\}$.

La oss starte med et enkelt resultat for å bli vant til begrepet.

4.4.2 Lemma

Dersom følgen $\{x_n\}$ konvergerer mot x , så vil også enhver delfølge $\{y_k\}$ konvergere mot x .

Bevis: Gitt en $\epsilon > 0$, må vi vise at det finnes en K slik at $|y_k - x| < \epsilon$ for alle $k \geq K$. Siden $\{x_n\}$ konvergerer mot x , finnes det en K slik at $|x_n - x| < \epsilon$ når $n \geq K$. Hvis vi nå velger $k \geq K$, så er $y_k = x_{n_k}$, der $n_k \geq k \geq K$. Altså er

$$|y_k - x| = |x_{n_k} - x| < \epsilon,$$

og beviset er ferdig. ■

Neste resultat er mer overraskende.

4.4.3 Setning

Enhver følge har en monoton delfølge.

Bevis: La oss kalle et ledd x_n for en *spiss* dersom x_n er større enn eller lik alle senere ledd; altså dersom

$$x_n \geq x_k$$

for alle $k > n$. Det er klart at enten må en følge $\{x_n\}$ ha uendelig mange spisser, eller så har den bare endelig mange. Vi skal vise at i det første tilfellet har $\{x_n\}$ en avtagende delfølge, i det andre har den en voksende delfølge.

Anta først at $\{x_n\}$ har uendelig mange spisser:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, x_{n_4}, \dots$$

Per definisjon av spiss er $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq x_{n_4} \geq \dots$, og dermed er følgen av spisser en avtagende delfølge.

Anta så at det bare finnes et endelig antall spisser, og la x_m være den siste av dem. Vi konstruerer en voksende delfølge på følgende måte: La x_{m+1} være det første leddet i delfølgen. Siden x_{m+1} ikke er en spiss (den kommer jo etter alle spissene i følgen), må det finnes et senere ledd x_k som er større enn x_{m+1} . Vi lar x_k være det andre leddet i delfølgen. Nå kan heller ikke x_k være en spiss, så det må være et senere ledd x_p som er større enn x_k . Vi lar x_p være det tredje leddet i delfølgen. Ved å fortsette på denne måten skaffer vi oss en voksende delfølge, og beviset er fullført. ■

Kombinerer vi setning 4.4.3 med teorem 4.3.9, får vi følgende viktige resultat:

4.4.4 Teorem

Enhver begrenset følge har en konvergent delfølge.

Bevis: Ifølge setningen foran har vår begrensede følge en monoton delfølge. Denne monotone delfølgen er selvfølgelig også begrenset, og ifølge teorem 4.3.9 må den være konvergent. ■

Dette teoremet og dets mangfoldige generaliseringer spiller en sentral rolle i matematisk analyse. Mange av de resultatene som vi i denne boken skal bevise ved hjelp av monotone følger, kan generaliseres til mer kompliserte sammenhenger ved å benytte at begrensede følger har konvergente delfølger. Som et eksempel på slike generaliseringer, skal vi vise hvordan teoremet kan utvides til å dekke komplekse følger.

Vi trenger noen definisjoner først. At en følge $\{z_n\}$ av komplekse tall *konvergerer* mot et komplekst tall z , er definert på akkurat samme måte som for reelle følger: For ethvert positivt, reelt tall ϵ skal det finnes et naturlig tall N slik at $|z - z_n| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Det er lett å sjekke at dersom $z_n = x_n + iy_n$ og $z = x + iy$, så konvergerer $\{z_n\}$ mot z hvis og bare hvis $\{x_n\}$ konvergerer mot x og $\{y_n\}$ mot y . En følge $\{z_n\}$ av komplekse tall er begrenset dersom det finnes et reelt tall B slik at $|z_n| \leq B$ for alle n .

4.4.5 Korollar

Enhver begrenset følge av komplekse tall har en konvergent delfølge.

Bevis: Kall følgen $\{z_n\}$, og la $z_n = x_n + iy_n$. Siden $\{z_n\}$ er begrenset, er også følgen $\{x_n\}$ av realdeler begrenset, og ifølge teorem 4.4.4 har den en konvergent delfølge $\{x_{n_k}\}$ som konvergerer mot et tall x . Den tilsvarende delfølgen $\{y_{n_k}\}$ av $\{y_n\}$ er også begrenset og har derfor en konvergent delfølge $\{y_{n_{k_i}}\}$ (unnskyld notasjonen) som konvergerer mot et tall y . Den tilsvarende delfølgen $\{x_{n_{k_i}}\}$ av $\{x_{n_k}\}$ konvergerer fortsatt mot x (husk lemma 4.4.2), og følgelig konvergerer $\{z_{n_{k_i}}\} = \{x_{n_{k_i}} + iy_{n_{k_i}}\}$ mot $z = x + iy$. Vi har dermed funnet en konvergent delfølge, og beviset er ferdig. ■

Vi skal gjøre bruk av resultatet ovenfor når vi beviser algebraens fundamentalteorem i seksjon *5.5.

La oss nå gå løs på et litt annet tema. Går det an å vise at en følge konvergerer uten å konstruere grensen? Svaret er «ja», og nøkkelen ligger i følgende begrep.

4.4.6 Definisjon

En følge $\{x_n\}$ kalles en *Cauchy-følge* dersom det for enhver positiv ϵ finnes et tall $N \in \mathbb{N}$ slik at $|x_n - x_m| < \epsilon$ for alle $n, m \geq N$.

Intuitivt sier denne definisjonen at vi kan få differansen mellom leddene i følgen så små vi måtte ønske ved å gå langt nok ut. Det er rimelig å tenke seg at en Cauchy-følge må konvergere – leddene fluktuerer mindre og mindre jo lengre ut i følgen vi kommer, og de burde til slutt slå seg til ro ved en grenseverdi. Før vi viser dette, skal vi gjøre noe som er lettere, nemlig bevise den omvendte implikasjonen

4.4.7 Lemma

Enhver konvergent følge er en Cauchy-følge.

Bevis: Gitt en $\epsilon > 0$, må vi finne en N slik at $|x_n - x_m| < \epsilon$ når $n, m \geq N$. Siden $\{x_n\}$ konvergerer mot et tall x , finnes det en N slik at $|x - x_k| < \epsilon/2$ for alle $k \geq N$. Hvis $n, m \geq N$, så er (husk trekantulikheten 2.1.1)

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

og beviset er fullført. ■

Før vi går løs på det omvendte resultatet, viser vi to hjelpesetninger.

4.4.8 Lemma

Enhver Cauchy-følge er begrenset.

Bevis: La $\{x_n\}$ være en Cauchy-følge. Bruker vi definisjonen av Cauchy-følge med $\epsilon = 1$, ser vi at det finnes et naturlig tall N slik at $|x_n - x_m| < 1$ for alle $n, m \geq N$. Spesielt vil $|x_n - x_N| < 1$ for alle $n \geq N$. Skrevet uten absoluttverditegn, betyr dette at $x_N - 1 < x_n < x_N + 1$ for alle $n \geq N$. Dermed ser vi at

$$a = \min\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N - 1\}$$

er en nedre skranke for $\{x_n\}$, og at

$$b = \max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N + 1\}$$

er en øvre skranke. ■

4.4.9 Lemma

Dersom en Cauchy-følge $\{x_n\}$ har en delfølge som konvergerer mot x , så konvergerer også $\{x_n\}$ selv mot x .

Bevis: La $\{x_{n_k}\}$ være delfølgen som konvergerer mot x . For å vise at $\{x_n\}$ også konvergerer mot x , må vi vise at uansett hvilken $\epsilon > 0$ vi blir gitt, så kan vi finne en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|x - x_n| < \epsilon$ for alle $n \geq N$.

Siden $\{x_{n_k}\}$ konvergerer mot x , finnes det en K slik at $|x - x_{n_k}| < \epsilon/2$ for alle $k \geq K$. Siden $\{x_n\}$ er en Cauchy-følge, finnes det dessuten en M slik at $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ for alle $n, m \geq M$. La N være det største av tallene n_K og M .

Vi skal vise at dersom $n \geq N$, så er $|x - x_n| < \epsilon$. Velg k så stor at $n_k \geq N$. Ifølge trekantulikheten er

$$|x - x_n| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n|.$$

Her er det første leddet på høyresiden mindre enn $\epsilon/2$ siden $k \geq K$, og det andre leddet er mindre enn $\epsilon/2$ siden $n_k, n \geq M$. Dermed er

$$|x - x_n| < \epsilon,$$

og beviset er ferdig. ■

Vi har nå alle de ingrediensene vi behøver for å bevise hovedresultatet om Cauchy-følger.

4.4.10 Teorem

En følge av reelle tall konvergerer hvis og bare hvis den er en Cauchy-følge.

Bevis: Vi vet allerede fra lemma 4.4.7 at enhver konvergent følge er en Cauchy-følge. For å vise at enhver Cauchy-følge konvergerer, observerer vi først at den ifølge lemma 4.4.8 er begrenset. Teorem 4.4.4 forteller oss at den må ha en konvergent delfølge, og ifølge lemma 4.4.9 er den da selv konvergent. ■

Det går forøvrig an å bevise teorem 4.4.10 uten å gå veien om teorem 4.4.4; se oppgave 3.

Bemerkning

Det er en nær sammenheng mellom konvergens av Cauchy-følger og kompletthetsprinsippet. I denne boken startet vi med kompletthetsprinsippet som et aksiom og utledet at enhver Cauchy-følge konvergerer. Logisk sett kunne vi utmerket godt ha resonnert den andre veien; vi kunne ha tatt konvergens av Cauchy-følger som et aksiom, og dedusert oss frem til kompletthetsprinsippet (strengt tatt må vi også anta Arkimedes' prinsipp for å få til dette). De to prinsippene er altså to forskjellige måter å formulere det samme fenomenet på. Som formuleringer betraktet har de begge sine styrker og svakheter; fordelene ved kompletthetsaksiomet er at det er lett å forstå og greit å sjekke, mens fordelene ved Cauchy-følger er at de er enklere å generalisere til andre sammenhenger.

At konvergens av Cauchy-følger virkelig er en konsekvens av kompletthetsprinsippet, kan man overbevise seg om ved å se på hva som skjer med de rasjonale tallene. Desimaltallstilmørmelsene

$$x_1 = 1.4, x_2 = 1.41, x_3 = 1.414, x_4 = 1.4142, \dots$$

til $\sqrt{2}$ danner en Cauchy-følge av rasjonale tall, men denne følgen konvergerer ikke mot noen *rasjonal* grense. Innenfor verdenen av rasjonale tall er det derfor ikke sant at enhver Cauchy-følge konvergerer, og grunnen må være at de rasjonale tallene ikke er komplette.

Oppgaver i seksjon 4.4

1. Vis at en følge $\{z_n\}$ av komplekse tall $z_n = x_n + iy_n$ konvergerer mot en grense $z = x + iy$ hvis og bare hvis $\{x_n\}$ konvergerer mot x og $\{y_n\}$ konvergerer mot y .

2. I denne oppgaven skal vi gi et alternativt bevis for at enhver begrenset følge har en konvergent delfølge.

a) Kall den begrensede følgen $\{x_n\}$. Vis at det finnes et intervall $[a, b]$ slik at $x_n \in [a, b]$ for alle n .

b) Del intervallet $[a, b]$ i to like store deler $[a, c]$ og $[c, b]$, der $c = (a + b)/2$. Vis at minst ett av disse intervallene inneholder uendelig mange ledd fra følgen. Kall dette intervallet $I_1 = [a_1, b_1]$ (hvis begge intervallene inneholder uendelig mange ledd, velger du bare ett av dem).

c) Vis at ved å fortsette denne prosedyren kan du finne en følge av intervaller I_1, I_2, I_3, \dots slik at I_{n+1} er inneholdt i I_n , lengden til I_n er $(b - a)/2^n$, og hver I_n inneholder uendelig mange elementer fra følgen.

d) Vis at enhver følge $\{c_n\}$ slik at $c_n \in I_n$ for alle n , er konvergent. (*Hint:* La $I_n = [a_n, b_n]$ og vis først at følgen $\{a_n\}$ konvergerer).

e) Lag en delfølge $\{y_k\}$ av $\{x_n\}$ på denne måten:

$$(i) y_0 = x_0$$

(ii) Hvis $y_k = x_{n_k}$ er definert, så er $y_{k+1} = x_m$ der x_m er det første leddet etter x_{n_k} som er med i I_{k+1} .

Vis at $\{y_k\}$ konvergerer.

3. La $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en begrenset følge av reelle tall. Definer følger $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved

$$a_n = \sup\{x_m : m \geq n\}$$

$$b_n = \inf\{x_m : m \geq n\}.$$

a) Vis at følgerne $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer.

$$\text{La } a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{og} \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

b) Vis at følgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer hvis og bare hvis $a = b$.

c) Bruk a) og b) til å vise at alle Cauchyfølger konvergerer.

4. Et tall a kalles et *ophopningspunkt* for følgen $\{x_n\}$ dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes uendelig mange $n \in \mathbb{N}$ slik at

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

- Vis at a er et opphopningspunkt for $\{x_n\}$ hvis og bare hvis en delfølge av $\{x_n\}$ konvergerer mot a .
- Vis at enhver begrenset følge har et opphopningspunkt.
- Vis at en begrenset følge konvergerer hvis og bare hvis den har nøyaktig ett opphopningspunkt.
- Finn en ubegrenset følge som divergerer og som har nøyaktig ett opphopningspunkt.

5. Med delsummene til en følge $\{a_n\}$ mener vi

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Følgen av delsummer $\{s_n\}$ kalles *rekken generert* av $\{a_n\}$.

- Vis at $\{s_n\}$ er en Cauchy-følge hvis og bare hvis det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \epsilon$$

for alle $n, m \geq N$.

- Følgen $\{t_n\}$ gitt ved

$$t_1 = |a_1|, t_2 = |a_1| + |a_2|, \dots, t_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

kalles rekken av absoluttverdier generert av $\{a_n\}$. Vis at hvis $\{t_n\}$ er en Cauchy-følge, så er $\{s_n\}$ det også.

- Vis at dersom $\{t_n\}$ konvergerer, så gjør $\{s_n\}$ det også.

6. La $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ være en funksjon som sender komplekse tall til komplekse tall. Vi skal anta at f er en *kontraksjon*, dvs. at det finnes et reelt tall $k < 1$ slik at

$$|f(z) - f(w)| \leq k|z - w|$$

for alle $z, w \in \mathbb{C}$ (f forminsker altså avstanden mellom z og w med en faktor k eller mindre). Gitt et punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, lager vi en følge $\{z_n\}$ ved

$$z_1 = f(z_0), z_2 = f(z_1), \dots, z_{n+1} = f(z_n).$$

- Vis at for alle n og m er

$$|z_{n+m} - z_n| \leq k^n |z_m - z_0|.$$

- Forklar at

$$z_m - z_0 = (z_m - z_{m-1}) + (z_{m-1} - z_{m-2}) + \dots + (z_1 - z_0)$$

og bruk dette til å vise at

$$|z_m - z_0| \leq (k^{m-1} + k^{m-2} + \dots + k + 1)|z_1 - z_0|.$$

c) Vis at for alle m er

$$|z_m - z_0| \leq \frac{1}{1-k} |z_1 - z_0|.$$

d) Vis at $\{z_n\}$ er en Cauchy-følge.

e) Kall grensen til $\{z_n\}$ for z . Forklar hvorfor følgen $\{f(z_n)\}$ konvergerer mot $f(z)$, og bruk dette til å vise at $f(z) = z$.

f) Et punkt z slik at $f(z) = z$ kalles et *fikspunkt* for f . Vis at en kontraksjon ikke kan ha mer enn ett fikspunkt (*Hint*: Anta at z og w er fikspunkter og bruk at $f(z) - f(w) = z - w$).

g) Vis at følgen $\{z_n\}$ konvergerer mot det samme punktet uansett hvilket startpunkt z_0 vi velger.

4.5 Historisk epistel: Fra kaniner til kaos

I matematikk som på andre områder er det å finne seg selv fortapt i undring over et eller annet fenomen ofte mer enn halvveis til en ny oppdagelse.

— Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805–1859),
Samlede verker II

Leonardo Fibonacci var født i Pisa i Nord-Italia rundt 1170. Faren var kjøpmann, og på denne tiden var det livlige handelsforbindelser mellom Italia og Nord-Afrika. Leonardo kom derfor til å vokse opp i Bejaia i Algerie der faren ledet et stort handelshus. Han fikk arabiske lærere som ikke bare lærte ham arabisk, men som også ga ham bred innsikt i islamsk kultur og vitenskap. Senere utvidet Leonardo sine kunnskaper på handelsreiser i Nord-Afrika, Midtøsten og Sør-Europa.



Figur 4.5.1. Leonardo Fibonacci

Leonardo forstod tidlig at det indiske tallsystemet som araberne hadde adoptert og videreutviklet, var romertallene overlegent. I *Liber abaci* (1202) gir han en systematisk

innføring i de nye regneteknikkene, men til tross for hans overbevisende argumentasjon, skulle det enda gå flere hundre år før de indisk-arabiske tallene slo igjennom for alvor. Historisk sett er *Liber abaci* Leonardos viktigste verk, men det er kanskje i geometriboken *Practica geometriae* (ca. 1220) og den tallteoretiske *Liber quadratorum* (1225) at han klarest viser sin egen matematiske skaperkraft. På grunnlag av disse verkene er det vanlig å regne Fibonacci som den fremste europeiske matematikeren i middelalderen.

I 1224 ble Leonardo invitert til keiser Fredrik IIIs hoff i Palermo for å delta i en matematisk turnering. Han vant, og fikk på denne måten innpass i et av tidens mest interessante miljøer. Fredrik II (1194–1250) var tysk keiser, men hans egentlige arverike var «de to Sicilier» som i tillegg til øya Sicilia omfattet det italienske fastlandet fra sørenden til omtrent midt mellom Napoli og Roma. Sicilia hadde opplevd en kulturell oppblomstring etter arabernes erobring på 900-tallet, og i Fredriks tid var riket et møtested for europeisk og arabisk kultur. Keiserens egne bidrag var betydelige – i tillegg til å invitere ledende intellektuelle fra begge miljøer, skrev han selv en lærd bok om falkejakt som viser en imponerende evne til observasjon og systematisering. Leonardo Fibonacci var en av de fremste representantene for det fruktbare møtet mellom europeiske og arabiske tradisjoner ved Fredriks hoff.

Fredrik II blendet og forvirret samtiden med sin begavelse og sin maktutfoldelse, men som realpolitiker var han mindre heldig – hans evige strid med paven undergravde økonomien og tærte på landets krefter. I et av sine felttog måtte han til slutt betale soldatene med lærpenger og love å innløse dem i gull når tidene bedret seg. Det var vanskelig å opprettholde et strålende hoff under slike omstendigheter, og rundt 1240 finner vi Leonardo tilbake i Pisa. Byen ga ham en årlig understøttelse slik at han kunne fortsette sine undersøkelser, men Leonardo var nå en gammel mann og døde sannsynligvis kort tid etter.

Leonardo hadde sikkert blitt overrasket hvis han hadde fått vite at han i ettertid hovedsakelig ville bli husket for Fibonacci-tallene. For ham var kaninproblemet bare ett av de mange eksemplene i *Liber abaci*. I ettertid har imidlertid Fibonacci-tallene fått en kolossal oppmerksomhet – det finnes flere bøker om dem, og i USA utgis det et tidsskrift, *The Fibonacci Quarterly*, som bare trykker artikler om Fibonacci-tall. Noe av det som utgis, er med respekt å melde temmelig tøvete, men det finnes også forbausende mange interessante anvendelser av Fibonacci-følgen. Du finner et godt utvalg i Onstads artikkel [10], der du også kan finne referanser til andre kilder.

Formelen

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

for det n -te Fibonacci-tallet kalles av og til *Binets formel* etter den franske matematikeren Jacques Binet (1786–1856) som publiserte den i 1843, men den var kjent langt tidligere, og ble sannsynligvis først oppdaget av vår gamle venn Abraham de Moivre (1667–1754) i 1718.

De Moivre ble født i Vitry i Frankrike. Han var protestant, og da Ludvig XIV i 1685 opphevd det nantiske edikt som sikret protestantenes rettigheter, ble de Moivre arrestert. Han satt i fengsel i to år, men i 1688 tok han seg over til England der han ble boende resten av livet. I begynnelsen livnærte han seg dels som privatlærer og dels gjennom spill og veddemål i kafeer, men etter hvert fant han sikrere inntekter som rådgiver for de store forsikringsselskapene som ble bygd opp på denne tiden. De Moivre regnes som en av forsikringsmatematikkens grunnleggere, men hans aller største inn-

sats var innenfor sannsynlighetsregningen. Hans *The Doctrine of Chances* fra 1718 er en av de tidligste lærebøkene. I 1733 var de Moivre den første som utledet en versjon av den sentrale grensesetningen (denne setningen forklarer hvorfor den klokkeformede Gauss-kurven dukker opp i så mange statistiske sammenhenger). I sin utledning av formelen for Fibonacci-tallene brukte de Moivre det som kalles *genererende funksjoner*. Vi skal se nærmere på denne teknikken i seksjon 12.11.

Det har alltid vært en viss interesse for differensligninger på grunn av de nære forbindelsene til differensialligninger (se seksjon *10.8), men i den senere tid har interessen økt ytterligere av to grunner. Den ene er at det i informatikk har dukket opp et stadig sterkere behov for å løse kombinatoriske problemer ved hjelp av differensligninger og beslektede metoder. (Se boken til Graham, Knuth og Patashnik [6] for en glimrende innføring i disse teknikkene.) Den andre grunnen har å gjøre med det som populært kalles «kaos» – at svært enkle mekanismer kan føre til uhyre komplisert og uforutsigbar oppførsel bare de får virke lenge nok. Det enkleste eksemplet på kaotisk oppførsel er knyttet til differensligninger av typen

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n).$$

Disse differensligningene er ikke-lineære (fordi x_n blir stående i annen potens på høyresiden når du ganger ut), og i motsetning til de lineære ligningene vi har studert i dette kapitlet, kan de ikke løses med en enkel formel. Ved hjelp av andre metoder kan man imidlertid vise at løsningene (for passende valg av konstanten a) har en meget komplisert og «kaotisk» oppførsel (se oppgave 4.3.27). Du kan lese mer om dette i [7], [2] og [3]. Kaos dukker også opp i mange andre sammenhenger, og du kan lese mer om det generelle fenomenet i de glimrende populærvitenskapelige bøkene til Gleick [5], Stewart [13] og Lorenz [9] (ingen av dem krever matematiske forkunnskaper). Det er nære forbindelser til et annet populært fenomen – fraktaler. Disse fascinerende geometriske figurene kan du lese om i [8] og [15] (ta spesielt en titt på figurene i den siste artikkelen). Sammenhengen mellom kaos og fraktaler er godt forklart i [11]. Begge temaene gir slående eksempler på bruken av komplekse tall.

Ønsker du å vite mer om lineære differensligninger, finnes det et instruktivt kapittel (på norsk!) i boken til Sydsæter, Seierstad og Strøm [14]. Er du nysgjerrig på hvordan stoffet i seksjon 4.3 og *4.4 brukes i teoretiske sammenhenger, kan du se etter i mer avanserte bøker om matematisk analyse, for eksempel [12]. Det viser seg også at Cauchy-følger er av fundamental betydning i studiet av fraktaler, og dette kan du lese mer om i [1] (og i [4] som er en bedre, men vanskeligere bok).

Litteratur

- [1] Barnsley, Michael: *Fractals Everywhere*, Academic Press, Orlando, Florida, 1986.
- [2] Devaney, R.L.: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd edition, Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989.
- [3] Devaney, R.L.: *Chaos, Fractals, and Dynamics, Computer Experiments in Mathematics*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1990.
- [4] Edgar, Gerald A.: *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1990.

- [5] Gleick, James: *Chaos: Making a New Science*, Viking, New York, 1987 (boken er forøvrig oversatt til svensk og dansk).
- [6] Graham, R.L., D.E. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.
- [7] Lindstrøm, Tom: *Orden og kaos*, Temahefte 4 i matematikk, Gyldendal, Oslo, 1993.
- [8] Lindstrøm, Tom: «Fraktaler – matematisk tankespinn med praktiske anvendelser?» i Per Hag og Ben Johnsen: *Fra matematikkens spennende verden*, Tapir Forlag, Trondheim, 1993, 77–107.
- [9] Lorenz, Edward N.: *The Essence of Chaos*, UCL Press, London, 1993.
- [10] Onstad, Torgeir: «Fibonacci-tallene», *NORMAT* 39 (1991), 20–40.
- [11] Peitgen, H.J., H. Jürgens og D. Saupe: *Fractals in the Classroom I-II*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [12] Rudin, Walter: *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition, McGraw Hill, New York, 1976.
- [13] Stewart, Ian: *Does God Play Dice?*, Penguin Books, London, 1990.
- [14] Sydsæter, Knut, Atle Seierstad, Arne Strøm: *Matematisk Analyse, Bind 2*, 4. utgave, Gyldendal akademisk, 2002.
- [15] Wallin, H., A. Fällström og M. Wallin: «Matematiska bilder av fraktaler och kaos», *NORMAT* 38 (1990), 18–31.

5 Kontinuerlige funksjoner

Matematikere er som franskmenn; uansett hva man sier til dem, oversetter de det til sitt eget språk, og dermed blir det straks noe ganske annet.

— *Johann Wolfgang von Goethe*
(1749–1832)

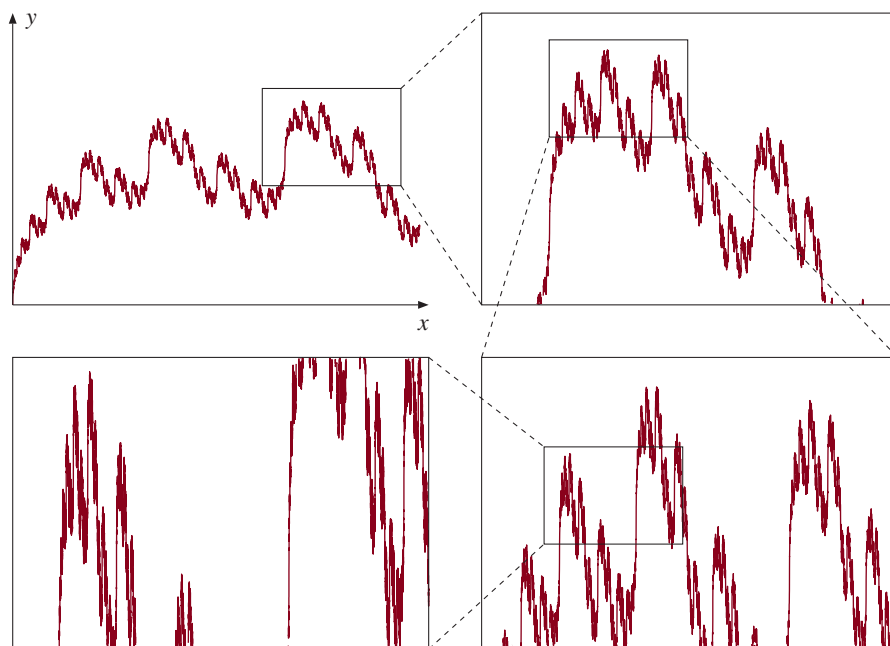
Funksjonene man arbeider med i skolematematikken er bygget opp av potenser, eksponentialfunksjoner, logaritmer og trigonometriske funksjoner samt et endelig antall algebraiske operasjoner pluss, minus, gange og dele. Funksjoner som fremkommer på denne måten, har pene egenskaper – de er som regel kontinuerlige og deriverbare (unntatt muligens i noen få punkter), og de har grafer som enten er monotone, eller som har noen få topp- og bunnpunkter. Ved å studere fortegnen til funksjonene og deres deriverte skaffer vi oss fort oversikt over den geometriske oppførselen, og det er som oftest en smal sak å tegne gode skisser av funksjonsgrafene på grunnlag av denne informasjonen.

Ut i fra egne erfaringer er det lett å tro at disse egenskapene er typiske for kontinuerlige funksjoner. Det er de imidlertid ikke – det skal ikke så store forandringene til før vi får kontinuerlige funksjoner med en helt annen oppførsel. Typografisk skiller funksjonen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2^k x}{2^{k/2}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 8x}{2\sqrt{2}} + \frac{\sin 16x}{4} + \dots$$

seg bare fra de vi er vant til ved at summen inneholder uendelig mange ledd, men geometrisk ser den helt annerledes ut – uansett hvor mye vi forstørrer den, flimrer grafen opp og ned og er full av kroker og kriker av alle størrelser (figur 5.0.1). Funksjoner av denne typen er ofte ikke deriverbare i ett eneste punkt, og lengden til grafen er uendelig over et hvilket som helst intervall (uansett hvor lite).

Disse funksjonene er uvante og fremmedartede, men de er slett ikke verdensfjerne og unyttige – i mange matematiske modeller av virkelige fenomener er det nettopp disse funksjonene som spiller hovedrollen. Det finnes for eksempel en matematisk teori for såkalte Brownske bevegelser som har store anvendelser i fysikk, elektronikk og økonomi, og der alle de naturlig opptredende funksjonene er ingensteds deriverbare og har uendelig lengde.



Figur 5.0.1.

Stilt overfor disse nye eksemplene på kontinuerlige funksjoner er det naturlig å tvile en smule på sin intuisjon. Hvor mye av den erfaring og innsikt som vi har bygget opp gjennom arbeidet med de «pene»funksjonene i skolematematikken, kan vi egentlige overføre til disse nye funksjonene? Vi er vant til at kontinuerlige funksjoner har klart definerte topp- og bunnpunkter, men holder dette også for funksjoner av den typen vi ser på figur 5.0.1, som fortsetter å flimre opp og ned uansett hvor mye vi forstørrer dem? Eller, for å stille et annet spørsmål, er det mulig for en slik flimrende funksjon å passere fra negative til positive verdier uten å ha et nullpunkt innimellom? Det er spørsmål av denne typen vi skal forsøke å besvare i dette kapitlet. Hensikten er å bygge opp et fundament av kunnskap om kontinuerlige funksjoner som vi kan bruke som en støtte for vår intuisjon. Heldigvis ligger det ingen ubehagelige overraskelser og venter på oss – resultatene vi skal vise, er i god overensstemmelse med våre erfaringer.

Det vi skal drive med i dette og neste kapittel, kan kanskje beskrives som «matematisk minimalisme» – vi skal prøve å finne ut så mye som mulig om en funksjon når alt vi i utgangspunktet vet, er at den er kontinuerlig (i dette kapitlet) eller deriverbar (i neste kapittel). Slik matematisk minimalisme kan virke uvant når man bare er vant til å arbeide med funksjoner som er gitt ved en formel, og som man dermed har all verdens informasjon om. Når vi bruker funksjoner i matematikk og andre fag, er det imidlertid sjelden at vi har en formel for dem; ofte vet vi bare at funksjonen vi arbeider med er løsningen til et matematisk problem (f.eks. løsningen til en differensialligning) eller at den beskriver et natur- eller samfunnsfenomen (f.eks. hvordan vann strømmer i et rør, eller hvordan etterspørselen til en vare avhenger av prisen). Når funksjonene er gitt på denne måten, har vi som regel litt grunnleggende informasjon fra den opprinnelige problemstillingen (kanskje vet vi at funksjonen er kontinuerlig eller at den er voksende eller at den må krumme på en spesiell måte) og vår oppgave er å bruke

det lille vi vet, til å finne ut mer. Det er i slike situasjoner «matematisk minimalisme» virkelig kommer til sin rett!

5.1 Kontinuitet

Hittil har ikke funksjoner hatt noen sentral plass i boken, men fra nå av vil de overta hovedrollen. De aller fleste funksjonene f som vi skal arbeide med, vil være definert på en delmengde A av de reelle tallene og ta verdier $f(x)$ som også er reelle tall. Med symboler skriver vi

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}.$$

Mengden A kalles *definisjonsmengden* til f , og vi skal fra tid til annen betegne den med D_f . Som oftest vil D_f enten være hele \mathbb{R} , eller et intervall (for eksempel $D_f = [0, 1]$), eller en union av intervaller (for eksempel $D_f = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$). Med verdimengden V_f til f skal vi mene mengden

$$V_f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$$

av alle verdier som $f(x)$ har.

De fleste tenker nok på en funksjon som en formel av typen

$$f(x) = x^3 \sin x - 5e^2 x,$$

men i denne boken skal vi også møte funksjoner som er definert på andre måter – for eksempel gjennom to formler, slik som

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{når } x < 0 \\ x & \\ e^x & \text{når } x \geq 0 \end{cases}$$

eller gjennom ord, slik som

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{når } x \text{ er irrasjonal.} \end{cases}$$

Vi skal ikke bruke tid og krefter på å filosofere over den beste definisjonen av begrepet funksjon. For våre formål vil det være tilstrekkelig å tenke på en funksjon $f : A \rightarrow B$ som en *regel* eller *tilordning* som til hvert element x i A gir oss ett (og bare ett!) element $f(x)$ i B . (De som allikevel ønsker å filosofere, kan ta en titt på den historiske epistelen til slutt i dette kapitlet.)

Når f er definert ved et formeluttrykk, vil vi ofte la være å spesifisere definisjonsmengden til f , og meningen er da at funksjonen er definert for alle de x -verdiene hvor formelen gir mening. Skriver vi for eksempel opp formelen

$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-3},$$

gir dette uttrykket mening når $x > 1$ (logaritmer er bare definert for positive tall) og forskjellig fra 3 (vi kan ikke dele med null). Altså underforstår vi at definisjonsmengden er

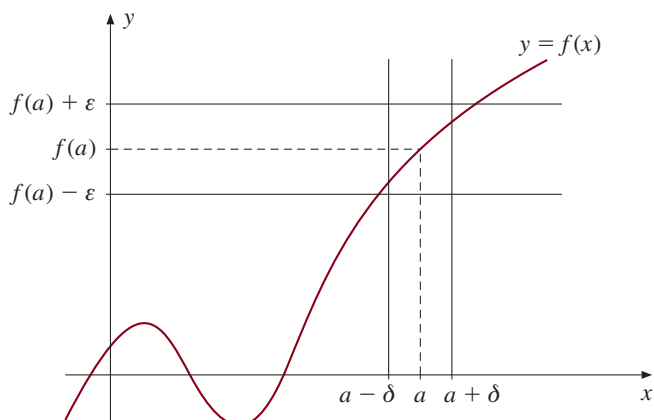
$$D_f = (1, 3) \cup (3, \infty).$$

I denne boken skal vi hovedsakelig arbeide med kontinuerlige funksjoner. At funksjonen f er kontinuerlig i punktet a , betyr intuitivt at funksjonsverdiene $f(x)$ nærmer seg $f(a)$ når x nærmer seg a . Denne uformelle beskrivelsen tillater imidlertid forskjellige tolkninger, og for å unngå misforståelser og unødvendige diskusjoner, er det lurt å presisere den (hvis du ikke forstår definisjonen nedenfor første gang du leser den, kan det være smart å lese kommentarene som følger etter den, før du prøver på nytt). Husk at du alltid bør tenke på uttrykk av typen $|u - v|$ som *avstanden mellom u og v* .

5.1.1 Definisjon

En funksjon f er *kontinuerlig* i et punkt $a \in D_f$ dersom følgende gjelder: For enhver $\epsilon > 0$ (uansett hvor liten), finnes det en $\delta > 0$ slik at når $x \in D_f$ og $|x - a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Vi kan altså få avstanden mellom $f(x)$ og $f(a)$ mindre enn ϵ ved å kreve at avstanden mellom x og a er mindre enn δ .

Dette er en definisjon av samme type som den vi ga for konvergens av følger i definisjon 4.3.1, og mange av de betraktningene vi kom med den gang, gjelder like godt nå. Før vi går løs på dem, kan det imidlertid være lurt å si noen ord om de to symbolene ϵ og δ . Dette er de to greske bokstavene *epsilon* og *delta*, og de er så vanlige å bruke i definisjoner og argumenter som har med grenseverdier og kontinuitet å gjøre, at man ofte snakker om ϵ - δ -definisjoner og ϵ - δ -argumenter. Fordelen ved systematisk å bruke de samme symbolene er at leserne etter hvert vet hva de står for uten å måtte tenke seg om. (Ulempen er at noen studenter utvikler ϵ - δ -allergi og trekker ned den mentale rullgardinen hver gang disse symbolene dukker opp.)



Figur 5.1.1.

Figur 5.1.1 viser samspillet mellom ϵ og δ ; uansett hvor liten ϵ er, skal det være mulig å finne en δ slik at hele funksjonsgrafen over intervallet $(a - \delta, a + \delta)$ ligger klemte mellom de to vannrette linjene med høyde $f(a) - \epsilon$ og $f(a) + \epsilon$. Det er ofte lurt å tenke på ϵ som en feilmargin som anslår hvor liten avstand det er mellom $f(x)$ og den ønskede grenseverdien $f(a)$. Her er en analogi som muligens kan hjelpe noen til å få et klarere bilde av det som foregår.

Du jobber på en fabrikk som produserer funksjonsverdier $f(x)$. Helst burde disse funksjonsverdiene ha vært nøyaktig $f(a)$, men det krever at produksjonsapparatet er innstilt i posisjonen $x = a$, noe som dessverre er umulig å få til i praksis. Alt firmaet garanterer er at uansett hvor liten feilmargin kunden måtte kreve, så er det mulig å oppfylle dette kravet ved å fininnstille apparaturen. En kunde ringer og bestiller et parti funksjonsverdier som ikke må avvike fra $f(a)$ med mer enn en feilmargin ϵ . Uansett hvor liten denne ϵ er, så skal det være mulig for deg (for eksempel ved å slå opp i en tabell) å finne frem til et slingringsmonn δ slik at når du innstiller apparaturen i en posisjon x hvor unøyaktigheten $|x - a|$ er mindre enn δ , så vil differansen mellom produksjonsresultatet $f(x)$ og den ønskede verdien $f(a)$ være mindre enn kundens feilmargin ϵ . (Vi får anta at fininnstillingen krever tid, arbeid og etterkontroll slik at produktet blir dyrere dess større nøyaktighet som kreves.)

La oss nå se litt på hvordan vi i praksis kan bruke definisjon 5.1.1 til å vise at en funksjon f er kontinuerlig i et punkt a . Kikker vi nærmere på definisjonen, ser vi at det er størrelsen $x - a$ vi har kontroll på; vi ønsker jo å vise at vi kan få $|f(x) - f(a)|$ mindre enn en hvilket som helst gitt feilmargin ϵ ved å velge $x - a$ tilstrekkelig liten. Siden det er $x - a$ vi kan kontrollere, lønner det seg ofte å gi denne størrelsen et eget navn. Vi setter derfor $h = x - a$ og observerer at da er $x = a + h$. Vi er nå klare til å se på et par eksempler.

5.1.2 Eksempel

Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen $f(x) = 5x + 2$ er kontinuerlig i punktet $a = 2$.

Som ovenfor innfører vi størrelsen $h = x - 2$ og observerer at $x = 2 + h$. Vi tenker oss nå at vi er gitt en $\epsilon > 0$, og at vi skal finne en $\delta > 0$ slik at når $|h| = |x - 2| < \delta$, så er $|f(x) - f(2)| < \epsilon$. La oss se litt nærmere på uttrykket $|f(x) - f(2)|$. Siden $x = 2 + h$, får vi:

$$|f(x) - f(2)| = |(5x + 2) - (5 \cdot 2 + 2)| = |5x - 10| = |5(2 + h) - 10| = 5|h|$$

Spørsmålet er altså om vi kan få dette uttrykket mindre enn ϵ ved å sørge for at $h = x - a$ er tilstrekkelig liten. Det kan vi! Hvis vi velger $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, ser vi at dersom $|h| = |x - a| < \delta = \frac{\epsilon}{5}$, så er

$$|f(x) - f(2)| = 5|h| < 5 \cdot \frac{\epsilon}{5} = \epsilon$$

Dermed har vi vist at f er kontinuerlig i punktet $a = 2$. ■

Her er et litt mer komplisert eksempel.

5.1.3 Eksempel

Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen $f(x) = 2x^2 + 3$ er kontinuerlig i punktet $a = 3$.

Som ovenfor innfører vi størrelsen $h = x - 3$ og observerer at $x = 3 + h$. Vi tenker oss nå at vi er gitt en $\epsilon > 0$, og at vi skal finne en $\delta > 0$ slik at når $|h| = |x - 3| < \delta$,

så er $|f(x) - f(3)| < \epsilon$. Bruker vi at $x = 3 + h$, ser vi at

$$\begin{aligned} |f(x) - f(3)| &= |(2x^2 + 3) - (2 \cdot 3^2 + 3)| = |2x^2 - 18| = |2(3 + h)^2 - 18| \\ &= |2(3^2 + 2 \cdot 3h + h^2) - 18| = |12h + 2h^2| = |h||12 + 2h| \end{aligned}$$

Vi må vise at vi kan få dette uttrykket mindre enn ϵ ved å velge h tilstrekkelig liten. Intuitivt er dette opplagt siden uttrykket $|h||12 + 2h|$ går mot 0 når h går mot 0. Spørsmålet er hvor liten h må vi velge for at dette uttrykket skal være mindre enn ϵ ? Vi ser at når h er liten, er faktoren $12 + 2h$ omtrent lik 12. Hvis vi tar i litt for å være på den sikre siden, ser vi at $12 + 2h$ er mindre enn 14 når $|h|$ er mindre enn 1. Sørger vi samtidig for at den andre faktoren $|h|$ er mindre enn $\frac{\epsilon}{14}$, vil produktet $|h||12 + 2h|$ være mindre enn ϵ . Utifra disse betraktningene velger vi $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{14}, 1\}$, altså δ lik det minste av de to tallene $\frac{\epsilon}{14}$ og 1 (normalt vil dette selvfølgelig være $\frac{\epsilon}{14}$, men det kunne jo tenkes at noen hadde valgt en stor verdi for ϵ).

La oss sjekke at dersom $h = |x - 3| < \delta$, så er virkelig $|f(x) - f(3)| < \epsilon$. Det er lett. Etter regningene ovenfor har vi nemlig:

$$|f(x) - f(3)| = |h||12 + 2h| < \frac{\epsilon}{14} \cdot (12 + 2 \cdot 1) = \epsilon$$



Eksemplene ovenfor viser hvordan man kan bruke definisjonen til å vise at en funksjon er kontinuerlig. For kompliserte funksjoner er denne metoden tidkrevende og komplisert, og man velger derfor gjerne en annen strategi. Den består i først å vise at de grunnleggende funksjonene vi pleier å arbeide med, er kontinuerlige (her må vi som regel bruke definisjonen som vist ovenfor), og så vise at dersom vi setter sammen disse grunnleggende funksjonene til mer kompliserte funksjoner, vil disse også være kontinuerlige. For oss er de grunnleggende funksjonene x^a , a^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ og $|x|$, og fra skolematematikken vet vi at disse funksjonene er kontinuerlige i alle punkter der de er definert (selv om de fleste sikkert ikke har sett fullgode bevis på at dette er tilfellet!). Det neste resultatet viser at dersom vi bruker de algebraiske operasjonene $+$, $-$, \cdot og $:$ til å skaffe oss nye funksjoner, vil disse også være kontinuerlige:

5.1.4 Setning

Anta at f og g er kontinuerlige i punktet a . Da er funksjonene $f + g$, $f - g$ og $f \cdot g$ kontinuerlige i a . Dersom $g(a) \neq 0$, er også f/g kontinuerlig i a .

Bevis: Siden disse reglene er kjent fra før, skal vi bare vise kontinuiteten av $f + g$ som et eksempel på hvordan definisjon 5.1.1 brukes i praksis.

Vi må vise at for ethvert tall $\epsilon > 0$, finnes det en $\delta > 0$ slik at

$$|(f + g)(x) - (f + g)(a)| < \epsilon \quad \text{når} \quad |x - a| < \delta.$$

Ifølge trekantulikheten 2.1.1 er

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(a)| &= |f(x) - f(a) + g(x) - g(a)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|. \end{aligned}$$

Det er derfor nok å vise at vi kan få hver av størrelsene $|f(x) - f(a)|$ og $|g(x) - g(a)|$ mindre enn $\epsilon/2$. Siden f er kontinuerlig i a , finnes det en δ_1 slik at $|f(x) - f(a)| < \epsilon/2$ når $|x - a| < \delta_1$, og siden g er kontinuerlig i a , finnes det en δ_2 slik at $|g(x) - g(a)| < \epsilon/2$ når $|x - a| < \delta_2$. Velger vi δ lik det minste av de to tallene δ_1 og δ_2 , ser vi at når $|x - a| < \delta$, så er

$$|(f + g)(x) - (f + g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

og beviset er fullført. ■

5.1.5 Eksempel

Vis at funksjonen $f(x) = \frac{3 \sin x + x^2 e^x}{4x^3 + \tan x}$ er kontinuerlig i punktet $\pi/4$.

Funksjonene 3 , $\sin x$, x^2 , e^x , $4x^3$ og $\tan x$ er alle kontinuerlige i $\pi/4$. Ifølge setningen ovenfor er summen og produktet av to kontinuerlige funksjoner selv kontinuerlig, så $3 \sin x + x^2 e^x$ og $4x^3 + \tan x$ er også kontinuerlige i $\pi/4$. Siden en brøk av to kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig, er dermed $f(x)$ kontinuerlig i $\pi/4$ (husk å sjekke at nevneren ikke er null). ■

Det neste resultatet er også kjent fra før. Det sier at sammensetningen av to kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig.

5.1.6 Setning

Anta at g er kontinuerlig i punktet a og f i punktet $g(a)$. Da er den sammensatte funksjonen $h(x) = f[g(x)]$ kontinuerlig i punktet a .

Bevis: Gitt $\epsilon > 0$, så må vi finne en $\delta > 0$ slik at $|f[g(x)] - f[g(a)]| < \epsilon$ når $|x - a| < \delta$ og $x \in D_h$. Siden f er kontinuerlig i $g(a)$, finnes det et tall $\eta > 0$ slik at $|f(u) - f[g(a)]| < \epsilon$ når $|u - g(a)| < \eta$ og $u \in D_f$. Siden g er kontinuerlig i a , finnes det dessuten en $\delta > 0$ slik at $|g(x) - g(a)| < \eta$ når $|x - a| < \delta$ og $x \in D_g$. Men dermed ser vi at hvis $|x - a| < \delta$ og $x \in D_h$, så er $|g(x) - g(a)| < \eta$, som igjen medfører at $|f[g(x)] - f[g(a)]| < \epsilon$, og beviset er ferdig. ■

5.1.7 Eksempel

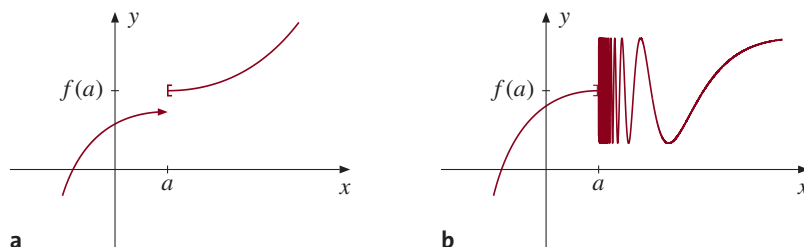
Vis at funksjonen $f(x) = \ln(|\cos x^3|)$ er kontinuerlig i punktet $\pi/3$.

Funksjonene x^3 og cosinus er kontinuerlige overalt, og dermed er den sammensatte funksjonen $\cos x^3$ også kontinuerlig. Tallverdifunksjonen er kontinuerlig, så den sammensatte funksjonen $|\cos x^3|$ må også være det. Siden $|\cos(\pi/3)^3| > 0$, er \ln definert og kontinuerlig i punktet $|\cos(\pi/3)^3|$. Dermed er den sammensatte funksjonen $f(x) = \ln(|\cos x^3|)$ kontinuerlig i punktet $\pi/3$. ■

Hittil har vi konsentrert oss om hva det vil si at en funksjon er kontinuerlig. For riktig å fatte kontinuitetsbegrepet er det viktig også å forstå hvordan en funksjon kan være diskontinuerlig i et punkt. Snur vi på definisjonen av kontinuitet, får vi følgende beskrivelse:

5.1.8 Observasjon

En funksjon f er diskontinuerlig i et punkt a dersom det finnes en $\epsilon > 0$ slik at uansett hvor liten vi velger $\delta > 0$, så kan vi finne en x slik at $|x - a| < \delta$ og $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$.



Figur 5.1.2.

Tallet ϵ er en feilmargen vi ikke kan håndtere; uansett hvor liten vi velger slingeringsmonnet δ , kan vi ikke garantere at funksjonsverdien $f(x)$ ligger innenfor denne feilmarginen. Figur 5.1.2 viser to typer diskontinuitet. I den første har funksjonen et sprang i punktet a , i den andre fluktuierer funksjonen hurtigere og hurtigere dess nærmere x kommer a .

La oss se på et eksempel

5.1.9 Eksempel

Vis at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{hvis } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{hvis } x > 0 \end{cases}$$

ikke er kontinuerlig i punktet $a = 0$.

Hvis du tegner grafen til denne funksjonen, ser du at $f(0) = 0$, men at $f(x)$ ikke går mot null (men mot 1) når x nærmer seg 0 ovenfra. Det betyr at dersom vi velger ϵ mindre enn 1 (f.eks. $\epsilon = \frac{1}{2}$), så vil det uansett hvor liten vi velger $\delta > 0$, finnes noen x slik at $|x - 0| < \delta$ og $|f(x) - f(0)| \geq \epsilon$ (nemlig alle *positive* x mindre enn δ). Siden det finnes ϵ -er som ikke kan pareres av noen δ , er funksjonen diskontinuerlig i $a = 0$ ■

Vi skal nå vise et resultat som binder sammen kontinuitet av funksjoner og konvergens av følger. Som vi snart skal se, er denne forbindelsen et nyttig teoretisk hjelpemiddel i studiet av kontinuitet.

5.1.10 Setning a) Anta at f er kontinuerlig i punktet a , og at $\{x_n\}$ er en følge av punkter fra D_f som konvergerer mot a . Da konvergerer følgen $\{f(x_n)\}$ mot $f(a)$.

b) Anta at f ikke er kontinuerlig i punktet a . Da finnes det en følge $\{x_n\}$ av punkter i D_f slik at $\{x_n\}$ konvergerer mot a , men $\{f(x_n)\}$ ikke konvergerer mot $f(a)$.

Bevis: a) Gitt en $\epsilon > 0$, må vi finne en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. Siden f er kontinuerlig i a , finnes det en $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ for alle $x \in D_f$ med $|x - a| < \delta$. Siden $\{x_n\}$ konvergerer mot a , finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|x_n - a| < \delta$ når $n \geq N$. Men dermed er $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ når $n \geq N$, og beviset er ferdig.

b) Siden f ikke er kontinuerlig i a , finnes det en $\epsilon > 0$ slik at uansett hvor liten vi velger $\delta > 0$, finnes det en $x \in D_f$ slik at $|x - a| < \delta$ og $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$. Setter vi $\delta = 1/n$, får vi på denne måten plukket ut et punkt x_n slik at $|x_n - a| < 1/n$ og $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$. Følgen $\{x_n\}$ konvergerer mot a , men følgen $\{f(x_n)\}$ kan ikke konvergere mot $f(a)$ siden $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$ for alle n . ■

Bemerkning

Uttrykt litt kortere, sier setning 5.1.10 at f er kontinuerlig i a hvis og bare hvis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

for alle følger $\{x_n\}$ fra D_f som konvergerer mot a . Dette er en presisering av vår intuitive forestilling om at f er kontinuerlig i a dersom $f(x)$ nærmer seg $f(a)$ når x går mot a . Vi kan også presisere denne forestillingen ved hjelp av det vanlige grensebegrepet for funksjoner, med det får vente til etter at vi har drøftet slike grenser i seksjon 5.4 (se observasjon 5.4.7).

Så langt har vi bare definert hva det vil si at en funksjon f er kontinuerlig i et punkt a , men som oftest er vi interessert i funksjoner som er kontinuerlige i alle (eller nesten alle) punkter. Da er det greit å bruke følgende terminologi.

5.1.11 Definisjon

En funksjon $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ kalles *kontinuerlig* dersom f er kontinuerlig i alle punkter $a \in D_f$.

Bemerkning

Mange synes at denne definisjonen av kontinuerlige funksjoner er tungvinn, og vil isteden si at en funksjon er kontinuerlig dersom den har en sammenhengende graf. Det viser seg imidlertid at det er mye vanskeligere å gi en klar og presis definisjon

av hva det vil si at en graf er sammenhengende, enn å definere kontinuitet. (Dessuten finnes det faktisk diskontinuerlige funksjoner som har sammenhengende grafer!) En annen ulempe ved å basere kontinuitet på sammenhengsbegrepet er at det blir vanskelig å definere kontinuitet i et punkt. I den neste seksjonen skal vi allikevel se på et resultat som viser at grafen til en kontinuerlig funksjon er sammenhengende i én mulig betydning av ordet.

Vi skal avslutte denne seksjonen med et par eksempler som viser to litt uvante sider ved kontinuitetsbegrepet.

5.1.12 Eksempel

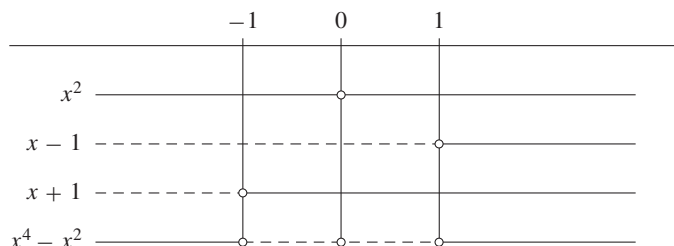
Hvor er funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$$

kontinuerlig?

Polynomet $x^4 - x^2$ er opplagt kontinuerlig for alle x . Siden funksjonen $k(x) = \sqrt{x}$ er kontinuerlig overalt hvor den er definert, forteller setning 5.1.6 oss at den sammensatte funksjonen $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$ også er kontinuerlig overalt hvor den er definert (i henhold til definisjon 5.1.11 er den altså en kontinuerlig funksjon).

Det gjenstår å finne definisjonsområdet til f . Siden $(x^4 - x^2) = x^2(x-1)(x+1)$, ser vi fra skjemaet nedenfor at uttrykket innenfor rottegnet er negativt for $-1 < x < 0$ og $0 < x < 1$. Altså er f definert for alle andre x -verdier; det vil si at $D_f = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$.



Figur 5.1.3.

Legg merke til at punktet 0 er et isolert punkt i D_f , men at funksjonen allikevel er kontinuerlig der. Det bryter nok med manges oppfatning av kontinuitet at en funksjon er kontinuerlig i et isolert punkt, og det kan derfor være nyttig å sjekke direkte fra definisjonen at dette virkelig er sant:

Alt vi behøver å vise, er at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ for alle $x \in D_f$ med $|x - 0| < \delta$. Det er såre enkelt: Uansett hvilken ϵ vi blir gitt, velger vi $\delta = 1$. Den eneste x i D_f som tilfredsstiller $|x - 0| < \delta$ er $x = 0$, og vi får dermed $|f(x) - f(0)| = 0 < \epsilon$. Ifølge vår definisjon er altså f kontinuerlig i 0. (Vi bør imidlertid legge til at det finnes litt forskjellige definisjoner av kontinuitet. Enkelte lærebøker forutsetter at f skal være definert i alle punkter i nærheten av a for at vi skal kunne snakke om kontinuitet. Med et slikt kontinuitetsbegrep er selvfølgelig ikke funksjonen ovenfor kontinuerlig i 0.) ■

Det siste eksemplet i denne seksjonen er mer finurlig. Det viser at en funksjon godt kan være kontinuerlig i en tett mengde uten at grafen er det minste sammenhengende, og det illustrerer også behovet for å ha en presis og kontrollerbar definisjon av kontinuitetsbegrepet – ut fra en intuitiv oppfatning av hva kontinuitet er, kan man diskutere kontinuiteten til denne funksjonen i månedsvis uten å komme nærmere noen konklusjon. Eksemplet er vanskelig, og det kan være lurt å hoppe over det i første omgang og heller komme tilbake til det senere.

5.1.13 Eksempel

Vi definerer en funksjon $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ på følgende måte. Dersom x er irrasjonal, er $f(x) = 0$. Dersom x er rasjonal, kan vi skrive $x = p/q$ der p og q er naturlige tall uten felles faktorer (brøken er altså forkortet så mye som mulig). Vi definerer da $f(x) = 1/q$. Vis at f er kontinuerlig i alle irrasjonale punkter og diskontinuerlig i alle rasjonale.

Anta først at $a = p/q$ er rasjonal. Siden de irrasjonale tallene ligger tett (husk setning 2.2.7), kan vi for enhver n finne et irrasjonalt tall x_n slik at $|a - x_n| < 1/n$. Følgen $\{x_n\}$ konvergerer mot a , og hvis f var kontinuerlig i a , ville også $\{f(x_n)\}$ konvergere mot $f(a)$ ifølge setning 5.1.10. Men det er umulig siden $f(x_n) = 0$ og $f(a) = 1/q \neq 0$. Altså er f diskontinuerlig i a .

Anta så at a er irrasjonal. Gitt en $\epsilon > 0$, må vi finne en $\delta > 0$, slik at $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ når $|x - a| < \delta$. La N være det minste naturlige tallet slik at $1/N < \epsilon$ (en slik N finnes ifølge Arkimedes' prinsipp 2.2.6). I intervallet $(0, 1)$ finnes det bare endelig mange rasjonale tall p/q som har nevner q mindre enn N . La z være det av disse tallene som ligger nærmest a , og velg $\delta = |z - a|$. Anta nå at $|x - a| < \delta$. Da er enten x irrasjonal og $f(x) = 0$, eller $x = p/q$ er rasjonal med $q \geq N$. I det siste tilfellet er $f(x) = 1/q \leq 1/N < \epsilon$. I begge tilfeller er $|f(x) - f(a)| = |f(x) - 0| < \epsilon$, og vi har vist at f er kontinuerlig i a . ■

Oppgaver i seksjon 5.1

1. Finn definisjonsmengden til funksjonen:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

c) $f(x) = \ln(\sin x)$

d) $f(x) = \tan x^2$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\ln|x|}$

2. Finn definisjonsmengden til funksjonen:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \frac{\ln(x-4)}{x-7}$

c) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

3. Finn verdimengden til funksjonen:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \sin(x^2)$

c) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$

4. Finn verdimengden til funksjonen:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

5. Vis at funksjonen er kontinuerlig i det angitte punktet ved å bruke definisjon 5.1.1.

a) $f(x) = 2x + 1$ i punktet 2

b) $f(x) = x^2$ i punktet 3

c) $f(x) = 2x^2 + 3$ i punktet 1

d) $f(x) = x^3$ i punktet 2

e) $f(x) = \frac{1}{x}$ i punktet 1

f) $f(x) = \frac{x + 1}{x + 3}$ i punktet 0

g) $f(x) = \sqrt{x}$ i punktet 4

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ i punktet 9

6. Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen *ikke* er kontinuerlig i det angitte punktet.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$ i punktet 0

b) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$ i punktet 0

c) $f(x) = \frac{x - 1}{|x - 1|}$ i punktet 1

7. Bruk setningene 5.1.4 og 5.1.6 til å vise at funksjonene er kontinuerlige i det angitte punktet. Du har lov til å bruke at funksjonene x^a , a^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ og $|x|$ er kontinuerlige der de er definert.

- a) $f(x) = x^2 \sin x$ i punktet π
 b) $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln x$ i punktet 2
 c) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{\cos x}$ i punktet 0
 d) $f(x) = \cos[\ln |\sin(e^{x^2})|]$ i punktet 0.

8. Finn funksjonenes definisjonsområde og avgjør om de er kontinuerlige eller ikke.

- a) $f(x) = \ln(x^4 - x^2)$
 b) $f(x) = \frac{x - 1}{|x - 1|}$
 c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{hvis } x < 1 \\ 1 & \text{hvis } x \geq 1 \end{cases}$

9. I hvilke punkter er funksjonen diskontinuerlig?

- a) $f(x) = x^3$
 b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{for } x > 0 \\ x + 1 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$
 c) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$
 d) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$
 e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{når } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$

10. I denne oppgaven skal vi fullføre beviset for setning 5.1.4.

- a) Vis at dersom f og g er kontinuerlige i a , så er $f - g$ det også.
 b) Vis at dersom f og g er kontinuerlige i a , så er $f \cdot g$ det også.
 c) Vis at dersom g er kontinuerlig i a og $g(a) \neq 0$, så er $1/g(x)$ kontinuerlig i a . (Dette er plundrete.)
 d) Bruk b) og c) til å vise at dersom f og g er kontinuerlige i a og $g(a) \neq 0$, så er f/g kontinuerlig i a .

11. Vi sier at f er høyrekontinuerlig i a dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at hvis $x \in D_f$ og $a \leq x < a + \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

- a) Finn en funksjon som er høyrekontinuerlig, men ikke kontinuerlig i et punkt a .
 b) Vis at f er høyrekontinuerlig i a hvis og bare hvis

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

for enhver avtagende følge $\{x_n\}$ av tall fra D_f slik at $x_n \rightarrow a$.

- c) Definer hva det vil si at f venstrekontinuerlig i a . Vis at f er kontinuerlig i a hvis og bare hvis den er både høyre- og venstrekontinuerlig i a .

12. Et *dyadisk tall* er et tall på formen $m/2^n$ der $m, n \in \mathbb{Z}$. Definer en funksjon f ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \text{ ikke er dyadisk} \\ \frac{1}{2^n} & \text{hvis } x = \frac{m}{2^n} \text{ er et dyadisk tall der } m \text{ ikke er delelig på } 2. \end{cases}$$

I hvilke punkter er f kontinuerlig?

13. Bruk setning 5.1.10 og setning 4.3.3 til å bevise setning 5.1.4.

14. Til denne oppgaven trenger du en datamaskin eller en lommeregner med grafisk vindu. Vi skal bruke den til å studere den ingensteds deriverbare funksjonen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2^k x)}{2^{k/2}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 8x}{2\sqrt{2}} + \frac{\sin 16x}{4} + \dots$$

Vi kan selvfølgelig ikke taste inn uendelig mange ledd, men ved å begynne med noen få og så legge til flere etter hvert, kan vi få et godt inntrykk av hvordan funksjonen ser ut.

- Tast inn de fire første leddene og la lommeregneren tegne grafen over intervallet $[0, 3]$.
- Tast inn fire ledd til og tegn grafen på lommeregneren. Bruk zoom'en til å forstørre grafen til den ser glatt ut.
- Behold vinduet fra punkt b), men tast inn fire nye ledd. Zoom inn til den nye grafen er glatt. Gjenta prosedyren med å taste inn fire nye ledd og zoome så lenge du gidder.
- Behold det uttrykket du sluttet med i c), men gå tilbake til det opprinnelige definisjonsområdet $[0, 3]$. Bruk zoom'en til å finne maksimumverdien til funksjonen. Hvordan tror du denne prosedyren hadde fungert om du hadde brukt den på funksjonen $f(x)$ istedenfor på en tilnærmede med endelig mange ledd? Når du kommer til seksjon 5.3 kan du sammenligne denne prosedyren med beviset for ekstremalverdisetningen 5.3.5.
- Behold funksjonen og vinduet fra punkt d), og tast i tillegg inn summen av de fire første leddene som en egen funksjon. Sammenlign de to grafene.

15. I denne og den neste oppgaven skal vi undersøke en spesiell form for kontinuitet som kalles uniform kontinuitet. Vi begynner med definisjonen: En funksjon f kalles *uniformt kontinuerlig* på en mengde A dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ for alle $x, y \in A$ slik at $|x - y| < \delta$.

- Vis at f ikke er uniformt kontinuerlig på A hvis og bare hvis følgende betingelse er oppfylt: Det finnes en $\epsilon > 0$ slik at for alle $\delta > 0$ kan vi finne $x, y \in A$ slik at $|x - y| < \delta$ og $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$.
- Vis at funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ ikke er uniformt kontinuerlig på $A = (0, 1]$.

- c) Vis at funksjonen $f(x) = x^2$ ikke er uniformt kontinuerlig på \mathbb{R} .
- d) Vis at dersom det finnes en konstant K slik at $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ for alle $x, y \in A$, så er f uniformt kontinuerlig på A .
- e) Vis at $f(x) = x^2$ er uniformt kontinuerlig på ethvert begrenset intervall $[a, b]$.
- f) Kan du finne en betingelse på mengden A som sikrer at $f(x) = \frac{1}{x}$ er uniformt kontinuerlig på A ?

16. Denne oppgaven er en fortsettelse av 15. Den forutsetter at du kjenner teorem 4.4.4. Målet er å vise:

Teorem: Enhver kontinuerlig funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definert på et lukket, begrenset intervall er uniformt kontinuerlig.

Vi skal bevise teoremet ved motsigelse, og antar at f er en kontinuerlig funksjon på intervallet $[a, b]$ som ikke er uniformt kontinuerlig.

- a) Vis at det finnes en $\epsilon > 0$ slik at for alle $n \in \mathbb{N}$ kan vi finne punkter $x_n, y_n \in [a, b]$ slik at

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{og} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

- b) Vis at $\{x_n\}$ har en delfølge $\{x_{n_k}\}$ som konvergerer mot et punkt $c \in [a, b]$. Forklar hvorfor delfølgen $\{y_{n_k}\}$ av $\{y_n\}$ også konvergerer mot c .
- c) Forklar hvorfor $f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k})$ og $f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k})$.
- d) Forklar hvorfor resultatene i a) og c) strider mot hverandre, og avslutt beviset for teoremet.

17. (UiO) En mengde $A \subset \mathbb{R}$ kalles *åpen* dersom det for hver $a \in A$ finnes en $\delta > 0$ slik at $(a - \delta, a + \delta) \subset A$. Vis at intervallet $(0, 1]$ ikke er en åpen mengde. Vis også at dersom $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon, så er mengden

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$$

åpen.

5.2 Skjæringssetningen

I denne seksjonen skal vi bevise et av de grunnleggende resultatene om kontinuitet. Det sier at en kontinuerlig funksjon ikke kan gå fra positive til negative verdier uten å passere et nullpunkt, og det underbygger dermed vår intuitive følelse av at kontinuerlige funksjoner har «sammenhengende» grafer.

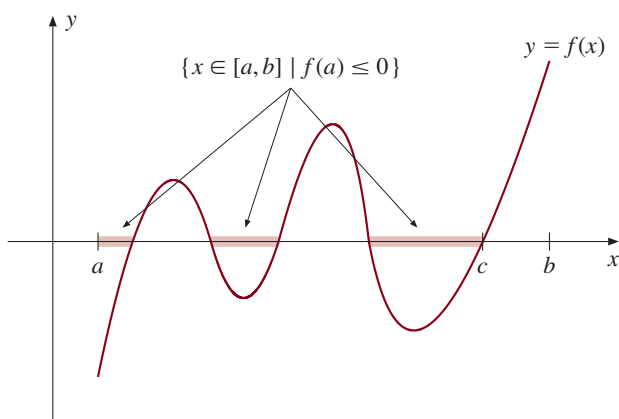
5.2.1 Skjæringssetningen Anta at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon hvor $f(a)$ og $f(b)$ har motsatte fortegn. Da finnes det et tall $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = 0$.

Bevis: La oss anta at $f(a) < 0$ og $f(b) > 0$; det motsatte tilfellet kan bevises på akkurat samme måte.

Det kan godt tenkes at funksjonen har flere nullpunkter, og vi skal forsøke å lokalisere det siste – det som er markert med c på figuren. En naturlig måte å beskrive c på, er å si at c er den minste øvre skranke for de x -verdier hvor f er negativ eller null; altså $c = \sup A$ der

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}.$$

Ifølge kompletthetsprinsippet 2.3.2 finnes det en slik minste øvre skranke siden A er ikke-tom (siden $a \in A$) og oppad begrenset (siden b er en øvre skranke).



Figur 5.2.1.

Vi har nå funnet et mulig nullpunkt c , og det gjenstår å vise at $f(c)$ virkelig er 0. Dette skal vi gjøre med en litt merkverdig, men svært nyttig metode. Først skal vi vise at $f(c) \geq 0$, og deretter at $f(c) \leq 0$. Den eneste måten begge disse ulikhetene kan være oppfylt på, er ved at $f(c) = 0$, og dermed er påstanden vist.

La oss først se på hva som skjer hvis vi nærmer oss c ovenfra. Betrakt følgen $\{x_n\}$ hvor $x_n = c + 1/n$ (vi nøyer oss med å se på de n der $c + 1/n < b$, og du bør overbevise deg om c ikke kan være lik b). Siden $\{x_n\}$ konvergerer mot c , må $\{f(x_n)\}$ konvergere mot $f(c)$ ifølge setning 5.1.10. Per definisjon av c er $f(x_n) > 0$ for alle n , og derfor må $f(c) \geq 0$ (grensen til en følge av positive ledd kan ikke være negativ).

Vi ser så på hva som skjer når vi nærmer oss c nedenfra. Uansett hvor stor vi velger $n \in \mathbb{N}$, kan vi finne et punkt $z_n \in A$ slik at $c - 1/n \leq z_n \leq c$ (hvis ikke ville $c - 1/n$ være en øvre skranke for A , og det er umulig siden c er den minste øvre skranken). Følgen $\{z_n\}$ konvergerer mot c , og ifølge setning 5.1.10 konvergerer $\{f(z_n)\}$ mot $f(c)$. Siden $f(z_n) \leq 0$, betyr dette at $f(c) \leq 0$.

Vi har nå vist at $f(c) \geq 0$ og at $f(c) \leq 0$. Følgelig må $f(c) = 0$, og beviset er ferdig. ■

Når vi først har skjæringssetningen, er det en enkel sak å vise at to kontinuerlige funksjoner som krysser hverandre, må ha et skjæringspunkt.

5.2.2 Korollar

Anta at $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ og $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner slik at $g(a) < h(a)$ og $g(b) > h(b)$. Da finnes det en $c \in (a, b)$ slik at $g(c) = h(c)$.

Bevis: Siden g og h er kontinuerlige, er $f = g - h$ det også. Vi ser at $f(a) = g(a) - h(a) < 0$ og $f(b) = g(b) - h(b) > 0$, så ifølge skjæringssetningen finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = 0$. Men da er $g(c) = h(c)$, og beviset er ferdig. ■

Skjæringssetningen og dens korollar er først og fremst viktige teoretiske hjelpemidler, men de har også praktiske anvendelser. For eksempel kan de brukes til å lokalisere løsninger til ligninger som vi ikke har noen muligheter til å finne på vanlig måte.

5.2.3 Eksempel

Vis at ligningen $\sin x = 2x - 1$ har en løsning i intervallet $(0, \pi/2)$.

Vi bruker korollaret med $h(x) = \sin x$ og $g(x) = 2x - 1$. Siden $g(0) = -1$, $h(0) = 0$, $g(\pi/2) = \pi - 1$ og $h(\pi/2) = 1$, ser vi at $g(0) < h(0)$ og $g(\pi/2) > h(\pi/2)$. Ifølge korollaret finnes det dermed en $c \in (0, \pi/2)$ slik at $\sin c = 2c - 1$. ■

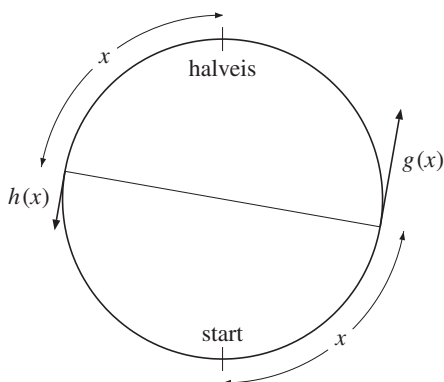
Bemerkning

Vi har ingen generelle metoder til å løse ligninger av typen $\sin x = 2x - 1$ som inneholder både variabelen x og trigonometriske funksjoner av den. Som eksemplet forteller, er det allikevel mulig å vise at det finnes løsninger og å angi omtrent hvor de ligger. Dette er et nyttig hint å ta med seg til oppgaveregning – dersom en oppgave ber deg om vise at en ligning har en løsning, men *ikke* ber deg om å finne den, så er det sannsynligvis meningen at du skal bruke skjæringssetningen (eller et annet generelt resultat) til å argumentere for at en løsning må finnes. Det er *ikke* meningen at du skal komme frem til et formeluttrykk for løsningen – trolig finnes det ikke noe slikt! I seksjon 7.3 skal vi studere en metode som gjør at vi kan finne *tilnærmede* løsninger raskt og effektivt.

Vårt neste eksempel er mer overraskende. Det viser hvordan vi kan bruke skjæringssetningen til å trekke uventede konklusjoner fra svært lite informasjon. Det er denne egenskapen som gjør setningen til et kraftig og fleksibelt verktøy.

5.2.4 Eksempel

Du skal løpe én gang rundt en sirkulær bane. Vi forutsetter at farten er null idet du starter og idet du går i mål, ellers kan du løpe som du vil. Vis at det alltid vil finnes to diametralt motsatte punkter i banen hvor farten er like stor.



Figur 5.2.2.

Vi definerer to funksjoner $g(x)$ og $h(x)$ ved å si at $g(x)$ er farten du har x meter etter at du startet, mens $h(x)$ er farten x meter etter at du passerte halveis (se figur 5.2.2). Dersom a er halve banens lengde, vil g og h være kontinuerlige funksjoner på intervallet $[0, a]$. Videre er $g(0) = 0$ og $h(a) = 0$, mens $g(a) = h(0) \geq 0$. Dermed er $g(0) \leq h(0)$ mens $g(a) \geq h(a)$, og ifølge korollar 5.2.2 finnes det en c slik at $g(c) = h(c)$. Men dermed er farten like stor i de diametralt motsatte punktene du er i, etter å ha løpt henholdsvis c og $c + a$ meter. ■

Ofte hører man noen si at skjæringssetningen er en ren trivialitet – en opplagt geometrisk observasjon som man kan overbevise seg om ved å lage en enkel skisse av en kontinuerlig funksjon som starter på den ene siden av x -aksen og ender på den andre. Det er to innvendinger mot et slikt syn. Den ene er at en kontinuerlig funksjon kan være atskillig mer komplisert enn det vi kan tegne med en blyant – den ingensteds deriverbare funksjonen på figur 5.0.1 kan for eksempel ikke tegnes med en sammenhengende blyantbevegelse i noen rimelig forstand. Den andre innvendingen er mer subtil og har med selve tallsystemet å gjøre. Den er lettest å forstå hvis vi begynner med et eksempel.

5.2.5 Eksempel

La oss late som om de reelle tallene aldri var oppfunnet og at vi bare hadde de rasjonale å arbeide med. Funksjonen

$$f(x) = x^2 - 2$$

ville likevel være veldefinert, og siden $f(0) = -2$ og $f(2) = 2$, vil den krysse x -aksen mellom 0 og 2. Siden vi bare arbeider med de rasjonale tallene, har den allikevel ikke noe nullpunkt i dette intervallet: Den eneste måten å få funksjonen til å være null på, er jo ved å velge $x = \sqrt{2}$, og $\sqrt{2}$ er irrasjonal. Dette eksemplet viser at skjæringssetningen ikke gjelder når vi bare arbeider med rasjonale tall. ■

Hva betyr egentlig dette? Hvordan kan det ha seg at vår geometriske intuisjon er riktig når vi arbeider med reelle tall, men svikter fullstendig når vi innskrenker oss til de rasjonale? Årsaken ligger i selve begrepet «tallinje». Vi er så vant til å tenke på de

reelle tallene som alle punktene langs en linje, at de fleste av oss ikke stusser over det lenger. Men denne identifikasjonen av tall og punkter er hverken en selvfølgelighet eller en tom talemåte – den rommer en dyp innsikt. Skal en slik identifikasjonen fungere, må det være samsvar mellom de geometriske egenskapene til linjen og de algebraiske egenskapene til tallsystemet. Eksemplet ovenfor viser hvordan det kan gå galt; dersom vi hadde prøvd å identifisere punktene på tallinjene med de *rasjonale* tallene, ville det ikke lenger ha vært samsvar mellom den geometriske observasjonen at parablen $y = x^2 - 2$ skjærer x -aksen et sted mellom 0 og 2, og det algebraiske spørsmålet om ligningen $x^2 - 2 = 0$ har en løsning i dette området. Sett fra denne synsvinkelen er skjæringssetningen en teoretisk bekreftelse på det fornuftige i å identifisere punktene langs en linje med reelle tall. Bak denne bekreftelsen står nok en gang kompletthetsprinsippet – det er dette prinsippet som får beviset for skjæringssetningen til å fungere, og det er dét som ikke kan overføres til å gi et tilsvarende bevis for rasjonale tall.

Oppgaver i seksjon 5.2

1. Vis at funksjonene har nullpunkter i de angitte intervallene.
 - a) $f(x) = \cos x$ i intervallet $[0, \pi]$
 - b) $f(x) = e^x - x - 2$ i intervallet $[0, 2]$
 - c) $f(x) = 2x - 3 - \ln x$ i intervallet $[1, e]$
2. Vis at funksjonene har nullpunkter i de angitte intervallene.
 - a) $f(x) = \ln x + x$ i intervallet $(0, 1)$
 - b) $f(x) = 2x - \tan x$ i intervallet $[\pi/4, \pi/2]$
 - c) $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ i intervallet $(0, \infty)$
3. Vis at funksjonsgrafene skjærer hverandre i det angitte intervallet.
 - a) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 - 2$ i intervallet $[1, 2]$
 - b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^3$ i intervallet $[\pi/6, \pi/3]$
 - c) $f(x) = \frac{1}{\tan x}$, $g(x) = 2x$ i intervallet $(0, \pi/4]$
4. La $f(x) = \tan x$ og $g(x) = x$. Vis at $f(\pi/4) > g(\pi/4)$ og at $f(3\pi/4) < g(3\pi/4)$. Finnes det et punkt c i intervallet $(\pi/4, 3\pi/4)$ slik at $f(c) = g(c)$?
5. Vis at ligningen $\tan x = x$ har minst en løsning i hvert av intervallene $((n - 1/2)\pi, (n + 1/2)\pi)$.
6. Vis at ethvert polynom av odde grad har minst en reell rot.
7. a) En fjellklatrer starter fra bakken kl. 7 og når toppen kl. 15. Neste dag starter hun nedklatringen kl. 7 og er nede kl. 15. Vis at det finnes et klokkeslett der hun er like høyt oppe begge dager.

b) Gjelder konklusjonen også dersom nedstigningen starter kl. 10 og er ferdig kl. 16?

8. La $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ være en kontinuerlig funksjon. Vis at f har et *fikspunkt*, dvs. at det finnes en $x \in [0, 1]$ slik at $f(x) = x$.

9. (UiO) Funksjonen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og $a, b \in \mathbb{R}$ er tall slik at $a < b$ og $f(a) < f(b)$. Vis at da finnes det en $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = f(a)$, men $f(x) > f(a)$ for alle $x \in (c, b)$.

10. (UiO) Ole påstår at dersom du slår en sirkel på et kart, vil det på denne sirkelen alltid være to diametralt motsatte punkter som har samme høyde over havet. Berit mener at dette umulig kan være riktig, og at hun har et moteksempel. Lag en liten historie der Ole og Berit begrunner sine synspunkter. Historien skal ende med at begge to innses at den andres argumenter har gitt dem en bedre forståelse av problemet.

11. I denne oppgaven skal vi gi et annet bevis for skjæringssetningen. Vi starter altså med en kontinuerlig funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ der $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn, og vi skal vise at $f(c) = 0$ for en $c \in (a, b)$.

a) La $d = (a + b)/2$ være midtpunktet til $[a, b]$. Hvis $f(d) = 0$, har vi funnet et nullpunkt og er ferdige. Vis at dersom $f(d) \neq 0$, så vil f ha motsatt fortegn i endepunktene til ett av intervallene $[a, d]$ og $[d, b]$. La $[a_1, b_1]$ være det av intervallene der fortegnene er motsatte.

b) Bruk argumentet i a) til å lage en sekvens av intervaller

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

der hvert intervall er halvparten av det foregående, og f alltid har motsatt fortegn i endepunktene.

c) Vis at følgen $\{a_n\}$ konvergerer mot et punkt c . Forklar hvorfor følgen $\{b_n\}$ også konvergerer mot c .

d) Vis at $f(c) = 0$.

12. (UiO) I denne oppgaven er $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en funksjon. Alt vi vet om f er at den er kontinuerlig og at $f(0) = f(1)$.

a) Anta at N er et naturlig tall. Vis at

$$\left(f(0) - f\left(\frac{1}{N}\right)\right) + \left(f\left(\frac{1}{N}\right) - f\left(\frac{2}{N}\right)\right) + \dots + \left(f\left(\frac{N-1}{N}\right) - f(1)\right) = 0$$

Bruk dette til å vise at dersom ikke alle leddene i summen er null, må det finnes to ledd med motsatt fortegn (med *leddene i summen* mener vi $f(0) - f\left(\frac{1}{N}\right), f\left(\frac{1}{N}\right) - f\left(\frac{2}{N}\right), \dots, f\left(\frac{N-1}{N}\right) - f(1)$).

b) Vi lar nå $g : [0, 1 - \frac{1}{N}] \rightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen definert ved $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{N}\right)$. Forklar hvorfor det må finnes et punkt c slik at $g(c) = 0$.

c) Bevis *Ampères teorem*: Anta at $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon og at $f(0) = f(1)$. For hvert naturlig tall N finnes det punkter c, d slik at $d - c = \frac{1}{N}$ og $f(c) = f(d)$.

- d) Anta at a er et tall i intervallet $(0, 1)$ som *ikke* er av formen $\frac{1}{N}$ der $N \in \mathbb{N}$. La $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen definert ved

$$h(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - x \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right)$$

Vis at $h(0) = h(1)$, men at det *ikke* finnes noen punkter $c, d \in [0, 1]$ slik at $d - c = a$ og $h(c) = h(d)$.

- 13.** (UiO) Funksjonen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og $a, b \in \mathbb{R}$ er tall slik at $a < b$ og $f(a) < f(b)$. Vis at da finnes det en $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = f(a)$, men $f(x) > f(a)$ for alle $x \in (c, b)$.

5.3 Ekstremalverdisetningen

Dersom en funksjon f er deriverbar, vet vi hvordan vi kan finne dens maksimums- og minimumsverdier ved å se på punkter der den deriverte er null. Denne fremgangsmåten fungerer ikke når f ikke er deriverbar, og etter å ha sett funksjonen på figur 5.0.1, kan man begynne å lure på om kontinuerlige funksjoner bestandig har maksimums- og minimumspunkter. Det er dette spørsmålet vi skal studere i denne seksjonen, og svaret viser seg å være beroligende – alle kontinuerlige funksjoner definert på et lukket, begrenset intervall har både maksimums- og minimumspunkter.

Vi skal først vise at slike funksjoner alltid er begrensede i følgende forstand.

5.3.1 Definisjon

En funksjon $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ er *begrenset* dersom det finnes et reelt tall M slik at $|f(x)| \leq M$ for alle $x \in A$.

Det er lett å finne eksempler på kontinuerlige funksjoner som ikke er begrensede, for eksempel

$$f(x) = e^x$$

og

$$g(x) = \frac{1}{x}.$$

Legg merke til at den første av disse funksjonene går mot uendelig når x går mot uendelig, mens den andre går mot uendelig når x nærmer seg en verdi som ikke er med i definisjonsområdet. Dersom vi krever at funksjonen vår skal være definert på et lukket, begrenset intervall $[a, b]$, er ingen av disse mulighetene til stede, og det viser seg at funksjonen må være begrenset.

5.3.2 Setning

En kontinuerlig funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ som er definert på et lukket, begrenset intervall, er alltid begrenset.

Bevis: Vi skal anta at f ikke er begrenset og vise at dette leder til en selvmotsigelse. La oss starte med å dele intervallet $[a, b]$ i to like store deler: $[a, (a + b)/2]$ og

$[(a+b)/2, b]$. Siden f er ubegrenset på $[a, b]$, må den også være ubegrenset på minst ett av de mindre intervallene. Kall dette intervallet $[a_1, b_1]$ (dersom f er ubegrenset på begge to, velger vi ett av dem). Vi gjentar nå prosedyren med $[a_1, b_1]$; deler det i to deler $[a_1, (a_1 + b_1)/2]$ og $[(a_1 + b_1)/2, b_1]$, og observerer at f må være ubegrenset på minst ett av disse intervallene. Det nye intervallet hvor f er ubegrenset, kaller vi $[a_2, b_2]$. Fortsetter vi på denne måten, får vi en uendelig kjede av intervaller

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$$

der f er ubegrenset. Legg merke til at følgen $\{a_n\}$ er voksende, og ifølge teorem 4.3.9 må den konvergere mot et punkt c i $[a, b]$. Siden lengden til intervallene halveres hele tiden, må følgen $\{b_n\}$ også konvergere mot c .

Vi er nå klare til å fremtvinge en motsigelse. Siden f er ubegrenset på alle intervallene våre, kan vi for hver n velge et punkt $c_n \in [a_n, b_n]$ slik at $|f(c_n)| \geq n$. Dette betyr at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(c_n)| = \infty.$$

På den annen side er følgen $\{c_n\}$ klemt mellom de to følgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ som begge konvergerer mot c , og følgelig må også $\{c_n\}$ konvergere mot c . Siden f er kontinuert, betyr dette ifølge setning 5.1.10 at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = f(c).$$

Dermed har vi fått selvmotsigelsen vi er på jakt etter ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n)$ kan ikke være lik $f(c)$ når $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(c_n)| = \infty$), og setningen er bevist. ■

Med setningen ovenfor vet vi at kontinuertlige funksjoner definert på lukkede, begrensede intervaller er begrensede. Men har de maksimums- og minimumspunkter? La oss først definere nøyaktig hva vi mener med disse ordene.

5.3.3 Definisjon

Et punkt a er et *maksimumspunkt* for funksjonen $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ dersom $f(a) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$. Vi kaller a et *minimumspunkt* dersom $f(a) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$. Med et fellesnavn kaller vi slike punkter for *ekstremalpunkter*.

Funksjoner kan godt være begrensede uten å ha ekstremalpunkter:

5.3.4 Eksempel

Funksjonen $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definert ved

$$f(x) = 2x$$

er begrenset, men har hverken maksimums- eller minimumspunkter. Ved å velge x tilstrekkelig nær 1, kan vi få verdier så nær 2 som vi måtte ønske, men det finnes ikke noe punkt hvor verdien faktisk er 2. Tilsvarende kan vi få verdiene så langt ned mot 0 som vi måtte ønske, men det er ikke mulig å oppnå verdien 0 i noe punkt.

Legg merke til at dersom vi utvider definisjonsmengden til å være det lukkede intervallet $[0, 1]$, får vi ekstremalverdier i endepunktene. ■

Vi er nå klare til å bevise hovedteoremet i denne seksjonen.

5.3.5 Ekstremalverdisetningen La $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall. Da har f både maksimums- og minimumspunkt(er).

Bevis: Vi skal vise at f har maksimumspunkt(er); beviset for minimumspunkter er helt analogt. Fra setning 5.3.2 vet vi at f er begrenset, og følgelig eksisterer den minste øvre skranken

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Dersom vi kan finne et punkt c slik at $f(c) = M$, så vil c være et maksimumspunkt.

Resonnementet har nøyaktig samme idé som beviset for setning 5.3.2. La oss starte med å dele intervallet $[a, b]$ i to like store deler: $[a, (a+b)/2]$ og $[(a+b)/2, b]$. Siden f har supremum M på $[a, b]$, må den også ha supremum M på minst ett av de mindre intervallene. Kall dette intervallet $[a_1, b_1]$ (dersom f har supremum M på begge to, velger vi ett av dem). Vi gjentar nå prosedyren med $[a_1, b_1]$; deler det i to deler $[a_1, (a_1+b_1)/2]$ og $[(a_1+b_1)/2, b_1]$, og observerer at f må ha supremum M på minst ett av disse intervallene. Det nye intervallet hvor f har supremum M , kaller vi $[a_2, b_2]$. Fortsetter vi på denne måten, får vi en uendelig kjede av intervaller

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$$

der f har supremum M . Følgen $\{a_n\}$ er voksende, og ifølge teorem 4.3.9 må den da konvergere mot et punkt c i $[a, b]$. Siden lengden til intervallene halveres hele tiden, må følgen $\{b_n\}$ også konvergere mot c . Vi skal vise at $f(c) = M$, og at c dermed er et maksimumspunkt.

Siden f har supremum M på alle intervallene våre, kan vi for hver n velge et punkt $c_n \in [a_n, b_n]$ slik at $f(c_n) \geq M - 1/n$. Dette betyr at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = M.$$

På den annen side er følgen $\{c_n\}$ klemt mellom de to følgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ som begge konvergerer mot c , og følgelig må også $\{c_n\}$ konvergere mot c . Siden f er kontinuerlig, betyr dette ifølge setning 5.1.10 at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = f(c).$$

Men dermed er $f(c) = M$, og setningen er bevist. ■

Bemerkning

Som vi allerede har påpekt, er dette beviset svært likt det vi ga for setning 5.3.2. Det er faktisk mulig (og ikke særlig vanskelig) å slå de to bevisene sammen til ett, og på den måten vise ekstremalverdisetningen direkte uten å gå veien om 5.3.2. Vi har valgt den indirekte ruten av to grunner; for det første blir beviset litt oversiktligere på denne måten, og for det andre understreker det på en klarere måte at begrensethet og eksistens av ekstremalverdier egentlig er to forskjellige egenskaper.

5.3.6 Eksempel

Vi skal vise at funksjonen

$$f(x) = \frac{x^7 \sin\left(e^{\frac{x^{14}}{x^2+1}}\right)}{x^4 + 1}$$

har et maksimumspunkt på intervallet $[-1, 2]$.

Vi kan selvfølgelig forsøke å derivere funksjonen for å finne eventuelle maksimumspunkter, men det ser ikke veldig fristende ut! Siden oppgaven ikke ber oss finne maksimumspunktet, men bare vise at det eksisterer, er det også unødvendig å derivere. Alt vi behøver å gjøre, er å observere at ifølge teorien i seksjon 5.1 er f en kontinuerlig funksjon, og siden intervallet $[-1, 2]$ er lukket og begrenset, følger det fra ekstremalverdisetningen at et maksimumspunkt finnes. ■

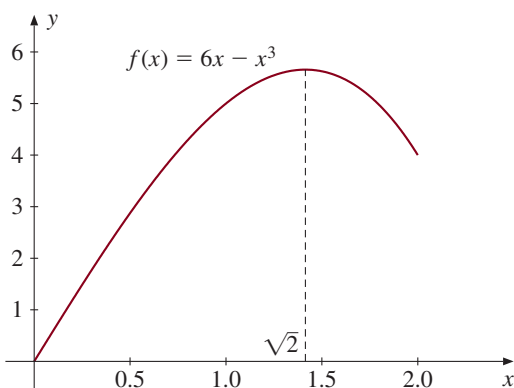
I likhet med skjæringssetningen er ekstremalverdisetningen først og fremst et verktøy for teoretiske undersøkelser. Vi skal sjelden ha bruk for den når vi regner med konkrete funksjonsuttrykk, men den brukes ofte når man ønsker å vise at en hel klasse av funksjoner har en viss egenskap. En annen likhet med skjæringssetningen er at også ekstremalverdisetningen bygger på kompletthetsprinsippet. Følgende eksempel viser at setningen ikke ville ha vært sann dersom vi bare arbeidet med rasjonale tall.

5.3.7 Eksempel

Ved derivasjon og fortegningsdrøfting ser vi at funksjonen $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definert ved

$$f(x) = 6x - x^3$$

har maksimumspunkt i $x = \sqrt{2}$ med maksimalverdi $4\sqrt{2}$ (se figur 5.3.1).



Figur 5.3.1.

Hadde vi bare arbeidet med rasjonale tall, ville det ikke ha vært mulig å oppnå verdien $4\sqrt{2}$, men vi kunne ha kommet så nær den vi måtte ønske, ved å velge rasjonale x -verdier tilstrekkelig nær $\sqrt{2}$. Innenfor det rasjonale tallsystemet er altså f et eksempel på en kontinuerlig funksjon som ikke har et maksimumspunkt på det lukkede, begrensede intervallet $[0, 2]$. Siden kompletthetsprinsippet er den eneste grunnleggende

egenskapen som skiller de reelle tallene fra de rasjonale, viser dette at kompletthetsprinsippet må være en essensiell ingrediens i ethvert bevis for ekstremalverdisetningen. ■

Oppgaver i seksjon 5.3

1. Bruk ekstremalverdisetningen til å vise at funksjonene har maksimums- og minimumsverdier på de angitte intervallene.

a) $f(x) = \frac{e^{\sin x^2}}{x^2 + 1}$ på intervallet $[-14, \sqrt{31}]$

b) $f(x) = \frac{\ln(\sin^2 x + e^x)}{x - 1}$ på intervallet $[1.0001, 3]$

c) $f(x) = \tan(x^2 + 1)$ på intervallet $[0, 1/\sqrt{2}]$

2. a) Bruk setning 5.1.4 og definisjon 5.1.11 til å vise at funksjonen $f(x) = 1/x$ er kontinuerlig.

b) Vis at $f(x)$ ikke er begrenset på intervallet $[-1, 1]$. Hvorfor strider ikke dette mot ekstremalverdisetningen?

3. a) Anta at $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig og at $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ eksisterer. Vis at f er begrenset.

b) Anta at $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig og har både positive og negative verdier. Anta også at $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Vis at f har maksimal- og minimalpunkter.

4. Anta at $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig og at grenseverdiene av $f(x)$ når x nærmer seg a ovenfra og b nedenfra eksisterer. Vis at f er begrenset.

5. Anta at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Vis at verdimengden $V_f = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ er et lukket, begrenset intervall.

6. (UiO) Vi ser på et reelt polynom

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

der graden n er et partall. Vis at $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$ og at $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \infty$. Vis deretter at det finnes et tall K slik at $P(x) > K$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

7. I denne oppgaven skal vi modifisere beviset for ekstremalverdisetningen slik at vi slipper å gå veien om setning 5.3.2. Vi antar altså at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig og skal vise at f har et maksimalpunkt. La $\alpha = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ der vi lar $\alpha = \infty$ dersom f er ubegrenset. La $\{\alpha_n\}$ være en voksende følge slik at $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$.

a) Vis at det finnes en sekvens av intervaller

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

der hvert intervall er halvparten av det foregående, og der $\alpha = \sup\{f(x) : x \in [a_n, b_n]\}$ for alle n .

- b) Vis at følgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konvergerer mot det samme tallet $c \in [a, b]$.
- c) Vis at det finnes tall $c_n \in [a_n, b_n]$ slik at $f(c_n) \geq \alpha_n$.
- d) Vis at $f(c) = \alpha$, og forklar hvorfor dette beviser ekstremalverdisetningen.
- e) Prøv å gjennomføre beviset ovenfor når f er definert på et *åpent* intervall (a, b) . Hvor går det galt?

8. I denne oppgaven skal vi gi et bevis for ekstremalverdisetningen basert på teorem 4.4.4 (i den *-merkede seksjonen *4.4). La $\alpha = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, der vi lar $\alpha = \infty$ hvis f er ubegrenset, og $\{\alpha_n\}$ være en voksende følge slik at $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$.

- a) Vis at det finnes en følge $\{c_n\}$ slik at $f(c_n) \geq \alpha_n$ og $c_n \in [a, b]$.
- b) Vis at $\{c_n\}$ har en delfølge $\{c_{n_k}\}$ som konvergerer mot et tall $c \in [a, b]$.
- c) Vis at $f(c) = \alpha$, og forklar hvorfor dette beviser ekstremalverdisetningen.

5.4 Grenseverdier

Grensebegrepet for funksjoner står sentralt i skolematematikken, og for mange vil nok deler av denne seksjonen få et preg av repetisjon. Det er imidlertid viktig at vi blir enige om de grunnleggende definisjonene og får trent inn en del teknikker som vil være nyttige senere i boken.

Definisjonen av grenseverdi ligner svært mye på definisjonen av kontinuitet, og før vi går igang, kan det være lurt å si noen ord om *forskjellen* på de to definisjonene. Når vi skal vise at funksjonen f er kontinuert i et punkt a , er f definert i a , og vi ønsker å finne ut om $f(x)$ ligger nær $f(a)$ når x er nær a . Når vi definerer grenseverdien $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, bryr vi oss ikke om f er definert i a eller ikke – alt vi er interessert i, er om $f(x)$ nærmer seg en eller annen verdi når x kommer nær a (om denne verdien i så fall er $f(a)$, er irrelevant). Ofte er vi interessert i å regne ut grenseverdien $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nettopp fordi $f(a)$ ikke er definert – vi ønsker å finne ut hva denne verdien «burde ha vært». Et typisk eksempel er funksjonen

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Denne funksjonen er ikke definert når $x = 0$ (for da har vi 0 både i teller og nevner), men tegner vi opp grafen på en datamaskin eller lommeregner, ser vi at funksjonen nærmer seg 1 når x går mot 0. Grensen $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ forteller oss altså hvordan vi skal velge $f(0)$ (lik 1) dersom vi vil utvide f til en kontinuert funksjon på hele \mathbb{R} .

Før vi skriver opp definisjonen på grenseverdi, må vi innføre litt terminologi som tar hensyn til at f ikke behøver å være definert i a . La oss først bli enige om at f er *definert i nærheten av a* dersom det finnes et tall $c > 0$ slik at $f(x)$ er definert for alle x i intervallet $(a - c, a + c)$ *unntatt muligens i a selv*. Hvis f er definert i nærheten av a , er det vanlig å si at $f(x)$ nærmer seg b når x går mot a dersom vi kan få avstanden mellom $f(x)$ og b så liten vi måtte ønske ved å velge x tilstrekkelig nær (men ikke lik) a . I vår presisering setter vi navn på hva vi mener med «så liten vi måtte ønske» og «tilstrekkelig nær»:

5.4.1 Definisjon

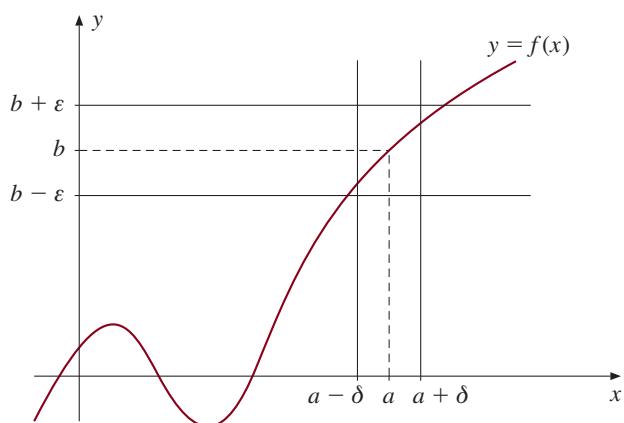
Anta at f er definert i nærheten av a . Vi sier at $f(x)$ nærmer seg b som grenseverdi når x går mot a dersom følgende gjelder. For ethvert tall $\epsilon > 0$ (uansett hvor lite) finnes det et tall $\delta > 0$ slik at $|f(x) - b| < \epsilon$ for alle x slik at $0 < |x - a| < \delta$. Med symboler skriver vi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

eller

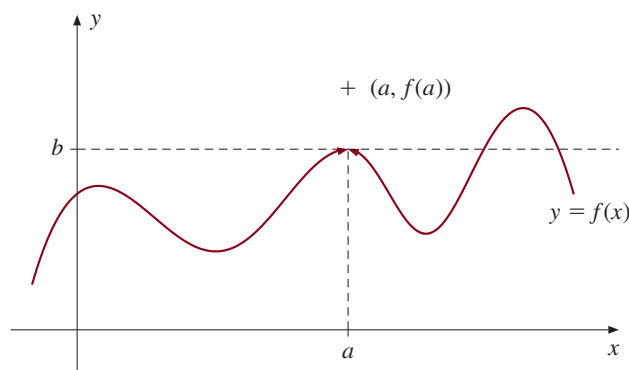
$$f(x) \rightarrow b \quad \text{når} \quad x \rightarrow a$$

Som nevnt ligner denne definisjonen svært på definisjonen av kontinuitet i seksjon 5.1, og vi skal senere i denne seksjonen (observasjon 5.4.7) gi en presis beskrivelse av forholdet mellom de to begrepene. Legg imidlertid merke til første del av betingelsen $0 < |x - a| < \delta$ (altså den som sier at $0 < |x - a|$); det er den som forteller at vi overhodet ikke er interessert i $f(a)$, bare $f(x)$ for x nær, men forskjellig fra a . Figur 5.4.1 viser samspillet mellom ϵ og δ ; uansett hvor liten ϵ er, skal det være mulig å finne en δ slik at hele funksjonsgrafen over intervallene $(a - \delta, a)$ og $(a, a + \delta)$ ligger klemmt mellom de to vannrette linjene med høyde $b - \epsilon$ og $b + \epsilon$. Det er ofte lurt å tenke på ϵ som en feilmargen som anslår hvor liten avstand det er mellom $f(x)$ og den ønskede grenseverdien b .



Figur 5.4.1.

Som sagt er vi ofte interessert i å regne ut $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ når $f(a)$ ikke er definert, men det kan også være interessant når $f(a)$ er definert. Figur 5.4.2 viser et slikt tilfelle; her er $f(a)$ definert, men forskjellig fra $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.



Figur 5.4.2.

Vi skal se på et eksempel som viser hvordan man i praksis kan benytte definisjonen til å beregne grenseverdier. Dette ligner svært på eksemplene i seksjon 5.1 der vi viste at funksjoner er kontinuerlige ved hjelp av definisjonen, men vi gjør problemstillingen litt mer generell ved å finne grenseverdien i et generelt punkt a .

5.4.2 Eksempel

Finn grenseverdien $\lim_{x \rightarrow a} 3x^2$.

Er det noe som helst fornuft her i verden, vil selvfølgelig denne grenseverdien være $3a^2$, men spørsmålet er hvordan man viser dette ut fra definisjonen. Gitt en $\epsilon > 0$, må vi altså finne en $\delta > 0$ slik at $|3x^2 - 3a^2| < \epsilon$ når $0 < |x - a| < \delta$. Vi bruker det samme trikset som i seksjon 5.1; vi innfører $h = x - a$, og observerer at da blir $x = a + h$. Størrelsen vi skal kontrollere, kan nå skrives slik

$$|3x^2 - 3a^2| = |3(a + h)^2 - 3a^2| = |3a^2 + 6ah + 3h^2 - 3a^2| = |h||6a + 3h|$$

Vi ser at dersom $|h| < 1$, vil faktoren $|6a + 3h|$ være mindre enn $6|a| + 3$. Velger vi derfor

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{6|a| + 3} \right\}$$

ser vi at når $|h| = |x - a| < \delta$, så er

$$|3x^2 - 3a^2| = |h||6a + 3h| \leq \frac{\epsilon}{6|a| + 3} (6|a| + 3) = \epsilon$$

Dermed er argumentet gjennomført. ■

Er formlene mer kompliserte, blir det fort uoversiktlig å benytte denne metoden. Isteden kan man gjøre bruk av følgende regneregler.

5.4.3 Regneregler for grenseverdier Anta at de to funksjonene f og g begge er definert i nærheten av a , og at $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$. Da er

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = F + G$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = F - G$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = F \cdot G$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \text{ forutsatt at } G \neq 0.$$

Bevis: Disse regnereglene er velkjente fra før, og vi skal nøye oss med å bevise (ii) og (iv) som eksempler på hvordan man bruker definisjon 5.4.1 i teoretisk arbeid. (ii)

Gitt en $\epsilon > 0$, må vi vise at det alltid finnes en $\delta > 0$ slik at

$$|(f(x) - g(x)) - (F - G)| < \epsilon$$

når $0 < |x - a| < \delta$. Ifølge trekantulikheten er

$$|(f(x) - g(x)) - (F - G)| = |(f(x) - F) + (G - g(x))| \leq |f(x) - F| + |G - g(x)|,$$

så det er nok å vise at vi kan få hvert av de to siste leddene mindre enn $\epsilon/2$. Siden $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$, må det finnes en δ_1 slik at $|f(x) - F| < \epsilon/2$ når $0 < |x - a| < \delta_1$. Siden $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$, må det tilsvarende finnes en δ_2 slik at $|G - g(x)| < \epsilon/2$ når $0 < |x - a| < \delta_2$. Lar vi δ være det minste av de to tallene δ_1 og δ_2 , ser vi at dersom $0 < |x - a| < \delta$, så er både $|f(x) - F|$ og $|G - g(x)|$ mindre enn $\epsilon/2$, og beviset er ferdig.

(iv) Vi observerer først at det er nok å vise at $\lim_{x \rightarrow a} 1/g(x) = 1/G$. Vet vi dette, kan vi nemlig bruke (iii) til å innse at

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = F \cdot \frac{1}{G} = \frac{F}{G}.$$

Gitt en $\epsilon > 0$, må vi altså vise at det finnes en $\delta > 0$ slik at

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| < \epsilon$$

når $0 < |x - a| < \delta$. Setter vi på felles brøkstrek, får vi

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| = \left| \frac{G - g(x)}{G \cdot g(x)} \right|.$$

Siden $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ (der $G \neq 0$), kan vi finne en $\delta_1 > 0$ slik at $|g(x)| > |G|/2$ når $0 < |x - a| < \delta_1$. Siden $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ kan vi også finne en δ_2 slik at

$|G - g(x)| < \epsilon G^2/2$ når $0 < |x - a| < \delta_2$. Lar vi δ være minimum av δ_1 og δ_2 , ser vi at når $|x - a|$ er mindre enn δ , så er $|G \cdot g(x)| > G^2/2$ og $|G - g(x)| < \epsilon G^2/2$. Følgelig er

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| = \left| \frac{G - g(x)}{G \cdot g(x)} \right| < \frac{\frac{\epsilon G^2}{2}}{\frac{G^2}{2}} = \epsilon$$

og beviset er ferdig. ■

Bemerkning

Man kan også vise (iv) direkte uten å gå veien om (iii), men det er mer kronglete. Hvis du synes det er juks å bruke (iii) uten å ha bevist den, kan du prøve å lage et bevis selv (bruk beviset for 4.3.3(iii) som modell).

La oss se noen eksempler på hvordan regnereglene brukes.

5.4.4 Eksempel

Finn

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 4x}{2x^3 + 4}.$$

Ifølge regel (iv) ovenfor er det nok å finne grensen av teller og nevner hver for seg, og så dele etterpå.

La oss begynne med telleren. Vi vet at $\lim_{x \rightarrow -2} x = -2$, og ifølge regel (iii) betyr det at $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = (-2)^2 = 4$. Bruker vi regel (ii) og (iii) i kombinasjon, ser vi at grenseverdien til telleren er

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 - 4x) = 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-2) = 20.$$

Så er det nevnerens tur. Siden vi allerede har vist at $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$, kan vi beregne $\lim_{x \rightarrow -2} x^3$ på denne måten:

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 \cdot x) = 4 \cdot (-2) = -8$$

hvor vi har brukt regel (iii). Fra dette får vi (ved bruk av (i) og (iii))

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2x^3 + 4) = 2(-8) + 4 = -12$$

som er grenseverdien til nevneren. Til sammen får vi da

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 4x}{2x^3 + 4} = \frac{20}{-12} = -\frac{5}{3}.$$
■

Argumentasjonen ovenfor er svært omstendelig og man lærer seg fort å ta snarveier. Et enda nyttigere verktøy enn regnereglene i 5.4.3 får man fra sammenhengen mellom grenseoverganger og kontinuitet. Før vi ser nærmere på den, er det imidlertid lurt å vite litt om ensidige grenser.

5.4.5 Definisjon

Vi sier at $f(x)$ går mot b når x nærmer seg a ovenfra dersom det for enhver $\epsilon > 0$, finnes en $\delta > 0$ slik at $|f(x) - b| < \epsilon$ for alle x slik at $a < x < a + \delta$. Vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b.$$

Tilsvarende sier vi at $f(x)$ går mot b når x nærmer seg a nedenfra dersom det for enhver $\epsilon > 0$, finnes en $\delta > 0$ slik at $|f(x) - b| < \epsilon$ for alle x slik at $a - \delta < x < a$. Vi skriver

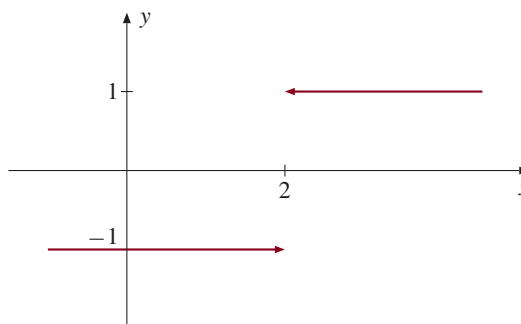
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b.$$

Legg merke til at betingelsene ovenfor er nøyaktig de samme som vi har i definisjonen av vanlige grenseverdier – den eneste forskjellen er at de nå bare omfatter punkter på den ene siden av a . Fra dette følger det at den tosidige grenseverdien $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ eksisterer og er lik b hvis og bare hvis *begge* de ensidige grensene $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ eksisterer og er lik b . Det er instruktivt å se på et eksempel hvor de ensidige grensene eksisterer, men er forskjellige.

5.4.6 Eksempel

Finn de ensidige grenseverdiene $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ til funksjonen

$$f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}.$$



Figur 5.4.3.

Når $x > 2$, er $|x - 2| = x - 2$, og følgelig er $f(x) = \frac{x - 2}{x - 2} = 1$. Dermed er $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$. Når $x < 2$, er $|x - 2| = -(x - 2)$, så $f(x) = \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1$. Altså er $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$. Figur 5.4.3 viser grafen til funksjonen. ■

Sammenligner vi definisjonen av grenseverdier med definisjonen av kontinuitet, får vi følgende sammenheng.

5.4.7 Observasjon

En funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig i et indre punkt $c \in (a, b)$ hvis og bare hvis $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. Videre er f kontinuerlig i det venstre endepunktet a hvis og bare hvis $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, og den er kontinuerlig i det høyre endepunktet b hvis og bare hvis $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Denne observasjonen er viktig av flere grunner – den gir oss et mer konkret bilde av kontinuitet, og den kan brukes både til å sjekke kontinuitet og til å finne grenseverdier. Vi tar med et eksempel av hver sort.

5.4.8 Eksempel

Vis at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{når } x > 0 \\ e^x & \text{når } x \leq 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i 0.

Vi beregner de ensidige grensene $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Siden e^x er kontinuerlig i 0, er

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^0 = 1.$$

Dessuten vet vi at $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x/x = 1$, så $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. Altså er

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Siden $f(0) = 1$, betyr dette at $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, og f er kontinuerlig i 0. ■

5.4.9 Eksempel

Finn grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan \left[\pi(\cos x) \frac{e^{-x}}{4} \right].$$

Siden funksjonen $f(x) = \tan[\pi(\cos x)e^{-x}/4]$ er kontinuerlig (den er en sammensetning av kontinuerlige funksjoner), så er $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ – det vil si

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \tan \left[\pi(\cos x) \frac{e^{-x}}{4} \right] &= \tan \left[\pi(\cos 0) \frac{e^{-0}}{4} \right] \\ &= \tan \left(\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \right) \\ &= \tan \frac{\pi}{4} = 1. \end{aligned}$$

I tillegg til de grenseverdiene vi hittil har sett på, får vi ofte bruk for grenseverdier når x går mot ∞ eller $-\infty$. De defineres på følgende måte.

5.4.10 Definisjon

Vi sier at $f(x)$ går mot b som grenseverdi når x går mot ∞ dersom det til enhver $\epsilon > 0$, finnes en $N \in \mathbb{R}$ slik at $|f(x) - b| < \epsilon$ for alle $x \geq N$. Vi skriver $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$. Tilsvarende sier vi at $f(x)$ nærmer seg b som grenseverdi når x går mot $-\infty$ dersom det til enhver $\epsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{R}$ slik at $|f(x) - b| < \epsilon$ når $x \leq -N$. Vi skriver $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Denne definisjonen er opplagt en variant av definisjon 5.4.1, og den er enda nærmere knyttet til definisjonen av konvergens av følger i 4.3.1. Det er derfor ikke rart at vi har de de samme grensereglene som før.

5.4.11 Regneregler for grenser Regnereglene 5.4.3 gjelder også når $a = \infty$ og når $a = -\infty$. De gjelder dessuten for ensidige grenser $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Mange av de regneteknikkene som gjelder for grenseverdier av følger $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, kan overføres direkte til grenseverdier av typen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Vi tar bare med ett eksempel.

5.4.12 Eksempel

Finn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} + x}.$$

Siden $\sqrt{x^2 + x}$ går mot ∞ og x mot $-\infty$, er det ikke klart hva nevneren går mot. For å forenkle problemet, multipliserer vi over og under brøkstreken med det konjugerte uttrykket $\sqrt{x^2 + x} - x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} + x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)(\sqrt{x^2 + x} - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{x}. \end{aligned}$$

Deler vi nå med x i teller og nevner, får vi (vær forsiktig, husk at vi er interessert i negative x):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = -2,$$

og følgelig er $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} + x} = -2$. ■

Av og til vil ikke våre funksjoner nærme seg en grense når x går mot a , men tvert i mot vokse ubegrenset. Da er følgende definisjon nyttig.

5.4.13 Definisjon

Vi sier at $f(x)$ går mot uendelig når x nærmer seg $a \in \mathbb{R}$ dersom det for enhver $N \in \mathbb{R}$ finnes en $\delta > 0$ slik at $f(x) > N$ når $0 < |x - a| < \delta$. Vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Tilsvarende sier vi at $f(x)$ går mot minus uendelig dersom det for enhver $N \in \mathbb{R}$ finnes en δ slik at $f(x) < N$ når $0 < |x - a| < \delta$. Vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

På helt tilsvarende måte kan vi definere hva vi mener med de ensidige grensene $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ og $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

5.4.14 Eksempel

Dersom $f(x) = 1/x^2$, så er $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. Ser vi derimot på funksjonen $g(x) = 1/x$, så eksisterer ikke $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, men $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty$ og $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$. ■

Den siste typen grenseverdier vi må se på, er den hvor $f(x)$ går mot ∞ eller $-\infty$ når x går mot ∞ eller $-\infty$. Det burde nå være klart hvordan slike grenseverdier defineres, og vi skriver bare opp én variant av definisjonen.

5.4.15 Definisjon

Vi sier at $f(x)$ går mot ∞ når x går mot ∞ dersom det til enhver $N \in \mathbb{R}$ finnes en $M \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) \geq N$ når $x \geq M$. Med symboler skriver vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

5.4.16 Eksempel

Finn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x^3}{8 + 7x^2}.$$

Setter vi de høyeste potensene av x utenfor en parentes i teller og nevner, får vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x^3}{8 + 7x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x} - 4 \right)}{x^2 \left(\frac{8}{x^2} + 7 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{\frac{1}{x} - 4}{\frac{8}{x^2} + 7}.$$

I dette uttrykket går den første faktoren mot ∞ mens den andre går mot $-4/7$. Produktet er da negativt og vokser over alle grenser. Altså er

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x^3}{8 + 7x^2} = -\infty.$$



I denne seksjonen har vi ikke gjort noe systematisk forsøk på å behandle de mer utfordrende typene av grenseproblemer, slik som « $0/0$ », « ∞/∞ », « $\infty - \infty$ », « 1^∞ », « 0^0 », « ∞^0 ». For disse problemtypene finnes det ikke generelle regler for hva grenseverdien blir, og vi må behandle hvert enkelt problem individuelt. Den beste metoden for å gjøre dette er L'Hôpitals regel som vi skal gjennomgå i neste kapittel.

Oppgaver i seksjon 5.4

1. Bruk regnereglene 5.4.3 til å beregne grenseverdiene:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 7}{3x + \cos x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + \sqrt{x} + e^{x^2}}{7 + \sin(\sqrt{x})}$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x + 3 \cos(x)}{\sin(x/2) + 4}$

2. Bruk definisjonen til å vise grenseverdiene:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 6$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + 1 = 3$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{x + 1} = 2$

e) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$

3. Finn grenseverdiene

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 + 4x^4}{3x^3 - 2x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 2x + 7}{\sqrt{x} - 4x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

4. Avgjør om funksjonen er kontinuert i det angitte punktet.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{for } x \leq 1 \\ -4 \cos(\pi x) & \text{for } x > 1 \end{cases} \quad \text{i punktet } 1$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x-4|}{x-4} & \text{for } x \neq 4 \\ 0 & \text{for } x = 4 \end{cases} \quad \text{i punktet } 4$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for } 0 < x \leq 6 \\ \frac{x}{\sqrt{x+3}-3} & \text{for } x > 6 \end{cases} \quad \text{i punktet } 6$$

5. Bevis 5.4.3(i) og (iii).

6. Bevis 5.4.11.

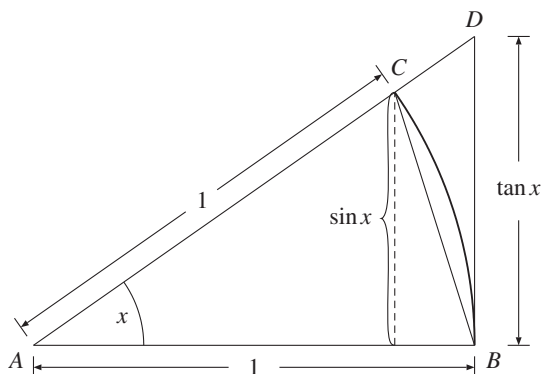
7. Anta at $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ og at $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$. Anta videre at $g(x) \neq b$ for alle x tilstrekkelig nær a . Vis at

$$\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = c.$$

8. Anta at f er definert i nærheten av a . Vis at $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ hvis og bare hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ for alle følger $\{x_n\}$ som konvergerer mot a og som er slik at $x_n \neq a$ for alle n .

9. Fra skolematematikken vet du at $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ når $x \rightarrow 0$. I denne oppgaven skal vi minne om beviset.

a) Bruk figuren til å vise at $\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan x$ (sammenlign arealene til trekanten ABC , sirkelsektoren ABC og trekanten ABD).



b) Bruk resultatet i a) til å vise at

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{når } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

c) Vis at $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

d) Vis at $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$, og konkluder med at $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

e) Finn grenseverdiene

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

*5.5 Bevis for algebraens fundamentalteorem

I denne seksjonen skal vi bevise algebraens fundamentalteorem 3.5.1 (vi har skrevet det opp på nytt nedenfor så du skal slippe å slå tilbake). Dette beviset er lengre og vanskeligere enn de fleste andre vi skal komme borti – det dreier seg tross alt om et av de største gjennombruddene i matematikkens historie – og du kan ha full nytte av resten av boken uten å lese det. Argumentasjonen bygger på den *-merkede seksjonen *4.4 (nærmere bestemt på korollar 4.4.5).

La oss begynne med å skrive opp hovedsatsen på nytt.

5.5.1 Algebraens fundamentalteorem

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \dots + c_1 z + c_0$$

være et komplekst n -te grads polynom. Da finnes det komplekse tall r_1, r_2, \dots, r_n slik at

$$P(z) = c_n (z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n)$$

for alle komplekse tall z . Bortsett fra rekkefølgen er faktorene $(z - r_1), (z - r_2), \dots, (z - r_n)$ entydig bestemt.

Teoremet sier altså at ethvert komplekst n -te grads polynom har n røtter (dersom vi teller med multiplisitet). Det viser seg at det vanskelige punktet er å vise at et polynom alltid har minst én kompleks rot – kan vi greie det, er det ikke så vanskelig å få fatt i resten.

5.5.2 Setning

Ethvert komplekst polynom

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \dots + c_1 z + c_0$$

har minst én rot r .

La oss først se hvordan vi kan bevise fundamentalteoremet dersom vi kjenner denne setningen.

Bevis for Algebraens Fundamentalteorem fra setning 5.5.2: Første del av beviset er ved induksjon på graden til polynomet. Induksjonshypotesen er: P_n : «Ethvert poly-

nom $P(z)$ av n -te grad kan skrives som et produkt

$$P(z) = c_n(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n)$$

der r_1, r_2, \dots, r_n er komplekse tall.»

P_1 er opplagt sann siden førstegrads polynomet $P(z) = c_1z + c_0$ kan skrives $P(z) = c_1(z - r_1)$ der $r_1 = -c_0/c_1$. Anta nå at P_n er sann, og at $P(z)$ er et polynom av grad $n + 1$. Vi må vise at $P(z)$ kan skrives på formen

$$P(z) = c_{n+1}(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_{n+1}).$$

Fra setning 5.5.2 vet vi at $P(z)$ har en rot r . Deler vi polynomet $P(z)$ med $z - r$, vet vi fra setning 1.5.5 at divisjonen går opp, og at det altså finnes et polynom Q av n -te grad slik at

$$P(z) = Q(z)(z - r).$$

Siden Q er et polynom av grad n , vet vi fra induksjonshypotesen at

$$Q(z) = d_n(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n),$$

der d_n er den ledende koeffisienten i Q . Dermed er

$$P(z) = Q(z)(z - r) = d_n(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n)(z - r).$$

Det er klart at $d_n = c_{n+1}$ (tenk på hva du får hvis du ganger ut parentesene), og vi har bevist P_{n+1} . Ifølge induksjonsprinsippet er dermed P_n sann for alle n .

Men vi er ikke riktig ferdig med beviset for fundamentalteoremet likevel – det gjenstår å vise at et polynom $P(z)$ ikke kan skrives som et produkt på to forskjellige måter

$$P(z) = c_n(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n) = c_n(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n).$$

Anta at vi hadde to slike produktfremstillinger. Etter å ha forkortet de faktorene som forekom på begge sider, ville vi ha stått igjen med et uttrykk av typen

$$c_n(z - r_{i_1})(z - r_{i_2}) \dots (z - r_{i_k}) = c_n(z - p_{j_1})(z - p_{j_2}) \dots (z - p_{j_k}),$$

der alle r 'ene er forskjellig fra alle p 'ene. Men dermed ville venstresiden ha et nullpunkt for $z = r_{i_1}$ mens høyresiden ikke er null der, og det er umulig siden uttrykkene skal være like for alle z . Beviset er ferdig. \square

Vi skal nå bevise setning 5.5.2. For å gjøre det må vi først utvide en del av de resultatene vi har vist for vanlige kontinuerlige funksjoner, til å gjelde for komplekse polynomer. Dette er mulig fordi et komplekst polynom er kontinuerlig i følgende forstand. La a være et komplekst tall. For ethvert reelt tall $\epsilon > 0$, finnes det et reelt tall $\delta > 0$ slik at $|P(z) - P(a)| < \epsilon$ for alle $z \in \mathbb{C}$ slik at $|z - a| < \delta$. Man kan vise dette på akkurat samme måte som man viser at reelle polynomer er kontinuerlige. Siden polynomet $P(z)$ er kontinuerlig, må også funksjonen $z \rightarrow |P(z)|$ være kontinuerlig (her benytter vi trekantulikheten).

Vårt første hjelperesultat er en kompleks versjon av setning 5.1.10.

5.5.3 Lemma

Anta at $\{z_n\}$ er en følge av komplekse tall som konvergerer mot a . Da konvergerer følgen $\{|P(z_n)|\}$ mot $|P(a)|$.

Bevis: Identisk med beviset for første halvdel av setning 5.1.10. ■

Det neste hjelperesultatet kan man tenke på som en kompleks versjon av (den ene halvdel av) ekstremalverdisetningen.

5.5.4 Lemma

Det finnes et punkt $a \in \mathbb{C}$ hvor tallverdien $|P(z)|$ har minst mulig verdi (dvs. $|P(a)| \leq |P(z)|$ for alle $z \in \mathbb{C}$).

Bevis: La $b = \inf\{|P(z)| : z \in \mathbb{C}\}$. Vi må finne et punkt a slik at $P(a) = b$. Vi legger først merke til at

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \cdots + c_1 z + c_0| \\ &= |z^n| \cdot |c_n + c_{n-1} z^{-1} + c_{n-2} z^{-2} + \cdots + c_1 z^{1-n} + c_0 z^{-n}|, \end{aligned}$$

der den første faktoren går mot uendelig og den andre mot $|c_n|$ når $|z| \rightarrow \infty$. Hele uttrykket går dermed mot uendelig. Dette betyr at dersom vi velger R tilstrekkelig stor, vil $|P(z)| > b + 1$ for alle z med tallverdi større enn R . Et eventuelt minimalpunkt for $|P(z)|$ må derfor ligge innenfor den begrensede mengden

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}.$$

Vi er nå klare til å finne minimalpunktet a . For hver $n \in \mathbb{N}$ må det finnes et punkt $\{z_n\}$ i A slik at $|P(z_n)| < b + 1/n$. Følgen $\{z_n\}$ er begrenset (siden alle punktene kommer fra mengden A), og ifølge korollar 4.4.5 har den da en konvergent delfølge $\{z_{n_k}\}$. La a være grensen som denne delfølgen konvergerer mot. Ifølge lemma 5.5.3 konvergerer $|P(z_{n_k})|$ mot $|P(a)|$, og siden $b \leq |P(z_{n_k})| \leq b + 1/n_k$, må $|P(a)| = b$, og beviset er komplett. ■

Legg merke til at $P(a) = 0$ er det samme som at P har a som rot. For å vise at polynomet P har en rot, er det derfor tilstrekkelig å vise at $|P(a)| = 0$, der a er minimalpunktet i lemmaet ovenfor. Det er dette som er ideen i beviset for setning 5.5.2.

Bevis for setning 5.5.2: La a være minimalpunktet i lemmaet ovenfor. Vi skal anta at $P(a) = c \neq 0$ og vise at dette fører til en selvmotsigelse. For å gjøre argumentet lettere, innfører vi en hjelpevariabel $v = z - a$. Da er $z = v + a$, og vi kan skrive

$$\begin{aligned} P(z) &= c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \cdots + c_1 z + c_0 \\ &= c_n (v + a)^n + c_{n-1} (v + a)^{n-1} \\ &\quad + c_{n-2} (v + a)^{n-2} + \cdots + c_1 (v + a) + c_0. \end{aligned}$$

Hvis vi nå multipliserer ut alle parentesene av typen $(v + a)^k$ og samler leddene som da fremkommer etter potenser av v , får vi et uttrykk av typen

$$P(z) = d_n v^n + d_{n-1} v^{n-1} + d_{n-2} v^{n-2} + \dots + d_1 v + d_0.$$

Setter vi nå inn $v = z - a$, får vi

$$P(z) = d_n (z - a)^n + d_{n-1} (z - a)^{n-1} + d_{n-2} (z - a)^{n-2} + \dots + d_1 (z - a) + d_0.$$

Observer at $P(a) = d_0$. Siden vi har antatt at $P(a) = c \neq 0$, er altså den laveste koeffisienten d_0 i uttrykket ovenfor lik c , og dermed forskjellig fra null. La d_k være den nest laveste koeffisienten som er forskjellig fra null (vanligvis vil dette selvfølgelig være d_1 , men det finnes unntak). Da kan vi skrive

$$\begin{aligned} P(z) &= d_n (z - a)^n + d_{n-1} (z - a)^{n-1} \\ &\quad + d_{n-2} (z - a)^{n-2} + \dots + d_k (z - a)^k + c \\ &= M(z)(z - a)^k + d_k (z - a)^k + c \end{aligned}$$

der $M(z) = d_n (z - a)^{n-k} + d_{n-1} (z - a)^{n-1-k} + \dots + d_{k+1} (z - a)$ går mot null når z nærmer seg a .

Vi skal nå vise at det finnes et punkt z i nærheten av a slik at $|P(z)| < |c|$. Siden vi har antatt at $|P(a)| = |c|$ er minimalpunktet til funksjonen $|P(z)|$, vil dette gi oss den motsigelsen vi er på jakt etter. Ideen er å velge z slik at $d_k (z - a)^k$ er et komplekst tall (altså en vektor) som peker i motsatt retning av c . Da vil tallverdien til $d_k (z - a)^k + c$ være mindre enn $|c|$, og hvis bare z er nær nok a , vil det gjenværende leddet $M(z)(z - a)^k$ være så lite at også $P(z)$ blir mindre enn c i tallverdi.

For å få til dette, velger vi først w til å være en k -te rot til det komplekse tallet $-c/d_k$ (det vil si at $w^k = -c/d_k$; at slike k -te røtter finnes, vet vi fra kapittel 3). Vi lar så ϵ være et lite, positivt, reelt tall (nøyaktig hvor lite skal vi bestemme senere, men vi antar allerede nå at $\epsilon < 1$), og velger

$$z = a + \epsilon w.$$

Innsatt i uttrykket for $P(z)$, får vi da

$$\begin{aligned} P(z) &= M(z)(z - a)^k + d_k (z - a)^k + c \\ &= M(a + \epsilon w)(\epsilon w)^k + d_k (\epsilon w)^k + c \\ &= -\frac{cM(a + \epsilon w)}{d_k} \epsilon^k - c\epsilon^k + c \\ &= c \left[1 - \epsilon^k - \epsilon^k \frac{M(a + \epsilon w)}{d_k} \right]. \end{aligned}$$

Altså er

$$|P(z)| = |c| \cdot \left| \left[1 - \epsilon^k - \epsilon^k \frac{M(a + \epsilon w)}{d_k} \right] \right| \leq |c| \cdot \left[(1 - \epsilon^k) + \epsilon^k \left| \frac{M(a + \epsilon w)}{d_k} \right| \right]$$

hvor det siste skrittet bruker trekantulikheten. Velger vi ϵ tilstrekkelig liten, kommer $a + \epsilon w$ så nær a at $|[M(a + \epsilon w)]/d_k|$ blir mindre enn $1/2$ (husk at $\lim_{z \rightarrow a} M(z) = 0$).

Dermed er

$$\begin{aligned} |P(z)| &\leq |c| \cdot \left[(1 - \epsilon^k) + \epsilon^k \left| \frac{M(a + \epsilon w)}{d_k} \right| \right] \\ &\leq |c| \cdot \left[(1 - \epsilon^k) + \frac{\epsilon^k}{2} \right] < |c| \cdot \left(1 - \frac{\epsilon^k}{2} \right) < |c|, \end{aligned}$$

og vi har fått ulikheten vi var på jakt etter. Setning 5.5.2 er bevist. ■

Med dette har alle brikkene falt på plass, og beviset for algebraens fundamentalteorem er fullført. Med tanke på hvilken nytte man kan ha av ekstremalverdisetningen og lignende abstrakte resultater, kan det være instruktivt å filosofere en smule over bruken av lemma 5.5.4 i beviset ovenfor. Mengden $\{|P(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$ er opplagt begrenset nedenfra, og man skulle kanskje tro at det er uvesentlig om det finnes eller ikke finnes et minimumspunkt der infimumsverdien er oppnådd. Beviset ovenfor forteller oss noe annet – eksistensen av minimumspunktet a er akkurat det faste holdepunktet vi trenger for å komme i gang med argumentet vårt. Uten a har vi rett og slett ikke noe sted å starte regningene som fører frem til motsigelsen. Og det hjelper faktisk ikke å være smartere enn vi har vært; algebraens fundamentalteorem er ikke sant dersom vi istedenfor *alle* de komplekse tall bare arbeider med dem som har rasjonale real- og imaginærdeler. Den eneste delen av beviset ovenfor som ikke kan gjennomføres (med litt modifikasjoner) i det rasjonale tilfellet, er lemma 5.5.4. Igjen er det kompletthetsprinsippet som ligger bak – også algebraens fundamentalteorem bygger på komplettheten av de reelle tallene.

5.6 Historisk epistel: Funksjonsbegrepets utvikling

Alle vet hva en kurve er inntil de har studert nok matematikk til å bli forvirret av den utallige mengden av mulige moteksempler.

— *Felix Klein (1849–1925),
Elementarmathematik
vom höheren Standpunkte aus.*

Samspillet mellom algebra og geometri går langt tilbake i matematikkhistorien. Det vi oppfatter som en annengradslikning

$$x^2 - bx - ac = 0,$$

oppfattet grekerne som en geometrioppgave: Finn det linjestykket x slik at arealet til kvadratet med side x er lik det samlede arealet av rektanglet med sider b og x og rektanglet med sider a og c . Denne geometriske koblingen holdt seg helt til 1500-tallet, og en matematiker som Gerolamo Cardano (1501–1576) (se seksjon 3.6 hvis du har glemt ham) tenkte eksplisitt på tredjepotenser som volumer, annenpotenser som arealer og førstepotenser som linjestykker. Av denne grunn la han relativt liten vekt på fjerdegradsligninger i *Ars Magna*. Visst var Ferraris (se seksjon 3.6) løsning en briljant prestasjon, men den var egentlig meningsløs siden fjerdepotenser ikke hadde geometrisk mening – «naturen tillater det ikke», skrev Cardano. (Se Onstad [9] for en god drøfting av geometrisk algebra.)



Figur 5.6.1. René Descartes

I 1637 tok samspillet mellom algebra og geometri en ny vending. Tidlig dette året sendte vår gamle kjenning Pierre de Fermat (1601–1665) et manuskript med tittel *Ad locos planos et solidos isagoge* til sine korrespondenter i Paris, og senere samme år utkom René Descartes' (1595–1650) *La Géométrie* som et tillegg til hans filosofiske hovedverk *Discours de la méthode*. Disse to arbeidene markerer begynnelsen på den *analytiske geometrien* der koordinatsystemer blir brukt til å definere og studere geometriske objekter ved algebraiske metoder.

Mens Fermat var en fredsommelig familiefar fra provinsen, var Descartes en stridbar verdensmann med ambisjoner. Han var født i La Haye (som nå kalles La Haye-Descartes) litt sør for Tours midt i Frankrike. Han fikk en fremragende utdannelse i en jesuitterskole og studerte senere i Poitiers. I flere år reiste han rundt i Europa, dels som privatperson og dels som frivillig i forskjellige arméer, inntil han i 1628 trakk seg tilbake til Nederland for å skrive og studere. Vandreårene hadde bragt ham i forbindelse med lærde over store deler av Europa, og gjennom sin korrespondanse med dem skaffet han seg fort ry som en av tidens skarpeste tenkere.

Descartes var mer filosof enn matematiker, men han hadde tidlig fattet interesse for matematikkens deduktive metode, og et av hans mål var å overføre dette tankesettet til andre kunnskapsområder. Han forsøkte å bygge opp sin filosofi fra det umiddelbart fattbare («jeg tenker, altså er jeg») ved hjelp av strengt logiske resonnementer. *La Géométrie* var tenkt som en anskueliggjørelse av denne metoden – her skulle geometrien tilbakeføres til algebraen.

Publikasjonen av *Discours de la méthode* gjorde Descartes berømt. Den var et innlegg i den voldsomme intellektuelle kampen mellom den katolske kirken og den nye vitenskapen, og selv om *Discours* på ingen måte er et ateistisk verk (et av Descartes' mål var å bevise Guds eksistens), var den kritisk til den kristne filosofiske tradisjonen som Descartes var vokst opp med. Descartes' metodesyn fikk stor innflytelse innenfor både filosofi og naturvitenskap, og hans bidrag til fysikken ble en inspirasjonskilde for Newtons mekanikk noen tiår senere.

Et tegn på Descartes' internasjonale berømmelse var at han i 1649 ble kalt til Stockholm som rådgiver og samtalepartner for dronning Christina av Sverige (1626–1689). På denne tiden var Sverige en politisk stormakt – landet hadde spilt en avgjørende rolle i trettiårskrigen og dominerte nå området rundt Østersjøen. Christinas ambisjon var at Sverige også skulle bli en kulturell stormakt, og Descartes var bare en av de mange kunstnere og intellektuelle som hun kalte til seg fra Frankrike. Men samarbeidet skulle bli av kort varighet – Descartes' helse tålte ikke kulden og fuktigheten i Stockholm, og han døde allerede den første vinteren. Fire år senere abdiserte Christina. Hun konverterte til katolisismen, og levde resten av livet i Roma omgitt av et hoff av kunstnere og lærde av vekslende kvalitet. Hun kunne aldri helt trekke seg ut av politikken, og hadde stadig en finger med i pavens politiske spill.

Fermats og Descartes ideer revolusjonerte studiet av kurver. Mens man tidligere bare kunne konstruere nye kurver gjennom møysommelige, geometriske konstruksjoner, var det nå nok å skrive ned en ny ligning. Fermat utviklet også en rudimentær differensialregning som gjorde det mulig å finne toppunkter og tangenter til enkle kurver. Da differensial- og integralregningen utviklet seg videre utover på 1600-tallet, var det fortsatt studiet av kurver og ligninger som sto i fokus, men etter hvert endret synsvinkelen seg, og midt på 1700-tallet er det funksjonene som har blitt hovedsaken. Funksjonsbegrepet var imidlertid ganske forskjellig fra vårt. I Eulers lærebok *Introductio in analysin infinitorum* fra 1748 finner vi denne definisjonen:

«En funksjon av en variabel størrelse er et analytisk uttrykk som på en eller annen måte er sammensatt av denne variable størrelsen og av tall eller konstante størrelser.»

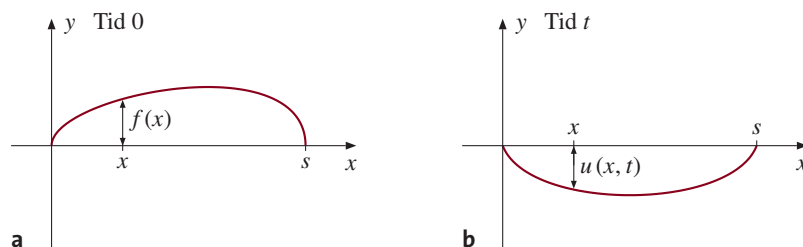
Selv om det ikke er opplagt hva Euler ville godta som et «analytisk uttrykk», er det klart at han tenker på formler av ulike typer. Fra resten av boken fremgår det at slike uttrykk godt kan inneholde uendelig mange operasjoner (Euler var en mester til å

manipulere uendelige summer og produkter), og at det godt kan høre flere y -verdier til samme x -verdi (Euler ville ha betraktet uttrykket $y^2 = x^2 + 1$ som en funksjon med to verdier $y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$). Det som Euler *ikke* ville ha tillatt på denne tiden, er det som i skolematematikken kalles delt forskrift – altså funksjoner av typen

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for } x \geq 0 \\ x & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

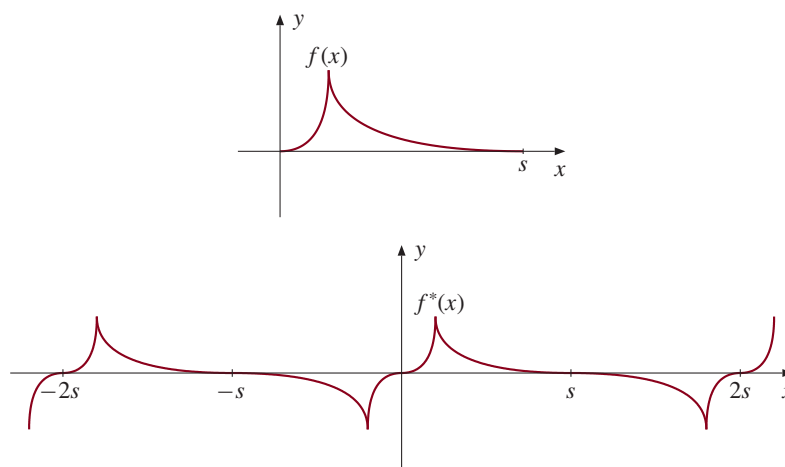
som er definert av forskjellige formler i ulike områder. For Euler og hans samtidige var en funksjon i praksis det samme som en formel, og en definisjon sammensatt av flere formeluttrykk stred etter deres mening mot den allmenngyldigheten som et funksjonsuttrykk skulle ha. Dette kan virke uvant for oss i dag, men mange av de metodene som datidens matematikere benyttet seg av, forutsetter faktisk at funksjonene er ganske regulære.

Senere i sin karriere var Euler villig til å godta funksjoner med delt forskrift. Han kalte dem *diskontinuerlige* funksjoner for å skille dem fra de *kontinuerlige* funksjonene som bare var definert av én formel. Selv om denne språkbruken er forløperen for dagens terminologi, har den et helt annet innhold – en funksjon med delt forskrift kan godt være kontinuerlig i vår betydning av ordet, mens en funksjon som er definert av én formel, godt kan være diskontinuerlig.



Figur 5.6.2.

La oss se nærmere på en av grunnene til at Euler skiftet mening. I 1747 publiserte Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783) en artikkel om bevegelsen til en svingende streng (tenk på en gitarstreng). Dette problemet hadde vært studert tidligere av blant annet den engelske matematikeren Brook Taylor (1685–1731), men d'Alembert var den første som fant en generell beskrivelse av strengens bevegelse. Vi skal se nærmere på denne beskrivelsen.



Figur 5.6.3.

Anta at strengen har lengde s og at begge endepunktene holdes fast. Anta videre at vi ved tid 0 holder strengen i ro slik at utslaget ved punktet x er $f(x)$ (se figur 5.6.2a). Vi slipper så strengen og ønsker å finne utslaget $u(x, t)$ i punktet x ved tiden t (figur 5.6.2b). d'Alemberts løsning er nå lett å forklare. Vi utvider først f til en funksjon f^* ved å «speile» den som vist på figur 5.6.3 (vi skal kalle dette en *odde* utvidelse av f). Deretter setter vi

$$u(x, t) = \frac{f^*(x + ct) + f^*(x - ct)}{2}$$

der c er en konstant som beskriver de fysiske egenskapene til strengen, og som inngår i den ligningen som beskriver bevegelsen.

Fra vårt synspunkt kan ikke løsningen bli stort enklere, men for Euler og d'Alembert innebar den et alvorlig problem. Selv om den opprinnelige kurven $f(x)$ kan beskrives ved hjelp av en formel (og dermed er en funksjon i Eulers opprinnelige betydning), så er det nemlig ikke sikkert at den utvidede kurven f^* har en slik beskrivelse. Lar vi for eksempel $f(x) = x(s - x)$, kan vi ikke velge $f^*(x)$ lik $x(s - x)$ for da er ikke f^* en odde utvidelse av f .

Siden d'Alembert holdt seg strengt til Eulers opprinnelige funksjonsdefinisjon, medførte dette at han bare kunne løse problemet for de begynnelsesfunksjonene f som har en odde utvidelse f^* gitt av den samme formelen. I en artikkel fra 1749 påpeker Euler at dersom man tillater funksjoner med delt forskrift, så er ikke dette noe problem – enhver funksjon f har en odde utvidelse f^* definert ved en delt forskrift. Etter Eulers mening var derfor d'Alemberts løsning atskillig mer generell enn det opphavsmannen trodde. d'Alembert var ikke overbevist, og i en ny artikkel fra 1750 kritiserer han Eulers utvidelse. Etter hans mening lå de nye funksjonene utenfor analysens domene, og aksepterte man dem, ville man fort støtte på selvmotsigelser. I sine senere lærebøker forsøkte Euler å vise at analysens læresetninger også gjelder for de nye «diskontinuerlige» funksjonene.

I 1753 tok historien en ny vending. Dette året publiserte Daniel Bernoulli (1700–1782) en løsning av svingeproblemet som var helt forskjellig fra d'Alemberts. Ifølge

Bernoulli kan løsningene skrives som (muligens uendelige) summer

$$u(x, t) = a_1 \sin \frac{\pi x}{s} \cos \frac{\pi ct}{s} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{s} \cos \frac{2\pi ct}{s} \\ + a_3 \sin \frac{3\pi x}{s} \cos \frac{3\pi ct}{s} + a_4 \sin \frac{4\pi x}{s} \cos \frac{4\pi ct}{s} + \dots$$

der a_1, a_2, a_3, \dots er konstanter. Fysikalsk sett er Bernoullis løsning svært viktig fordi hvert av leddene har umiddelbar tolkning: Når vi setter en streng i bevegelse, dannes det lyd. Denne lyden består av en grunntone og forskjellige overtoner. I Bernoullis løsning beskriver det første leddet $a_1 \sin(\pi x/s) \cdot \cos(\pi ct/s)$ grunntonen, mens de øvrige leddene – $a_2 \sin(2\pi x/s) \cdot \cos(2\pi ct/s)$, $a_3 \sin(3\pi x/s) \cdot \cos(3\pi ct/s)$ osv. – beskriver overtonene. Denne oppspaltingen av bevegelsen i ulike frekvenser er det umulig å lese ut av d'Alemberts løsning.

Men også Bernoullis løsning brakte med seg nye problemer. Setter vi $t = 0$ i formelen for $u(x, t)$, får vi

$$u(x, 0) = a_1 \sin \frac{\pi x}{s} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{s} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{s} + a_4 \sin \frac{4\pi x}{s} + \dots$$

Siden $u(x, 0)$ må være lik det gitte begynnelsesutslaget $f(x)$, må vi altså velge konstantene a_1, a_2, a_3, \dots slik at

$$f(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{s} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{s} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{s} + a_4 \sin \frac{4\pi x}{s} + \dots$$

Bernoulli påstod at det alltid var mulig å finne slike konstanter a_1, a_2, a_3, \dots , men hverken han eller andre hadde et bevis. Enda mer alvorlig var det at man ikke hadde den minste idé om hvordan man i praksis skulle regne ut a_1, a_2, \dots . Euler konkluderte med at til tross for sin fysikalske betydning, måtte Bernoullis løsning regnes som mindre generell enn hans egen tolkning av d'Alemberts løsning.

Slik var situasjonen i over 50 år inntil Joseph Fourier (1768–1830) i 1807 innleverte en avhandling om varmeledning til det franske vitenskapsakademiet. Fouriers utgangspunkt var spørsmålet om hvordan varme brer seg i faste stoffer. Varmer du opp en metallstang i den ene enden, vil varmen etter hvert bre seg til hele stangen, men hvor fort vil dette skje, og hvor store temperaturforskjeller vil det være langs stangen? Fouriers mål var å besvare alle slike spørsmål ved å finne et uttrykk $u(x, t)$ for temperaturen i punktet x ved tiden t .

Selv om hans fysikalske utgangspunkt var et helt annet enn Bernoullis, oppdaget også Fourier at han kunne løse problemet ved å skrive generelle funksjoner som uendelige summer av sinus'er og cosinus'er. Men Fourier greide også det Bernoulli og Euler ikke hadde greid, nemlig å finne de tallene a_1, a_2, a_3, \dots som skal til for at summen

$$a_1 \sin \frac{\pi x}{s} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{s} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{s} + a_4 \sin \frac{4\pi x}{s} + \dots$$

skal bli lik en gitt funksjon $f(x)$.

Dessverre klarte ikke Fourier å bevise at metoden hans fungerte, og ledende franske matematikere som Lagrange og Laplace var skeptiske. Fouriers ideer ble derfor først publisert i 1822 i hans hovedverk *Theorie analytique de la chaleur*. Da teknikkene først var publisert, fikk de raskt stor utbredelse, og i dag er Fourier-rekker og Fourier-transformasjoner hovedverktøy både i ren og anvendt matematikk.

Den første som ga et matematisk bevis for at Fouriers metode fungerer, var den tyske matematikeren Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859). For å gjennomføre beviset måtte han presisere funksjonsbegrepet – han måtte bort fra den gamle oppfatningen om at en funksjon først og fremst er en formel, og erstatte den med tanken på en regel eller forskrift som til hver x tilordner nøyaktig en y . Som et eksempel på en slik funksjon angir han

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{hvis } x \text{ er rasjonal} \\ b & \text{hvis } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$$

der a og b er to konstanter. Dirichlet benytter seg også av det moderne kontinuitetsbegrepet som han kjente fra Cauchys forelesninger i Paris. Hans bevis for Fouriers metode gjelder for alle f som har et endelig antall sprang, og som er stykkevis monotone og begrensede. Ved å bevise teoremet for en spesifisert klasse funksjoner, innførte Dirichlet en ny tradisjon – tidligere matematikere hadde alltid vært på jakt etter sammenhenger som gjaldt for *alle* funksjoner, men en slik strategi viser seg å være lite fruktbar fordi både funksjonsbegrepet og dets anvendelser er så mangfoldig.

En av svakhetene ved Eulers opprinnelig definisjon av begrepet funksjon er at han aldri presiserer hva han mener med et «analytisk uttrykk». En tilsvarende kritikk kan rettes mot Dirichlets definisjon – det er ikke klart hva vi mener med en «regel» eller en «tilordning». I moderne matematikk bruker man derfor gjerne en enda mer abstrakt definisjon av funksjoner. Ifølge denne definisjonen er en funksjon $f : A \rightarrow B$ en mengde ordnede par (x, y) der $x \in A$, $y \in B$, og der hver $x \in A$ hører med til nøyaktig ett par. For å finne ut hva $f(x)$ er, leter vi frem det entydig bestemte paret (x, y) med x som førstekomponent, og setter $f(x) = y$. Man kan selvfølgelig innvende at denne definisjonen forutsetter at man vet hva en mengde er, men mengdebegrepet er selve grunnlaget for den systematiske oppbygningen av moderne matematikk.

Selv om de var interessert i mange av de samme ideene, var Fourier og Dirichlet vidt forskjellige av legning. På hver sin måte representerer de den økende spesialiseringen av naturvitenskapen i forrige århundre. Helt opp til Gauss (1777–1855) og Cauchy (1789–1857) arbeidet vitenskapsmenn med rene og anvendte problemer om hverandre. De fleste store matematikere ga viktige bidrag til fysikken, og mange matematiske nyvinninger ble først oppdaget i en fysikalsk sammenheng. På 1800-tallet vokste kunnskapsmengden så mye at de færreste maktet å følge med på mer enn et felt. I tillegg vokste kravene til bevisførsel i matematikken slik at det kunne gå lang tid fra en metode ble oppdaget til man fikk bevist at den virkelig fungerte. Tidens forskere hadde ulike oppfatninger om denne utviklingen – de mer praktisk anlagte var utålmodige med å komme videre og var tilfredse med å bruke en metode som fungerte i praksis selv om den ikke var stringent bevist, mens de mer teoretiske var opptatt av å studere metodenes holdbarhet og gyldighetsområde. Ennå idag blusser det av og til opp en diskusjon om disse spørsmålene, men stort sett har man funnet frem til en fornuftig arbeidsdeling; innenfor matematikken selv skal alle resultater bevises fullstendig, men når matematikken brukes på andre fagområder, må det være lov å bruke en metode selv om ikke alle forutsetninger er oppfylt eller alle beregninger kan begrunnes fullt ut. Det kan ikke være fysikerens og økonomers oppgave å bruke år av sitt liv på å finpusse de matematiske detaljene i en teori når det som regel er langt større usikkerhet knyttet til den fysikalske eller økonomiske modellen de startet med.

Som få andre matematikere hadde Fourier begge beina plantet i det praktiske liv. Han var født i Auxerre i Frankrike i 1768 som tolvte barn i en skredderfamilie. I

tiårsalderen ble han foreldreløs, men hans begavelse hadde allerede vist seg og han fikk gratisplass ved en skole drevet av Benediktinerordenen. Han ville bli artillerist, men fikk vite at denne karrieren var forbeholdt adelige – det fikk ikke hjelpe om han var en «Newton nummer to». Denne opplevelsen styrket ikke Fouriers tiltro til den eksisterende samfunnsorden, og han sluttet seg helhjertet til den franske revolusjon i 1789. Etter hvert som revolusjonen utviklet seg til en innbyrdes kamp mellom ulike fraksjoner, ble Fourier vekselvis arrestert og løslatt. Flere ganger sto han i fare for å bli henrettet, og en gang skal han bare ha blitt reddet av Robespierres fall. I stedet for å miste hodet fikk Fourier stilling ved den nye eliteskolen Ecole Normale der han fikk flere av tidens ledende matematikere som kolleger.

I 1798 deltok Fourier i Napoleons felttog til Egypt. Hans hovedinnsats var å organisere arbeidet med en beskrivelse av Egypts geografi og historie, og han skrev selv en innledning som ennå regnes som et gjennombrudd i egyptologien. Senere ble han ivrig støttespiller i Jean François Champollions (1790–1832) arbeid med å tyde hieroglyfene. I Egypt hadde Fourier flere administrative poster, og ved tilbakekomsten til Frankrike gjorde Napoleon ham til prefekt i området rundt Grenoble. Fourier var utvilsomt en dyktig administrator, og da Napoleon falt i 1814 og makten gikk tilbake til Bourbonfamilien, lot kong Ludvig XVIII ham beholde posten.

I 1815 vendte Napoleon tilbake fra det lille keiserdømmet han hadde fått beholde på Elba, og marsjerte mot Paris med en styrke på 1100 mann. Uten at et skudd ble løst, deserterte kongens soldater og gikk over til keiseren, og Napoleons styrke vokste gradvis mens han nærmet seg Paris. Grenoble var den første store byen han kom til på sin ferd. Fourier gjorde sitt beste for å organisere væpnet motstand, men alt var nytteløst, og sammen med sine medarbeidere forlot han byen i det øyeblikket Napoleon red inn gjennom hovedporten. Keiserens triumferd må ha gjort inntrykk på Fourier – fem dager senere byttet han side, ble adlet og utnevnt til prefekt i Rhine-området. Men Napoleons nye styre skulle bare vare i hundre dager, og da Ludvig XVIII vendte tilbake etter slaget ved Waterloo, var det slutt på Fouriers administrative karriere.

Han ble nektet den pensjonen han normalt ville ha fått, og det så mørkt ut inntil en av hans tidligere elever skaffet ham stilling som direktør ved det statistiske kontoret for Seinedalen. Også på dette området gjorde Fourier et praktisk reformarbeid som fortsatt huskes. I 1816 ble han innvalgt i vitenskapsakademiet i Paris, men kongen nektet å godkjenne utnevnelsen. Året etter gikk imidlertid utnevnelsen igjennom, og i 1822 ble Fourier valgt til akademiets permanente sekretær. Samme år ble avhandlingen om varmeledning publisert, og Fourier var endelig akseptert som en av tidens fremste vitenskapsmenn.

Fourier var mest opptatt av de praktiske anvendelsene av sine resultater. At de ikke var fullstendig bevist, brydde han seg lite om, men det ergret ham at andre kviet seg for å bruke teknikker som virket så utmerket i praksis. På slutten av sitt liv uttalte han seg negativt om matematikere som Abel og Jacobi som arbeidet med teoretiske problemer fremfor å vie seg til de praktiske konsekvensene av varmeledningsteorien. Fourier døde i Paris i 1830.

Fouriers matematiske teknikker fant raskt praktiske anvendelser på andre felt enn varmeledning. Langt mer overraskende var de teoretiske konsekvensene de skulle få i arbeidene til Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

Dirichlets familie stammet fra Belgia, men han ble født i Düren i Tyskland der faren var postmester. Sytten år gammel dro han til Paris for å studere. På denne tiden var Paris verdens matematiske midtpunkt, men større innflytelse enn noen av Paris-

matematikerne fikk likevel Gauss gjennom sitt tallteoretiske mesterverk *Disquisitiones arithmeticae*. Dirichlet hadde alltid denne boken liggende åpen på skrivebordet, og han ble den første til virkelig å forstå og videreføre Gauss' ideer.

Dirichlets største prestasjon var å bruke Fouriers teknikker til å løse et vanskelig problem i tallteorien. Gjennom numeriske studier var Adrien-Marie Legendre (1752–1833) kommet til at alle følger av typen

$$\{an + b\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

der a og b er naturlige tall uten felles faktorer, inneholdt uendelig mange primtall. Hverken han eller hans etterfølgere hadde imidlertid noen idé om hvordan dette skulle bevises. Dirichlets løsning var revolusjonerende; han innså at ved å bruke Fourier-analyse kunne han generalisere et bevis som Euler hadde gitt for eksistensen av uendelig mange primtall, til også å dekke Legendres problem. Beviset var langt og innviklet, men de nye teknikkene åpnet en ny tidsalder i tallteorien.

Siden han var interessert i å bruke Fouriers teknikker til å løse problemer i ren matematikk, måtte Dirichlet sørge for at alle resultatene han brukte, var fullstendig bevist. Det var dette opprydningsarbeidet som ledet ham til en dypere forståelse av funksjonsbegrepet.

Fra 1831 til 1855 underviste Dirichlet ved Universitetet i Berlin. Han giftet seg inn i en innflytelsesrik jødisk familie – hans kone Rebecca var barnebarn av den betydningsfulle filosofen Moses Mendelssohn (1729–1786) og søster av komponisten Felix Mendelssohn-Bartholdy (1809–1847). Peters og Rebeccas hjem ble et møtested for kunstnere og intellektuelle, men det forekom at Dirichlet unnslopp selskapelighetene sammen med sin venn og kollega Carl Gustav Jacobi (1804–1851). De trakk seg tilbake til de indre gemakker der de underholdt hverandre med å stirre taust ut i luften mens de grublet på hvert sitt matematiske problem.

Da Gauss døde i 1855, ble Dirichlet kalt til Göttingen som hans etterfølger, men han fikk bare noen få år i den nye stillingen. På en reise i Sveits i 1859 fikk han hjerte-problemer og døde kort tid etter. Dirichlets matematiske produksjon er forholdsvis liten, men alt han gjorde hadde en dybde og klarhet som har gitt det en varig betydning i den videre utviklingen.

Ønsker du å vite mer om funksjonsbegrepets utvikling, bør du lese Lützens artikkel [7] og (hvis du er mer ambisiøs) bøkene til Edwards [2] og Grattan-Guinness [3]. Du finner også mange opplysninger i generelle matematikkhistorier som Katz [5] og Boyer og Merzbach [1]. Stillwell [11] har et morsomt kapittel om analytisk geometri med flere biografiske opplysninger om Descartes, og en del av originallitteraturen om den svingende strengen finner du hos Struik [12]. Det finnes mange gode bøker om Fourier-analyse, men de krever alle litt flere forkunnskaper enn det du får gjennom denne boken. Körners bok [6] er både blant de beste og blant dem som krever minst forkunnskaper. Herivels biografi av Fourier [4] er full av detaljopplysninger – så full at til tider får den et utrolig spennende liv til å virke ganske tørt og kjedelig.

I seksjon 6.6 skal vi se nærmere på fremveksten av teorien for kontinuerlige funksjoner og spesielt på historien til skjæringssetningen og ekstremalverdisetningen. Ønsker du å vite mer allerede nå, kan du kikke på Mejlbos artikkel [8]. Det finnes mange bøker som tar teorien for kontinuerlige funksjoner videre fra det vi har presentert her – Rudins bok [10] er en av de mest brukte.

Litteratur

- [1] Boyer, C.B. og U. Merzbach: *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1989.
- [2] Edwards, C.H.: *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [3] Grattan-Guinness, Ivor: *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT-Press, Cambridge, Mass., 1970.
- [4] Herivel, John: *Joseph Fourier. The Man and the Physicist*, Oxford, 1975.
- [5] Katz, Victor J.: *A History of Mathematics*, HarperCollins, New York, 1993.
- [6] Körner, T.W.: *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [7] Lützen, Jesper: «Funktionbegrepets utvikling fra Euler til Dirichlet», *NORMAT* 25 (1978), 5–32.
- [8] Mejlbo, Lars C.: «Nogle fundamentale sætninger om reelle tal og deres historie», *NORMAT* 25 (1978), 57–69.
- [9] Onstad, Torgeir: *Likningenes historie. Fra Babel til Abel*, NKS-Forlaget, Oslo, 1991.
- [10] Rudin, Walter: *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition, McGraw Hill, New York, 1976.
- [11] Stillwell, John: *Mathematics and its History*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [12] Struik, Dirk J.: *A Source Book in Mathematics 1200–1800*, Princeton University Press, Princeton, 1986.

6 Deriverbare funksjoner

Jeg snur meg med frykt og avsky
bort fra denne beklagelige farsotten
av funksjoner som ikke har noen
derivert.

— *Charles Hermite (1822–1901),
Brev
til T.J. Stieltjes*

I det forrige kapitlet snakket vi en del om ikke-deriverbare, kontinuertlige funksjoner og hvor forskjellige de kan være fra de deriverbare funksjonene vi er vant til. Siden de fleste funksjonene vi skal møte i denne boken, faktisk er deriverbare, er det nå på tide å se nærmere på derivasjonsbegrepet og dets konsekvenser.

Det viktigste resultatet i dette kapitlet er middelverdisetningen i seksjon 6.2. Denne setningen kommer til å bli et av våre viktigste teoriredskap i resten av boken. Et annet sentralt resultat er L'Hôpitals regel i seksjon 6.3 – den gir oss en uhyre effektiv metode til å regne ut vanskelige grenseverdier. I slutten av kapitlet skal vi også se litt mer på kurvedrøfting og asymptoter, men dette blir stort sett utdypning og videreføring av ting du allerede kan.

6.1 Derivasjon

I denne innledende seksjonen skal vi ta for oss de grunnleggende regnereglene for deriverbare funksjoner. Det aller meste av dette stoffet vil være kjent fra før, og vi skal ikke bruke mye tid på det. La oss allikevel starte med begynnelsen – med definisjonen av derivasjon.

6.1.1 Definisjon

Anta at f er definert i en omegn om punktet a (det vil si at det finnes et intervall $(a - c, a + c)$ slik at $f(x)$ er definert for alle x i dette intervallet). Dersom grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

eksisterer, sier vi at f er *deriverbar* i a . Vi skriver

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

og kaller denne størrelsen for *den deriverte til f i punktet a* .

Bemerkning

Det er også andre måter å skrive denne definisjonen på. To vanlige varianter er

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

og

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Legg merke til at begge disse uttrykkene er enkle omskrivninger av den definisjonen vi har valgt; vi erstatter rett og slett x med henholdsvis $a + \Delta x$ og $a + h$. De forskjellige skrivemåtene egner seg til litt ulike formål, og vi skal veksle mellom dem etter behov.

Også for den deriverte selv er det flere skrivemåter, og vi skal stundom skrive

$$\frac{df}{dx}(x) \quad \text{eller} \quad D[f(x)]$$

istedenfor $f'(x)$. Disse skrivemåtene er spesielt nyttige når vi ønsker å derivere store og uoversiktlige uttrykk. Skriver vi

$$\{e^{-3x}[\cos 2x + x^{-3} \ln(x^2 + 1)]\}'$$

er det lett å overse den lille apostrofen til slutt, mens

$$D\{e^{-3x}[\cos 2x + x^{-3} \ln(x^2 + 1)]\}$$

eller

$$\frac{d}{dx}\{e^{-3x}[\cos 2x + x^{-3} \ln(x^2 + 1)]\}$$

ikke etterlater noen tvil om at vi ønsker å derivere uttrykket

$$e^{-3x}[\cos 2x + x^{-3} \ln(x^2 + 1)].$$

La oss ta med et eksempel på hvordan vi kan finne den deriverte direkte fra definisjonen:

6.1.2 Eksempel

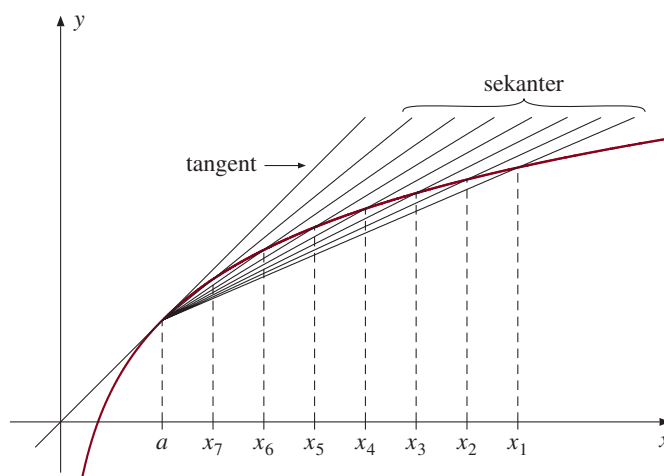
Vi ønsker å finne den deriverte til funksjonen $f(x) = x^3$ i punktet a . I dette tilfellet er det larest å bruke denne versjonen av definisjonen:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$$

Multipliserer vi ut telleren og forkorter, får vi

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2. \end{aligned}$$

Altså er $f'(a) = 3a^2$ i alle punkter a . Bytter vi navn på variabelen, kan vi skrive $f'(x) = 3x^2$. ■



Figur 6.1.1.

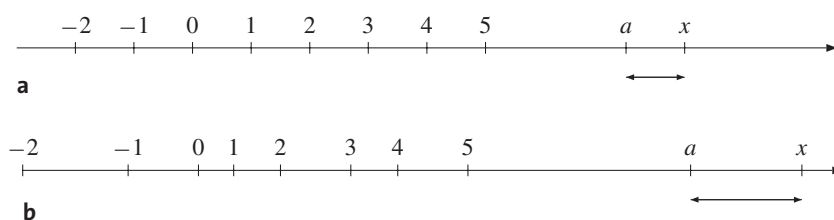
Det er to geometriske tolkninger av derivasjon som det ofte er lurt å tenke på. Den første tolkningen er at den deriverte $f'(a)$ er stigningstallet til tangenten til grafen $y = f(x)$ i punktet $(a, f(a))$. Figur 6.1.1 viser hva som skjer;

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

er stigningstallet til sekanten gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(x, f(x))$, og når x glir nærmere a , nærmer denne sekanten seg mer og mer tangenten i $(a, f(a))$. (En *sekanter* er et linjestykke som forbinder to punkter på en kurve – i dette tilfellet punktene $(a, f(a))$ og $(x, f(x))$.)

Den andre geometriske tolkningen er ikke så kjent, men også den er nyttig i mange situasjoner. La oss tenke oss at tallinjen på figur 6.1.2a er laget av strikk eller et annet

elastisk materiale. Dersom vi strekker med ujevn kraft langs tallinjen, vil strikken deformeres til den uregelmessige tallinjen i figur 6.1.2b. Anta at vi drar så mye at etter strekkingen er avstanden fra punktet x til origo lik $f(x)$. La oss nå ta to punkter a og x , og spørre hvor mye strikken har strukket seg mellom disse punktene. Siden den opprinnelige avstanden mellom punktene er $x - a$ og den nye avstanden er $f(x) - f(a)$, er strikken strukket med en faktor $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Lar vi x nærme seg a , går denne faktoren mot $f'(a)$. Den deriverte $f'(a)$ er altså den lokale strekningsfaktoren som forteller oss hvor mange ganger lengre en ørliten strikkbit nær punktet a har blitt etter strekkingen. Vi skal senere i seksjonen se at denne tolkningen av den deriverte gir oss en enkel forklaring på kjerneregelen.



Figur 6.1.2.

Regneregler for deriverte

De deriverte av de vanligste funksjonene er kjent fra skolematematikken, men for ordens skyld tar vi med en liste her:

6.1.3 Derivasjon av elementære funksjoner I disse reglene er a en konstant:

$$D[a] = 0$$

$$D[x^a] = ax^{a-1}$$

$$D[a^x] = a^x \ln a \quad (a > 0), \text{ spesielt er } D[e^x] = e^x$$

$$D[\ln |x|] = \frac{1}{x}$$

$$D[\sin x] = \cos x$$

$$D[\cos x] = -\sin x$$

$$D[\tan x] = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Et annet sett av velkjente formler forteller oss hvordan vi kan derivere kombinasjoner av funksjoner:

6.1.4 Derivasjonsregler Anta at funksjonene f og g er deriverbare i punktet a , og at c er en konstant. Da er også funksjonene cf , $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ og (forutsatt at $g(a) \neq 0$) f/g deriverbare i a . Deres deriverte er gitt ved:

$$(i) \quad (cf)'(a) = c \cdot f'(a)$$

$$(ii) \quad (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(iii) \quad (f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$$

$$(iv) \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

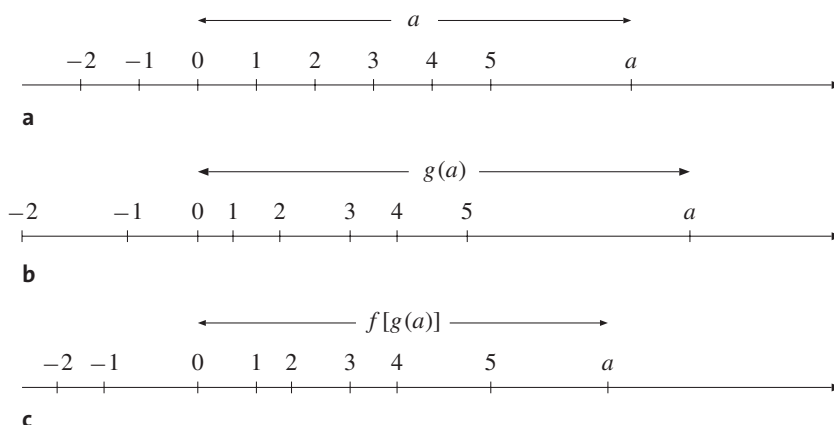
$$(v) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Men den aller viktigste derivasjonsregelen er kjerneregelen som forteller oss hvordan vi deriverer en sammensatt funksjon.

6.1.5 Kjerneregelen Anta at g er deriverbar i a og at f er deriverbar i $g(a)$. Da er den sammensatte funksjonen $h(x) = f[g(x)]$ deriverbar i a , og

$$h'(a) = f'[g(a)]g'(a).$$

Mange synes at kjerneregelen er litt underlig, men den er faktisk enkel å forstå ut fra den geometriske tolkningen av den deriverte som vi ga i forbindelse med figur 6.1.2: Vi tenker oss at vi strekker strikken to ganger; første gang slik at punktet x havner i posisjon $g(x)$, og andre gang slik at et punkt i posisjon u havner opp i $f(u)$. Det punktet som opprinnelig var i posisjon x , havner derfor først i posisjon $g(x)$ og deretter i posisjon $h(x) = f[g(x)]$ (se figur 6.1.3).



Figur 6.1.3.

Som vi så ovenfor, er $h'(a)$ den faktoren vi strekker strikken med i punktet a . Starter vi altså med en ørliten strikkbit med lengde Δx rundt a , vil den etter strekkingen ha lengde $h'(a)\Delta x$. I virkeligheten har vi strukket i to etapper. Etter den første strekkingen har strikkbiten vår fått lengde $\Delta u = g'(a)\Delta x$. I den andre strekkingen forlenges Δu med en faktor $f'(u) = f'(g(a))$, så den totale strekkingen blir $f'[g(a)]\Delta u = f'[g(a)]g'(a)\Delta x$. Sammenligner vi de to uttrykkene for strekkfaktoren, ser vi at $h'(a) = f'[g(a)]g'(a)$, akkurat som kjerneregelen sier. Dette argumentet er selvfølgelig ikke et matematisk bevis for kjerneregelen, men det forklarer på en overbevisende måte hvorfor regelen ser ut som den gjør. For dem som er interessert, har vi tatt med et formelt bevis for kjerneregelen mot slutten av seksjonen.

I denne boken forutsetter vi at leseren behersker derivasjon ved hjelp av reglene ovenfor, men vi tar allikevel med et typisk eksempel. Synes du dette eksemplet er vanskelig, bør du trene mer på derivasjon før du går videre.

6.1.6 Eksempel

Deriver $f(x) = x^3 \sin(\ln x)$.

Ifølge produktregelen 6.1.4(iv) er

$$f'(x) = D[x^3] \cdot \sin(\ln x) + x^3 \cdot D[\sin(\ln x)].$$

Vi vet at $D[x^3] = 3x^2$, men for å regne ut $D[\sin(\ln x)]$ må vi benytte kjerneregelen med $g(x) = \ln x$ og $f(x) = \sin x$ («vi bruker $g(x) = \ln x$ som kjerne»). Vi får

$$D[\sin(\ln x)] = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}.$$

Setter vi inn i uttrykket for $f'(x)$, blir svaret

$$f'(x) = 3x^2 \sin(\ln x) + x^2 \cos(\ln x).$$



Vi skal avslutte denne seksjonen med et par enkle observasjoner samt et bevis for kjerneregelen. Det første resultatet er egentlig bare en omskriving av definisjonen av den deriverte, men det er nyttig både i teori og praksis.

6.1.7 Setning

Anta at f er deriverbar i punktet a . Da finnes det en funksjon η slik at

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \eta(h)h$$

og $\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0$ og $\eta(0) = 0$.

Bevis: Definer en funksjon η ved:

$$\eta(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \quad (1)$$

for $h \neq 0$ og sett $\eta(0) = 0$. Siden $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$, så er $\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0$. Løser vi (1) med hensyn på $f(a+h)$, får vi

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \eta(h)h$$

og beviset er fullført. ■

Siden både h og $\eta(h)$ går mot null, forteller setningen oss at når h er liten, så er $f(a+h)$ svært nær $f(a) + f'(a)h$. Denne observasjonen er ofte nyttig når vi ønsker å gjøre et raskt overslag over hvordan ting endrer seg. Uttrykket $f'(a)h$ kalles forøvrig *differensialet* til f og skrives $df(a, h) = f'(a)h$.

6.1.8 Eksempel

En kuleformet ballong har radius r . Hvor mye øker volumet dersom radien får et lite tillegg h ?

Siden volumet til en kule med radius r er $V(r) = 4\pi r^3/3$, er det eksakte svaret selvfølgelig

$$V(r+h) - V(r) = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3. \quad (2)$$

Denne størrelsen er imidlertid ikke så lett å estimere i hodet, men ved å bruke teknikken ovenfor får vi en enklere tilnærming (symbolet \approx betyr tilnærmet lik):

$$V(r+h) - V(r) \approx V'(r)h = 4\pi r^2 h. \quad (3)$$

La oss sammenligne dette overslaget med den eksakte verdien. Regner vi ut høyresiden i (2), får vi

$$V(r+h) - V(r) = 4\pi r^2 h + 4\pi r h^2 + \frac{4\pi h^3}{3}.$$

Her er det første leddet den tilnærmede verdien i (3), mens de to andre leddene er mye mindre dersom h er liten i forhold til r (sett $r = 10$ og $h = 0.5$ og se hva du får). ■

La oss også se på noen teoretiske konsekvenser.

6.1.9 Setning

Dersom f er deriverbar i et punkt a , er den også kontinuert i a .

Bevis: Vi må vise at $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Ifølge setning 6.1.7 er

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(a) + f'(a)h + \eta(h)h] = f(a).$$

Dermed er setningen bevist. ■

Bemerkning

Vi kunne også ha vist denne setningen direkte fra definisjonen av deriverbarhet uten å

gå veien om setning 6.1.7: Dersom f er deriverbar i a , eksisterer grensen $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$,

og det er bare mulig dersom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Legg merke til at omvendingen av 6.1.9 *ikke* er sann – en funksjon kan godt være kontinuert i et punkt uten å være deriverbar der. Det enkleste eksemplet er funksjonen $f(x) = |x|$ som er kontinuert, men ikke deriverbar i 0. Som vi nevnte i forrige kapittel, finnes det faktisk funksjoner som er kontinuerte overalt, men ikke deriverbare i ett eneste punkt!

Vi lovet å ta med et bevis for kjerneregelen.

Bevis for kjerneregelen: Vi skal vise at den deriverte til den sammensatte funksjonen $h(x) = f[g(x)]$ er gitt ved

$$h'(a) = f'[g(a)]g'(a).$$

Per definisjon er

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f[g(x)] - f[g(a)]}{x - a}.$$

Lar vi $k = g(x) - g(a)$, så er $g(x) = g(a) + k$, og setning 6.1.7 forteller oss at

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= f[g(a) + k] = f[g(a)] + f'[g(a)]k + \eta(k)k \\ &= f[g(a)] + [f'[g(a)] + \eta(k)][g(x) - g(a)] \end{aligned}$$

hvor $\eta(k) \rightarrow 0$ når $x \rightarrow a$ (hvorfor?). Setter vi dette inn i uttrykket for $h'(a)$, får vi

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f[g(x)] - f[g(a)]}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{[f'[g(a)] + \eta(k)][g(x) - g(a)]}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [f'[g(a)] + \eta(k)] \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

I dette produktet går den første faktoren mot $f'[g(a)]$, mens den andre faktoren går mot $g'(a)$. Dermed er

$$h'(a) = f'[g(a)]g'(a)$$

og beviset er ferdig. ■

Logaritmisk derivasjon

Helt til slutt i denne seksjonen skal vi si noen få ord om en regneteknikk som kalles *logaritmisk derivasjon*. Den bygger på følgende enkle observasjon.

6.1.10 Setning

Hvis f er deriverbar og forskjellig fra 0 i punktet x , så er

$$f'(x) = f(x) \cdot D[\ln |f(x)|].$$

Bevis: Bruker vi kjerneregelen til å derivere $\ln |f(x)|$, får vi

$$D[\ln |f(x)|] = \frac{1}{f(x)} f'(x).$$

Multipliserer vi med $f(x)$ på begge sider, får vi formelen vi ønsker. ■

Setningen sier altså at vi kan derivere $f(x)$ ved først å derivere $\ln |f(x)|$ og så gange svaret med $f(x)$. Dette virker som en temmelig absurd fremgangsmåte, men dersom $f(x)$ inneholder mange produkter og potenser, viser den seg å være meget tidsbesparende. Grunnen er at vi kan bruke regnereglene for logaritmer til å forenkle uttrykket før vi deriverer. Her er et eksempel.

6.1.11 Eksempel

Deriver

$$f(x) = |\cos^{18} x \cdot e^{\tan x} \cdot (x^{16} + 3x^{12})|^{\cos x}.$$

Bruker vi regnereglene for logaritmer, ser vi at

$$\ln [|\cos^{18} x \cdot e^{\tan x} \cdot (x^{16} + 3x^{12})|^{\cos x}] = \cos x [18 \ln |\cos x| + \tan x + \ln(x^{16} + 3x^{12})].$$

Deriverer vi dette uttrykket med produktregelen, får vi

$$\begin{aligned} D[\ln |f(x)|] &= -\sin x [18 \ln |\cos x| + \tan x + \ln(x^{16} + 3x^{12})] \\ &\quad + \cos x \left[-18 \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{16x^{15} + 36x^{11}}{x^{16} + 3x^{12}} \right] \end{aligned}$$

som kan trekkes sammen og forenkles til

$$\begin{aligned} D[\ln |f(x)|] &= -18 \sin x (1 + \ln |\cos x|) + \cos x \\ &\quad - \sin x \cdot \ln(x^{16} + 3x^{12}) + 4 \cos x \cdot \frac{4x^4 + 9}{x^5 + 3x}. \end{aligned}$$

Tar vi nå dette uttrykket og multipliserer med $f(x)$, får vi $f'(x)$. Svaret er ikke vakkert, men de derivasjonene vi har utført underveis, er forbausende enkle. ■

Oppgaver i seksjon 6.1

1. Deriver funksjonene:

a) $f(x) = \cos x \sin x$

b) $f(x) = \frac{x}{\cos x} + e^x$

c) $f(x) = \frac{x \tan x + \sin x}{x^4}$

d) $f(x) = \ln x^2$

e) $f(x) = \cos(e^x)$

f) $f(x) = \tan(\cos x^2)$

g) $f(x) = x \cos(\ln x)$

h) $f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{x^2}$

i) $f(x) = \frac{x \ln(\sin x) + \tan x}{e^x}$

2. Anta at f , g og h er deriverbare funksjoner. Vis at

$$D[f\{g[h(x)]\}] = f'\{g[h(x)]\}g'[h(x)]h'(x).$$

3. Bruk logaritmisk derivasjon til å beregne de deriverte til disse funksjonene.

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x$

b) $f(x) = \sqrt[17]{\sin x} \cdot e^{x^2} \cdot \tan x$

c) $f(x) = x^x$

d) $f(x) = x^{2 \cos x} \cdot \ln x$

4. Anta at f og g er to deriverbare funksjoner og at f er positiv. Vis at

$$D[f(x)^{g(x)}] = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right].$$

5. Et sylinderformet sementrør er 2 m langt og har indre radius 0.5 m. Tykkelsen av sementen er 0.05 m. Bruk teknikken i eksempel 6.1.8 til å anslå volumet av sementen.

6. I en fartskontroll måler politiet tiden bilene bruker over en strekning på 500 m og beregner farten ved hjelp av formelen $v = s/t$. En bilist bruker 25 sekunder på strekningen, og politiet regner med at usikkerheten i tidsmålingen er 1 sekund. Bruk teknikken i eksempel 6.1.8 til å anslå usikkerheten i fartsmålingen.

7. Bevis de generelle derivasjonsreglene 6.1.4(i)–(iii).

8. Bevis de generelle derivasjonsreglene 6.1.4(iv)–(v).

9. Vis at $D[x^2] = 2x$ direkte fra definisjonen av derivert.

10. Vis at $D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ direkte fra definisjonen.
11. a) Sett $f(x) = |x - 1|$. Vis at $f'(1)$ ikke eksisterer.
b) Sett $g(x) = (x - 1)|x - 1|$. Vis at $g'(1)$ eksisterer.

12. La

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x < 0 \\ x^3 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Bruk definisjonen av den deriverte til å beregne $f'(0)$.

13. La

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{for } x > 0 \\ x^2 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Undersøk om f er deriverbar i 0.

14. La n være et naturlig tall. Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $D[x^n] = nx^{n-1}$. (Hint: skriv $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$ og bruk binomialformelen.)

15. Vis at $D[\sin x] = \cos x$ direkte fra definisjonen av den deriverte. (Hint: Bruk at $\sin(x + \Delta x) = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x$. Du kan benytte at $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ og at $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, se f.eks. oppgave 5.4.9.)

16. Vis at $D[\cos x] = -\sin x$ direkte fra definisjonen.

17. La n være et naturlig tall og anta at f og g er n ganger deriverbare. Vis at

$$D^{(n)}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{(n-k)}f(x)D^{(k)}g(x)$$

der $D^{(n)}h$ betegner den n -te deriverte til funksjonen h . Bruk formelen til å finne den fjerde-deriverte til $h(x) = e^x \sin x$.

18. (UiO) Anta at $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon med $f(0) = 0$. Vis at dersom f er deriverbar i 0, finnes det en kontinuerlig funksjon $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ slik at $f(x) = xg(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

6.2 Mittelverdisetningen

I denne seksjonen skal vi se på det viktigste resultatet i teorien for deriverbare funksjoner – middelverdisetningen. Til tross for sin betydning er ikke denne setningen vanskelig å utlede, og den har en geometrisk tolkning som gjør den lett å forstå.

Vi begynner med et hjelperesultat som de fleste sikkert kjenner fra før.

6.2.1 Setning

Anta at funksjonen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ har et maksimum eller et minimum i et indre punkt $c \in (a, b)$. Dersom f er deriverbar i c , må $f'(c) = 0$.

Bevis: Vi må vise at dersom $f'(c) \neq 0$, så kan ikke c være et ekstremalpunkt. La oss anta at $f'(c) > 0$ (tilfellet $f'(c) < 0$ kan behandles på samme måte). Siden

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

må $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$ for alle x tilstrekkelig nær c . Velger vi x litt større enn c , er nevneren $x - c$ positiv, og dermed må også telleren $f(x) - f(c)$ være positiv; det vil si $f(x) > f(c)$. Altså kan ikke c være et maksimumspunkt. Velger vi isteden x litt mindre enn c , vil brøken

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

fortsatt være positiv, mens nevneren $x - c$ nå er negativ. Da må også telleren $f(x) - f(c)$ være negativ, og følgelig er $f(x) < f(c)$. Altså kan ikke c være et minimumspunkt. ■

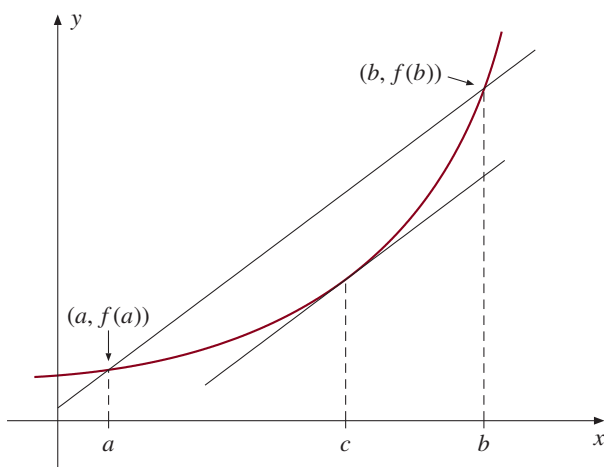
Det neste resultatet er et spesialtilfelle av middelverdisetningen.

6.2.2 Rolles teorem Anta at funksjonen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og at den er deriverbar i alle indre punkter $x \in (a, b)$. Anta videre at $f(a) = f(b)$. Da finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = 0$.

Bevis: Siden f er kontinuerlig, har den ifølge ekstremalverdisetningen 5.3.5 et maksimums- og et minimumspunkt i intervallet $[a, b]$. Siden $f(a) = f(b)$, må minst ett slikt punkt c ligge i det indre av intervallet (a, b) . Setning 6.2.1 forteller oss at $f'(c) = 0$. ■

6.2.3 Middelverdisetningen Anta at funksjonen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og at den er deriverbar i alle indre punkter $x \in (a, b)$. Da finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Figur 6.2.1.

Før vi går løs på beviset, kan det være lurt å se på den geometriske tolkningen av middelverdisetningen. Siden $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ er stigningstallet til sekanten gjennom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$, sier setningen at det finnes et punkt c mellom a og b der tangenten er parallell med denne sekanten (se figur 6.2.1). På grunn av denne geometriske tolkningen kalles middelverdisetningen også for *sekantsetningen*. Legg for øvrig merke til at dersom $f(a) = f(b)$, så sier middelverdisetningen det samme som Rolles teorem.

Bevis for middelverdisetningen: Den rette linjen gjennom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ har ligningen

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Den loddrette avstanden mellom grafen $y = f(x)$ og denne sekanten er derfor (se figur 6.2.2)

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

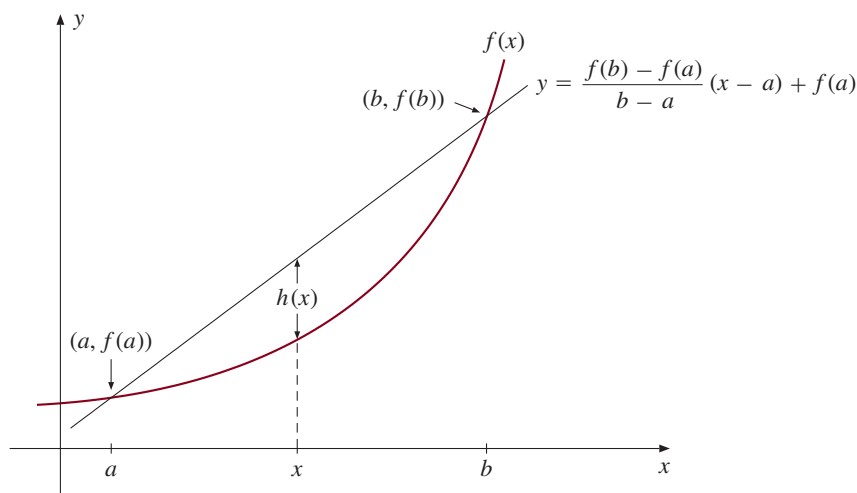
Legg merke til at

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Siden $h(a) = h(b) = 0$, tilfredsstiller h betingelsene i Rolles teorem, og det må derfor finnes en $c \in (a, b)$ slik at $h'(c) = 0$. Dermed er

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

som gir $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □



Figur 6.2.2.

Bemerkning

Legg merke til at hverken middelverdisetningen eller beviset forteller oss hvilket punkt c er. Den eneste opplysningen vi har om c , er at det ligger i intervallet (a, b) , men heldigvis er dette nok informasjon for de fleste anvendelser.

La oss se noen enkle eksempler på hva middelverdisetningen kan brukes til.

6.2.4 Korollar

Dersom $f'(x) = 0$ for alle x i et intervall I , så er f konstant på I .

Bevis: Velg et punkt $a \in I$; vi skal vise at $f(x) = f(a)$ for alle $x \in I$. For en hvilken som helst slik $x \neq a$ har vi

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0$$

for en c mellom x og a . Altså er $f(x) = f(a)$. ■

Legg nøye merke til hva korollaret sier. Det sier *ikke* at alle konstantfunksjoner har derivert lik 0 – dét er en trivialitet som følger direkte fra definisjonen av den deriverte. Derimot sier det at konstantfunksjonene er de *eneste* som har derivert lik null overalt, og det er det ikke så lett å vise uten middelverdisetningen.

Før vi vender oss mot den andre anvendelsen av middelverdisetningen, minner vi om at en funksjon f er *voksende* på et intervall I dersom $f(x_1) \leq f(x_2)$ for alle $x_1, x_2 \in I$ med $x_1 < x_2$. Funksjonen er *avtagende* dersom $f(x_1) \geq f(x_2)$ for alle $x_1, x_2 \in I$ med $x_1 < x_2$. Vi sier også at en funksjon f er *strengt voksende* dersom $f(x_1) < f(x_2)$ når $x_1 < x_2$, og vi sier at den er *strengt avtagende* dersom $f(x_1) > f(x_2)$ når $x_1 < x_2$.

6.2.5 Korollar

Anta at f er kontinuerlig i intervallet $[a, b]$. Dersom $f'(x) \geq 0$ for alle indre punkter $x \in (a, b)$, er f voksende på $[a, b]$. Dersom $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in (a, b)$, er f avtagende på $[a, b]$. Dersom vi isteden har strenge ulikheter (henholdsvis $f'(x) > 0$ eller $f'(x) < 0$ for alle indre punkter x), så er funksjonen *strengt* voksende eller *strengt* avtagende.

Bevis: Vi vil her bevise den første delen av korollaret og overlater resten til leseren. Anta $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in (a, b)$, og velg $x_1, x_2 \in [a, b]$ slik at $x_1 < x_2$. Ifølge middelverdisetningen finnes det en $c \in (x_1, x_2)$ slik at

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0.$$

Siden $x_2 > x_1$, betyr dette at $f(x_2) \geq f(x_1)$, og f er voksende. ■

Legg merke til at vi ikke har forutsatt noe om den deriverte i endepunktene a og b (ikke en gang at den eksisterer).

Bemerkning

Det kan være på sin plass med en kommentar her. I skolematematikken *definerer* man ofte en funksjon til å være voksende dersom f' er positiv, men av flere grunner er ikke dette en god definisjon; for det første virker den ikke for ikke-deriverbare funksjoner, og for det andre definerer den et enkelt begrep («voksende») ved hjelp av et atskillig mer komplisert («derivert»). At det i praksis ofte er lettest å vise at en funksjon er voksende eller avtagende ved å se på fortegnet til den deriverte, rokker ikke ved disse innvendingene; det er slett ikke uvanlig i matematikken at man supplerer den teoretisk «riktige» definisjonen med kriterier som er lettere å kontrollere i praksis. Å opphøye disse praktiske kriteriene til definisjoner er ofte uheldig fordi de ikke dekker alle tilfeller man er interessert i, eller ikke lar seg generalisere til andre situasjoner. En mer subtil grunn til at det ikke er lurt å knytte begrepet «voksende» direkte til den deriverte, ser du i oppgave 23. Der finner du en funksjon g som har $g'(0) = 1/2$, men som ikke er voksende i noe intervall rundt 0!

Ser vi på figur 6.2.1, kan middelverdisetningen virke som en geometrisk selvfølgelighet, men i likhet med skjæringssetningen og ekstremalverdisetningen, stikker resultatet dypere enn det kan se ut til ved første øyekast.

6.2.6 Eksempel

La oss late som vi bare har de rasjonale tallene å regne med, og la

$$f(x) = x^3 - 9x.$$

Da er $f(0) = f(3) = 0$, men siden $f'(x)$ bare er null når $x = \pm\sqrt{3}$, finnes det ikke noe *rasjonalt* tall mellom 0 og 3 hvor den deriverte er 0. Følgelig er ikke Rolles teorem og middelverdisetningen sanne dersom vi holder oss til det rasjonale tallsystemet.

Men hvor er det beviset for middelverdisetningen bryter samme i det rasjonale tilfellet? Jo, da vi beviste Rolles teorem, brukte vi ekstremalverdisetningen til å finne et ekstremalpunkt i det indre av intervallet, og ekstremalverdisetningen gjelder ikke i det rasjonale tilfellet. ■

Når du leser videre i denne boken, vil du oppdage at middelverdisetningen dukker opp om og om igjen i mange forskjellige sammenhenger. Kanskje er denne setningen det resultatet i hele boken som oftest brukes til å bevise nye ting. Det er ikke lett å si hvorfor middelverdisetningen er så nyttig, men her er i hvert fall ett poeng som er verd å ta med seg: Når man arbeider med en funksjon, er man ofte interessert i å se hvordan den varierer i nærheten av et punkt a – man vil undersøke hvordan $f(a+h)$ er sammenlignet med $f(a)$. Tenker vi litt uformelt, får vi ofte mye informasjon av å tilnærme differensen $f(a+h) - f(a)$ med differensialet $f'(a)h$. Disse uttrykkene er ikke helt like, men $f'(a)h$ gir oss ofte et godt inntrykk av hva som skjer. I anvendelser er et slikt overslag ofte tilstrekkelig, men når man skal bevise ting strengt matematisk, er tilnærmingen $f(a+h) - f(a) \approx f'(a)h$ ikke bestandig nok; vi mangler informasjon om *hvor* like de to uttrykkene er. Bruker vi middelverdisetningen, ser vi at $f(a+h) - f(a) = f'(c)h$ for en c mellom a og $a+h$. Dette er en *eksakt* likhet (selv om vi ikke har full kontroll på hvor punktet c er) og den gir oss ofte den informasjonen vi trenger. En ekstra fordel er at likheten $f(a+h) - f(a) = f'(c)h$ holder også når h er stor, mens tilnærmingen $f(a+h) - f(a) \approx f'(a)h$ da som regel er ubrukkelig.

Oppgaver i seksjon 6.2

- Avgjør på hvilke intervaller funksjonene er voksende og avtagende.
 - $f(x) = x^2 - 6x$
 - $f(x) = 1 - x^{2/3}$
 - $f(x) = \sin x^2$
- Bruk skjæringssetningen og korollar 6.2.5 til å vise at funksjonene har nøyaktig ett nullpunkt i det angitte intervallet.
 - $f(x) = \cos x - x$ i intervallet $[0, \pi/4]$
 - $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ i intervallet $[1, e]$
 - $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ i intervallet $[0, 1]$
- Vis at grafene til funksjonene $f(x) = 2 - x^3$ og $g(x) = \ln(2 + x)$ har nøyaktig ett skjæringspunkt i intervallet $[0, 1]$.
- Vis at ligningen $x = \tan x$ har nøyaktig en løsning i hvert intervall $((n-1/2)\pi, (n+1/2)\pi)$ der n er et helt tall.
- La $f(x) = x - 4/x$. Vis at $f(-1) = f(4)$, men at det ikke finnes noe punkt $c \in (-1, 4)$ slik at $f'(c) = 0$. Hvorfor strider ikke dette mot Rolles teorem?

6. La $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Vis at $f(-1) = f(1)$, men at det ikke finnes noe punkt i $(-1, 1)$ der f' er lik null. Hvorfor strider ikke dette mot Rolles teorem?

7. Vis at det mellom 0 og et tall x alltid finnes en c slik at $\sin x = x \cos c$. Bruk dette til å vise at $|\sin x| \leq |x|$ for alle x .

8. Anta $x > -1$. Vis at det alltid finnes et tall c mellom 0 og x slik at $\ln(1+x) = x/(1+c)$. Vis at $\ln(1+x) \leq x$.

9. Anta $x > -1$. Vis at det finnes et tall c mellom 0 og x slik at $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{(2\sqrt{1+c})}$. Vis at

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

10. Anta at a er et reelt tall, $0 \leq a \leq 1$. Vis at

$$(1+x)^a \leq 1+ax \quad \text{for } x > -1.$$

11. a) Vis at $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ for alle x, y .

b) Vis at $|\tan x - \tan y| \geq |x - y|$ for alle $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

12. (UiO) Vis at $\left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \right| \leq |x - y|$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

13. (UiO) Anta at f er kontinuerlig i $[a, b]$, to ganger deriverbar i (a, b) , og at $f(a) = f(b)$ for en $d \in (a, b)$. Vis at det finnes en $c \in (a, b)$ slik at $f''(c) = 0$.

14. (UiB) La f være funksjon som er to ganger deriverbar på intervallet I . Anta at f'' har nøyaktig ett nullpunkt i I . Vis at f kan ha høyst tre nullpunkter i I .

15. (UiO) La f være deriverbar på hele \mathbb{R} . Anta at det finnes et tall r slik at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = r.$$

Vis at det finnes et tall c slik at $f'(c) = 0$.

16. (UiO) La f og g være to funksjoner som er kontinuerlige på det lukkede intervallet $[a, b]$ og deriverbare på det åpne intervallet (a, b) . Anta videre at $f(a) = g(a)$ og $f(b) = g(b)$. Vis at det finnes et tall $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = g'(c)$.

17. (UiO) Den deriverbare funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ skjærer linjen $y = ax + b$ tre steder. Vis at det finnes minst to punkter x der $f'(x) = a$.

18. (UiO) Bevis at følgende ulikhet gjelder for alle naturlige tall n :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$$

19. (UiO) Anta at funksjonen f er definert for alle x , og at den tilfredsstiller

$$|f(b) - f(a)| \leq K(b-a)^2 \quad \text{for alle } a, b \in \mathbb{R}$$

der K er en positiv konstant. Vis at f er konstant.

20. a) (UiO) Anta at f' er kontinuerlig på $[a, b]$. Vis at det finnes et tall K slik at

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

for alle $x, y \in [a, b]$.

- b) La $f(x) = \sqrt{x}$. Vis at det ikke finnes en konstant K slik at $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Hvorfor strider ikke dette mot a)?

21. a) (UiO) Vis at

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \ln[\ln(n+1)] - \ln[\ln(n)] < \frac{1}{n\ln n}$$

når n er et naturlig tall større enn 1.

- b) Vis at følgen $\{s_n\}$ der

$$s_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

ikke konvergerer.

- c) Vis at følgen $\{t_n\}$ der $t_n = s_n - \ln[\ln(n+1)]$ konvergerer mot et tall t , og at

$$-\ln(\ln 2) \leq t \leq -\ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}.$$

22. a) Anta at f er kontinuerlig i a og at $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L$. Vis at f er deriverbar i a og at $f'(a) = L$.

- b) Vis at det finnes en funksjon g slik at $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ ikke eksisterer, men g likevel er deriverbar i 0. *Hint: Prøv*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

- c) Vis at dersom de ensidige grensene $\lim_{x \rightarrow a^+} g'(x)$ og $\lim_{x \rightarrow a^-} g'(x)$ eksisterer, men ikke er like, så kan ikke g være deriverbar i a .

- d) Bruk resultatene ovenfor til å avgjøre om funksjonene er deriverbare i 0

$$h(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{for } x \geq 0 \\ \sin x & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} \tan x & \text{for } x \geq 0 \\ \ln(x^2 + 1) & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

23. Funksjonen f er definert for alle reelle tall x ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

a) Vis at

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

b) La $g(x) = f(x) + \frac{x}{2}$. Vis at $g'(0) = 1/2$, men at det ikke finnes noe intervall $(-a, a)$, $a > 0$, der g er voksende. Hvorfor strider ikke dette mot korollar 6.2.5?

24. I denne oppgaven skal vi vise et resultat som kalles *Darboux' teorem* eller *skjæringssetningen for deriverte*. Det sier: «Anta at på intervallet $[a, b]$ er f den deriverte til en funksjon F . Anta videre at $f(a) < \alpha < f(b)$. Da finnes det en $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = \alpha$.» (Legg merke til at vi ikke krever at f er kontinuerlig.)

a) La $G(x) = F(x) - \alpha(x - a)$. Forklar hvorfor G må ha et minimumspunkt c på $[a, b]$.

b) Vis at minimumspunktet c ikke kan være a eller b .

c) Vis at $f(c) = \alpha$.

6.3 L'Hôpitals regel og ubestemte uttrykk

I denne seksjonen skal vi bruke følgende variant av middelverdisetningen til å skaffe oss et kraftig redskap til beregning av grenseverdier.

6.3.1 Cauchys middelverdisetning Anta at $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner som er deriverbare i alle indre punkter $x \in (a, b)$. Da finnes det en $c \in (a, b)$ slik at

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bevis: Vi bruker Rolles teorem på funksjonen

$$h(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x).$$

Siden $h(a)$ og $h(b)$ begge er lik $g(b)f(a) - f(b)g(a)$, må det finnes en $c \in (a, b)$ slik at

$$0 = h'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) - [f(b) - f(a)]g'(c).$$

Altså er

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

Bemerkning

Vi burde ha skrevet konklusjonen i Cauchys middelverdisetning på formen

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

for å unngå (trivielle) tolkningsproblemer når $g(b) = g(a)$, men formen vi har valgt er langt oversiktligere.

L'Hôpitals regel for «0/0»-uttrykk

Vi har tidligere nevnt at det ikke finnes noen generell regel for hva grenseverdien til brøken $f(x)/g(x)$ er, dersom $f(x)$ og $g(x)$ begge går mot null. I noen tilfeller vil en slik grense være ∞ , i andre 0, i atter andre et tall forskjellig fra null, og så videre. Siden det ikke finnes en generell regel, må hvert enkelt tilfelle behandles individuelt, og L'Hôpitals regel er et effektivt verktøy for slike undersøkelser av «0/0»-uttrykk.

6.3.2 L'Hôpitals regel for «0/0» Anta at $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ og at $g'(x) \neq 0$ for alle x tilstrekkelig nær a . Anta videre at grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

eksisterer (vi tillater at den er lik ∞ eller $-\infty$). Da eksisterer også grenseverdien $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ og

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bevis: Dersom f og g ikke er definert i a (eller er definert, men ikke kontinuerlige), kan vi utvide f og g til kontinuerlige funksjoner i a ved å sette $f(a) = g(a) = 0$. Ifølge Cauchys middelverdisetning finnes det en c mellom x og a slik at

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Når x går mot a , må c også gå mot a , og dermed er

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

Bemerkning

Legg merke til at beviset fungerer like godt for ensidige grenser, og at vi derfor kan bruke L'Hôpitals regel også i det ensidige tilfellet.

6.3.3 Eksempel

I uttrykket

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

går både teller og nevner mot null. Deriverer vi over og under brøkstreken, får vi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1.$$

Ifølge L'Hôpitals regel er dermed

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$$

■

I noen tilfeller må vi bruke L'Hôpitals regel flere ganger før vi kommer frem til et svar:

6.3.4 Eksempel

La oss beregne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Deriverer vi oppe og nede, skulle vi ifølge L'Hôpitals regel ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$$

forutsatt at den siste grensen eksisterer. Dette er igjen et «0/0»-uttrykk, og deriverer vi oppe og nede på nytt, får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Altså er $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. ■

I beviset for L'Hôpitals regel antok vi at a var et tall, men regelen gjelder like godt for grenseproblemer hvor x går mot $\pm\infty$:

6.3.5 Korollar

L'Hôpitals regel gjelder også når $a = \infty$ og $a = -\infty$.

Bevis: Ved å substituere $x = 1/t$ kan vi tilbakeføre problemet til den formen vi allerede kjenner:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Det er et par feller ved bruken av L'Hôpitals regel som det er verdt å merke seg. Den første er at regelen forutsetter at grenseverdiene til $f(x)$ og $g(x)$ er 0 (eller, som vi snart skal se, $\pm\infty$). Bruker vi regelen uten at denne forutsetningen er oppfylt, blir svaret galt! Denne fellen burde være enkel å unngå, men selv rutinerne brukere faller av og til i den – spesielt i problemer hvor man må bruke L'Hôpitals regel mange ganger etter hverandre.

Den neste fellen er mer subtil, og det er best å forklare den gjennom et eksempel.

6.3.6 Eksempel

Sett $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ og $g(x) = x$. Da er $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, og (uten bruk av L'Hôpital!)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

siden den første faktoren går mot null og den andre ligger mellom -1 og 1 .

La oss nå prøve å løse det samme problemet ved hjelp av L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right).$$

I dette uttrykket går det første leddet mot null mens det andre svinger hurtigere og hurtigere mellom ytterpunktene 1 og -1 . Grenseverdien til $f'(x)/g'(x)$ eksisterer derfor ikke. Men sier ikke da L'Hôpitals regel at grenseverdien til $f(x)/g(x)$ heller ikke eksisterer – i strid med det vi viste innledningsvis? Nei, den gjør nok ikke det. Leser vi formuleringen av regelen grundig, ser vi at den kun uttaler seg om tilfellet hvor $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)/g'(x)$ eksisterer. Det er derfor fullt mulig at $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x)$ eksisterer selv om $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)/g'(x)$ ikke gjør det. ■

Advarsel

Dersom man bruker L'Hôpitals regel og finner at grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ikke eksisterer, så kan man *ikke* trekke den slutningen at $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ikke eksisterer.

L'Hôpitals regel for « ∞/∞ »-uttrykk

En nyttig variant av L'Hôpitals regel har vi når telleren og nevneren går mot uendelig istedenfor null. Bevisideen er den samme som for « $0/0$ »-uttrykk, men gjennomføringen er litt mer komplisert, og mange vil nok foretrekke å hoppe over dette beviset.

6.3.7 L'Hôpitals regel for « ∞/∞ » Anta at $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ og at grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

eksisterer (vi tillater at den er lik ∞ eller $-\infty$). Da eksisterer også grenseverdien $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ og

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

***Bevis:** Vi skal beregne de ensidige grensene $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ og $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ hver for seg. Siden argumentene er helt like i de to tilfellene, skriver vi bare ned hva som skjer når $x \rightarrow a^-$.

Gitt en $x < a$, definerer vi

$$x' = \sup \{ z < a \mid f(z) \leq \sqrt{f(x)} \text{ og } g(z) \leq \sqrt{g(x)} \}$$

(x' vil ikke nødvendigvis finnes for alle x , men siden $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, vil den finnes for alle x tilstrekkelig nær a , og det er alt vi behøver). Siden f og g er kontinuerlige, må $f(x') \leq \sqrt{f(x)}$ og $g(x') \leq \sqrt{g(x)}$ med likhet i minst ett av tilfellene. Av dette følger det at x' går mot a nedenfra når x gjør det. Ifølge Cauchys middelverdisetning finnes det et tall c mellom x' og x slik at

$$\frac{f(x) - f(x')}{g(x) - g(x')} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

og følgelig er

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(x')}{g(x) - g(x')} = \lim_{c \rightarrow a^-} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

På den annen side er

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(x')}{g(x) - g(x')} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x')}{f(x)}}{1 - \frac{g(x')}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

siden $f(x') \leq \sqrt{f(x)}$ og $g(x') \leq \sqrt{g(x)}$. Kombinerer vi disse to likhetene, får vi

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

og beviset er ferdig. ■

I beviset ovenfor antok vi at a var et tall, men resultatet gjelder like godt når $a = \pm\infty$ (husk argumentet for korollar 6.3.5). Regelen gjelder også dersom en eller begge funksjonene f, g går mot $-\infty$ istedenfor ∞ ; vi kan rett og slett sette det som er av minuser utenfor grensetegnet.

Her er et eksempel på bruk av L'Hôpitals regel for « ∞/∞ »-uttrykk:

6.3.8 Eksempel

Beregn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Siden teller og nevner går mot ∞ , deriverer vi oppe og nede:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x}.$$

Teller og nevner går fortsatt mot uendelig, så vi prøver på nytt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Ifølge L'Hôpitals regel er dermed $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x/x^2 = \infty$. ■

Andre ubestemte uttrykk

Etter en enkel algebraisk omforming kan L'Hôpitals regel ofte brukes til å beregne grenseverdier som i utgangspunktet ikke er på formen « $0/0$ » eller « ∞/∞ », men på en av de andre ubestemte formene « $0 \cdot \infty$ », « $\infty - \infty$ », « 1^∞ », « 0^0 » eller « ∞^0 ». Det er lettest å lære disse omformingene gjennom eksempler.

6.3.9 Eksempel

Finn grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

Siden x går mot 0 og $\ln x$ går mot $-\infty$, er dette et ubestemt uttrykk av typen « $0 \cdot \infty$ ». Vi kan omforme det til et « ∞/∞ »-uttrykk på følgende måte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}.$$

Bruker vi L'Hôpitals regel på dette uttrykket, får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0.$$

■

Bemerkning

Vi kunne også ha prøvd å omforme uttrykket $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ på en annen måte, nemlig ved å gjøre det om til « $0/0$ »-uttrykket

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1/\ln x}.$$

Deriverer vi oppe og nede i dette uttrykket, ender vi imidlertid opp med noe som er verre enn det vi begynte med (prøv!). Man må altså tenke seg litt om når man omformer « $0 \cdot \infty$ »-uttrykk og velge den varianten som gir de peneste derivasjonene.

La oss prøve et « $\infty - \infty$ »-uttrykk. Her gjelder det som regel å finne en felles faktor som man kan sette utenfor, slik at uttrykket kommer over på formen « $0 \cdot \infty$ ».

6.3.10 Eksempel

Beregn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{1/x} - x).$$

Vi omformer først dette til « $\infty \cdot 0$ »-uttrykket $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$, og så til « $0/0$ »-uttrykket

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = 1.$$

Altså er $\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{1/x} - x) = 1$.

■

Eksponentialformene « 1^∞ », « 0^0 » og « ∞^0 » kan alle behandles ved hjelp av et enkelt triks. Her er et typisk eksempel.

6.3.11 Eksempel

Finn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$

Knepet er å bruke logaritmer til å flytte hele x -avhengigheten opp i eksponenten. Vi observerer først at

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \left(e^{\ln(1+2/x)}\right)^x = e^{x \ln(1+2/x)}.$$

Siden eksponentialfunksjonen $f(x) = e^x$ er kontinuerlig, så er

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(1+2/x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1+2/x)}.$$

Det er derfor nok å regne ut $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + 2/x)$. Dette er et « $\infty \cdot 0$ »-uttrykk som kan gjøres om til et « $0/0$ »-uttrykk:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 2/x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-2/x^2)/(1 + 2/x)}{-1/x^2} = 2.$$

Altså er

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1+2/x)} = e^2.$$



Utfyllende eksempler

Vi er nå ferdige med den grunnleggende gjennomgåelsen av L'Hôpitals regel. I de neste eksemplene skal vi se på noen teknikker som ofte er nyttige når vi bruker metoden på mer kompliserte uttrykk. For selv om L'Hôpitals regel er en meget effektiv metode til å beregne grenseverdier, fungerer den ikke bestandig problemfritt – dersom de deriverte $f'(x)$ og $g'(x)$ er mer kompliserte enn de opprinnelige funksjonene $f(x)$ og $g(x)$, fører regelen oss bare over i et mer uoversiktlig grenseproblem. I slike tilfeller må vi enten bruke andre teknikker eller skrive om uttrykket slik at vi får andre funksjoner å derivere. Vi skal se på et enkelt eksempel.

6.3.12 Eksempel

Finn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}.$$

Dette er et « $0/0$ »-uttrykk, og deriverer vi oppe og nede, får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3},$$

som er verre enn det vi startet med. Prøver vi en derivasjon til, ender vi opp med

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{-1/x^2}}{3x^5}.$$

Det er nå klart hvor det bærer hen; jo mer vi deriverer, dess styggere uttrykk får vi i nevneren. I stedet for å fortsette, går vi tilbake til det opprinnelige uttrykket og skriver litt om på det:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{e^{1/x^2}}$$

som er et « ∞/∞ »-uttrykk. Deriverer vi oppe og nede, får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{e^{1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/x^2}{e^{1/x^2}(-2/x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0.$$

Dette eksemplet viser at det ikke alltid er det peneste uttrykket som gir det beste resultatet når vi bruker L'Hôpitals regel. ■

Det neste eksemplet viser hvordan vi av og til kan forenkle regningene ved å splitte opp uttrykket.

6.3.13 Eksempel

Beregn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x(1 + x - e^x)}.$$

På grunn av produktene får vi ganske lange uttrykk i teller og nevner dersom vi bruker L'Hôpitals regel direkte. Husker vi at $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$, kan vi imidlertid forenkle regningene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x(1 + x - e^x)} &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x} \right) \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}. \end{aligned}$$

Bruker vi nå L'Hôpitals regel på det siste uttrykket, får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{-e^x} = -1.$$

Altså er

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x(1 + x - e^x)} = 1 \cdot (-1) = -1.$$



I løpet av denne boken skal vi få anledning til å bruke L'Hôpitals regel til å løse problemer av mange forskjellige slag. Foreløpig skal vi bare se på én anvendelse – derivasjon i punkter hvor de vanlige derivasjonsreglene ikke virker:

6.3.14 Eksempel

La funksjonen f være definert for alle $x > 0$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{hvis } x \neq 1 \\ 1 & \text{hvis } x = 1. \end{cases}$$

Finn $f'(1)$.

Siden f ikke er gitt ved det samme formeluttrykket i punktet $x = 1$ som ellers, kan vi ikke bruke de vanlige derivasjonsreglene. Vi går derfor tilbake til definisjonen av derivert som forteller oss at

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - (x - 1)}{(x - 1)^2}.$$

Bruker vi L'Hôpitals regel to ganger på det siste uttrykket, ser vi at

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - (x - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x - 1}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1/x^2}{2} = -\frac{1}{2}.$$



Vekst av potenser, logaritmer og eksponentialfunksjoner

Man har ofte bruk for å sammenligne veksten av potensfunksjoner, eksponentialfunksjoner og logaritmer når x går mot uendelig. Populært sagt vokser enhver eksponentialfunksjon hurtigere enn enhver potens som igjen vokser hurtigere enn enhver logaritme. Mer presist har vi:

6.3.15 Setning

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0 \quad \text{for alle } a, b > 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0 \quad \text{for alle } a, b > 0$$

Bevis: a) Siden $(\ln x)^a/x^b = [\ln(x)/x^{b/a}]^a$ og $a > 0$, er det nok å vise at $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x/x^{b/a} = 0$. Ved L'Hôpitals regel får vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{b/a}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{(b/a)x^{b/a-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{bx^{b/a}} = 0.$$

b) Siden $x^b/e^{ax} = (x/e^{ax/b})^b$, er det nok å vise at $\lim_{x \rightarrow \infty} x/e^{ax/b} = 0$. Ved L'Hôpitals regel har vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ax/b}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(a/b)e^{ax/b}} = 0.$$

■

Vi har et tilsvarende resultat når x nærmer seg null – enhver potens går hurtigere mot null enn noen logaritme går mot uendelig. Mer presist:

6.3.16 Setning

For alle $a, b > 0$ er $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\ln x|^b = 0$.

Bevis: Siden $x^a |\ln x|^b = (x^{a/b} |\ln x|)^b$ og $b > 0$, er det nok å vise at $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{a/b} \ln x = 0$. Ved L'Hôpitals regel får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{a/b} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-a/b}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\frac{a}{b}x^{-\frac{a}{b}-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{b}{a}x^{a/b} = 0.$$

■

Problemer av denne typen dukker opp så ofte at reglene ovenfor kan være bryet verd å lære seg.

Oppgaver i seksjon 6.3

1. Bruk L'Hôpitals regel til å finne grenseverdiene:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 3x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi/2 - x}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$
- h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2}$
- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

2. Bruk L'Hôpitals regel til å finne grenseverdiene:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3x^2 + 2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x - 1)}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan(1/x^2)}{1 - \cos(1/x)}$

3. Finn grenseverdiene:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\sqrt{1 + 1/x} - 1)$
- c) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)^x$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$4. \text{ (UiO) Finn } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{2 \ln(\tan x)}$$

$$5. \text{ (NTNU) Finn } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

$$6. \text{ (UiO) Finn } \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$$

$$7. \text{ (UiB) Finn } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right)$$

$$8. \text{ (UiTø) Finn } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x \sin x}{6(1 - \cos x)}$$

$$9. \text{ (NTNU) Finn } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x)^{1/x}$$

$$10. \text{ (IH) Finn } \lim_{v \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\tan v - \frac{2v}{\pi \cos v} \right)$$

$$11. \text{ (IH) Finn } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x^2}$$

$$12. \text{ (UiB) Finn } \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x - \ln(1 - e^{-ax})] \text{ der } a > 0.$$

$$13. \text{ (NTNU) Finn } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$$

$$14. \text{ (NTNU) Finn } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^x \text{ der } a, b \in \mathbb{R}.$$

$$15. \text{ (UiO) Finn } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 5}{(n-3)(n+2)} \right)^n$$

16. (IH) Bestem a slik at

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+a}}{x - \sqrt{x}}$$

eksisterer og finn grensen.

17. (UiTø) Finn tallet a slik at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+1}{ax} \right)^x = \sqrt{e}.$$

18. (UiO) For hvilke verdier av p og q eksisterer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} + px + q}{x \ln(1+x)}$$

Finn grenseverdien.

19. (UiO) Finn et eksempel på en funksjon f slik at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^n}}{f(x)} = 0$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

20. (UiTø) Grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(px)} - \frac{1}{e^{x/2} - 1} \right)$$

eksisterer for en verdi av p . Finn p og den tilhørende grenseverdien.

21. (IH) En funksjon f er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0. \end{cases}$$

Undersøk om f er kontinuert i 0.

22. Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{for } x > 0 \\ x^2 + \frac{1}{2} & \text{for } x \leq 0. \end{cases}$$

Vis at f er kontinuert og deriverbar i 0.

23. (UiO) Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Vis at g er to ganger deriverbar i 0 og finn den første- og annenderiverte.

24. Vis at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

er kontinuert og deriverbar i 0.

25. Anta at f'' eksisterer og er kontinuert i et område rundt a . Vis at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - 2f(a) + f(a-x)}{x^2} = f''(a).$$

26. I denne oppgaven skal vi se på en geometrisk tolkning av L'Hôpitals regel. Vi ser på tilfellet der $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

- Anta at $(g(x), f(x))$ angir posisjonen til en partikkel ved tiden x . Forklar hvorfor $f(x)/g(x)$ er stigningstallet til linjen fra origo til partikkelen ved tiden x .
- Forklar hvorfor $(g'(x), f'(x))$ er hastighetsvektoren til partikkelen ved tiden x . Forklar hva $f'(x)/g'(x)$ sier om hastighetens retning.

- c) Overbevis deg selv (uten å gi et strengt bevis) om at dersom $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)/g'(x) = k$, så må også $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = k$. Kan du tenke deg en kurve der $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = k$, men der $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)/g'(x)$ ikke nærmer seg noen grense (det er nok å skissere en slik kurve uten å finne en formel for den)?
- d) La $f(x) = x + \sin(x^2)/x$ og $g(x) = x$, og vis uten å bruke L'Hôpitals regel at $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$. Vis deretter at $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)/g'(x)$ ikke eksisterer. Bruk en datamaskin eller grafisk lommeregner til å tegne grafen til kurven $(g(x), f(x))$. Bruk først et vindu der både x og y går fra 0 til 1 000, og deretter et vindu der både x og y går fra 999.99 til 1 000 (husk å justere tettheten av punktene på grafen).

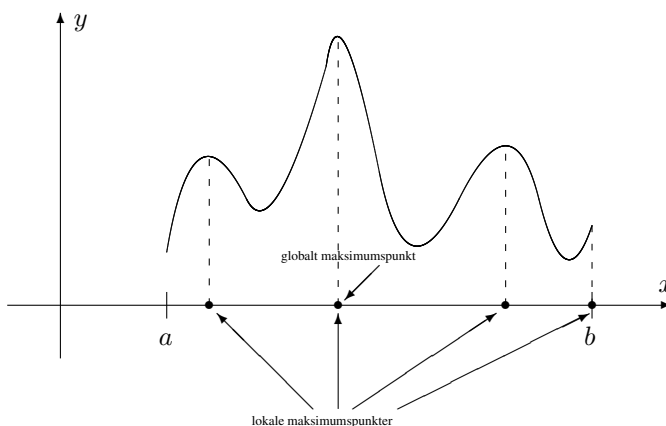
6.4 Kurvedrøfting

I denne seksjonen skal vi se litt på hvordan vi kan bruke første- og annenderiverte til å analysere kurver. Mye av stoffet vil være kjent fra videregående skole, men noe vil nok være nytt. Språkbruken er også litt annerledes. Vi begynner med maksimums- og minimumspunkter, som du kanskje er mer vant til å tenke på som topp- og bunnpunkter.

Intuitivt er et maksimumspunkt et punkt der funksjonen har en verdi som er større enn (eller lik) verdien i alle andre punkter, mens et lokalt maksimumspunkt er et punkt der funksjonen har en verdi som er større enn (eller lik) verdien i alle *nærliggende* punkter. Mer presist har vi:

6.4.1 Definisjon

Anta at f er en funksjon med definisjonsområde D_f . Et punkt $c \in D_f$ kalles et *lokalt maksimum* for f dersom det finnes et tall $\delta > 0$ slik at $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f \cap (c - \delta, c + \delta)$. Vi kaller c et (*globalt*) *maksimum* dersom $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$. Tilsvarende sier vi at $c \in D_f$ er et *lokalt minimum* for f dersom det finnes et tall $\delta > 0$ slik at $f(c) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f \cap (c - \delta, c + \delta)$, og vi kaller c et (*globalt*) *minimum* dersom $f(c) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$. I noen bøker brukes betegnelsene *relativt maksimum* istedenfor lokalt maksimum, og *absolutt maksimum* istedenfor globalt maksimum (og tilsvarende for minimumspunkter).



Figur 6.4.1

På figur 6.4.1 ser du at de lokale maksimumspunktene svarer til «fjelltopper» på funksjonsgrafen og at det globale maksimumspunktet svarer til den høyeste toppen. Jeg skriver «svarer til» siden slik vi har definert dem, er minimums- og maksimumspunktene punkter på x -aksen og ikke på funksjonsgrafen. Dette kan virke litt merkelig, men det viser seg å være den mest praktiske språkbruken. Legg i tillegg merke til at et globalt maksimum også regnes som et lokalt maksimum – mange tror at de globale ekstremalpunktene ikke regnes med blant de lokale, men det ville være en u hensiktsmessig terminologi.

Ifølge ekstremalverdisetningen 5.3.5 har en kontinuerlig funksjon som er definert på et lukket, begrenset intervall, alltid maksimums- og minimumspunkter. Følgende setning hjelper oss å finne dem.

6.4.2 Setning

Anta at funksjonen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ har et lokalt maksimum eller minimum i c . Da er enten

- (i) c et av endepunktene a og b eller
- (ii) $f'(c) = 0$ eller
- (iii) f ikke deriverbar i c .

Bevis: Det er nok å vise at dersom c er et indre punkt hvor f er deriverbar, så kan ikke $f'(c) \neq 0$. Men det viste vi i beviset for setning 6.2.1. ■

Vi skal kalle c et *kritisk punkt* for funksjonen f dersom det faller i en av de tre kategoriene (i)–(iii) ovenfor. Når vi leter etter eventuelle maksimums- og minimumspunkter, er det altså nok å lete blant de kritiske punktene. For å avgjøre om et kritisk punkt c

virkelig er et lokalt ekstremalpunkt – og om det i så fall er et lokalt minimum eller et lokalt maksimum – lønner det seg å se på fortegnet til den deriverte i nærheten av c :

6.4.3 Setning

Anta at f er kontinuertlig i c og deriverbar i alle punkter i en omegn $(c - \delta, c + \delta)$ unntatt muligens i c selv. Dersom $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in (c - \delta, c)$ og $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in (c, c + \delta)$, så er c et lokalt maksimum. Dersom $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in (c - \delta, c)$ og $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in (c, c + \delta)$, så er c et lokalt minimum. Dersom f' har samme fortegn i begge intervallene $(c - \delta, c)$ og $(c, c + \delta)$, så er c hverken et lokalt maksimum eller et lokalt minimum.

Bevis: Siden alle argumentene er av samme type, viser vi bare den første delen som et eksempel. Ifølge korollar 6.2.5 er f voksende i $(c - \delta, c]$, så $f(x) \leq f(c)$ for alle x i dette intervallet. Tilsvarende er f avtagende i $[c, c + \delta)$, så $f(c) \geq f(x)$ for alle x i dette intervallet. Altså er $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in (c - \delta, c + \delta)$, og følgelig er c et lokalt maksimum. ■

Det er på tide å se på et eksempel. Vi tar et som er litt mer komplisert enn det du er vant til fra skolematematikken.

6.4.4 Eksempel

Finn maksimums- og minimumspunktene til funksjonen

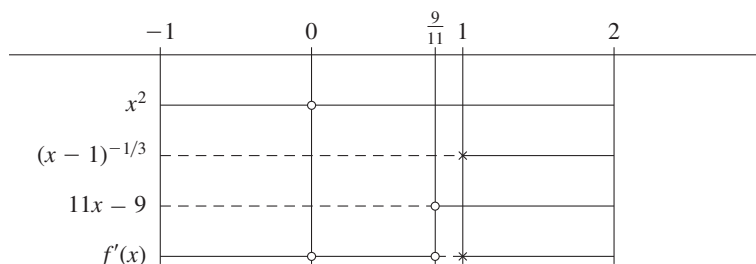
$$f(x) = x^3(x - 1)^{2/3}, \quad x \in [-1, 2]$$

og avgjør hvor den vokser og hvor den avtar.

Vi starter med å derivere:

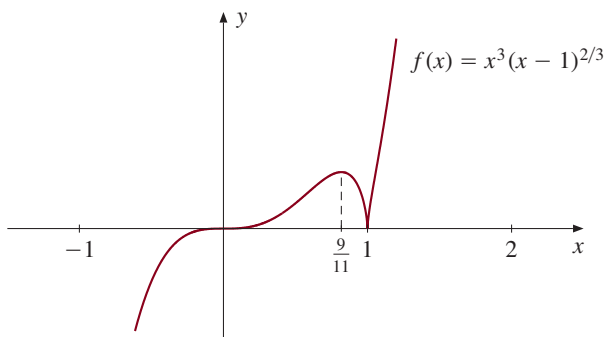
$$f'(x) = 3x^2(x - 1)^{2/3} + \frac{2}{3}x^3(x - 1)^{-1/3} = \frac{x^2(9(x - 1) + 2x)}{3(x - 1)^{1/3}} = \frac{x^2(11x - 9)}{3(x - 1)^{1/3}}.$$

Vi ser at $f'(x) = 0$ for $x = 0$ og $x = 9/11$. Dessuten er $f'(x)$ ikke definert for $x = 1$. De kritiske punktene er altså 0, $9/11$ og 1, samt endepunktene -1 og 2. Ser vi på fortegnet til f' , får vi følgende skjema.



Dette viser at f er voksende på intervallene $[-1, 9/11]$ og $[1, 2]$, mens den er avtagende på $[9/11, 1]$. Vi har et lokalt maksimum i $9/11$ og et lokalt minimum i 1. I tillegg har vi et lokalt minimum i endepunktet -1 og et lokalt maksimum i endepunktet 2. For å finne ut hvilke av disse lokale ekstremalpunktene som gir globale maksimal-

og minimalpunkter, må vi sammenligne funksjonsverdiene. Siden $f(-1) = -2^{2/3}$, $f(1) = 0$, $f(9/11) = (9/11)^3(2/11)^{2/3}$ og $f(2) = 8$, så er maksimumspunktet $x = 2$, mens minimumspunktet er $x = -1$. Figur 6.4.1 viser grafen til figuren. (Vi skal regne videre på dette eksemplet i slutten av seksjonen.)



Figur 6.4.1.



Bemerkning

Et par punkter i dette eksemplet fortjener en kommentar. Til tross for at funksjonen har derivert lik null for $x = 0$, er dette hverken et maksimal- eller et minimalpunkt fordi den deriverte ikke skifter fortegn. Derimot er $x = 1$ et lokalt minimum selv om den deriverte ikke er null – isteden er den deriverte ikke definert («kurven er uendelig bratt»), og fortegnet til den deriverte skifter fra minus til pluss. Legg også merke til at selv om funksjonen er voksende i intervallene $[-1, 9/11]$ og $[1, 2]$, så er det galt å si at den er voksende i unionen $A = [-1, 9/11] \cup [1, 2]$. Dette ville nemlig bety at dersom vi velger to punkter x_1 og x_2 i A med $x_1 < x_2$, så vil alltid $f(x_1) \leq f(x_2)$ – noe som slett ikke er sant (velg for eksempel $x_1 = 9/11$ og $x_2 = 1$).

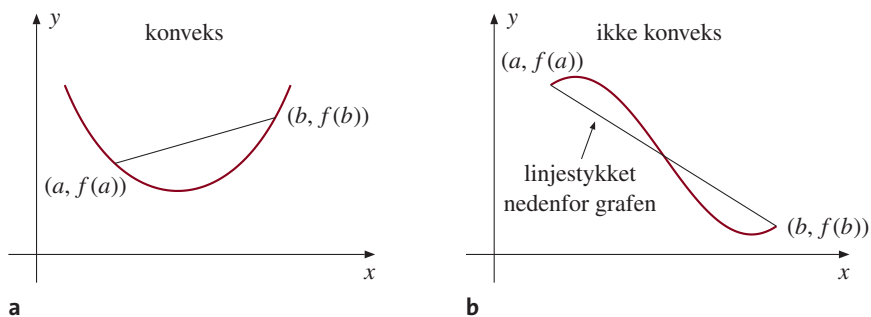
Konvekse og konkave funksjoner

Hittil har vi studert hvor funksjonene våre vokser og avtar, men i skolematematikken har du sett at det også er nyttig å vite hvor den hule siden til grafen vender opp og hvor den vender ned. I matematisk faglitteratur sier man heller at funksjonene er konvekse eller konkave. En geometrisk definisjon av disse begrepene (som ikke forutsetter at funksjonene er deriverbare) kan vi gi på denne måten:

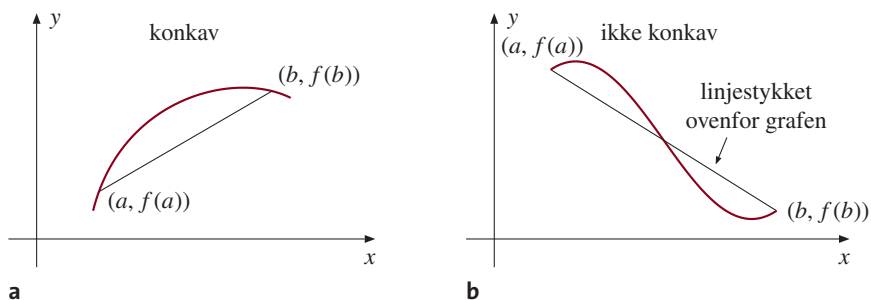
6.4.5 Definisjon

Funksjonen f kalles *konveks* på intervallet I dersom hver gang vi velger to punkter $a, b \in I$, så vil ikke noe punkt på linjestykket mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligge nedenfor grafen til $y = f(x)$ (se figur 6.4.2). Vi sier at f er *konkav* på I dersom hver gang vi velger punkter $a, b \in I$, så vil ingen punkter på linjestykket mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligge ovenfor funksjonsgrafene (se figur 6.4.3).

Intuitivt er det lett å overbevise seg om at en konveks funksjon har den hule siden opp, mens en konkav funksjon har den hule siden ned. Ved hjelp av middelverdisetningen skal vi nå se at dersom f er to ganger deriverbar, så er hulningen knyttet til fortegnet på den dobbeltderiverte slik vi kjenner fra skolematematikken.



Figur 6.4.2.



Figur 6.4.3.

Vi skal begynne med en hjelpesetning som gir en praktisk beskrivelse av konvekksitet og konkavitet. For å forstå hva lemmaet sier, kan det være lurt å lage en figur.

6.4.6 Lemma

En funksjon f er konveks i et intervall I hvis og bare hvis følgende gjelder. For alle punkter $a, b, c \in I$ slik at $a < c < b$, så er

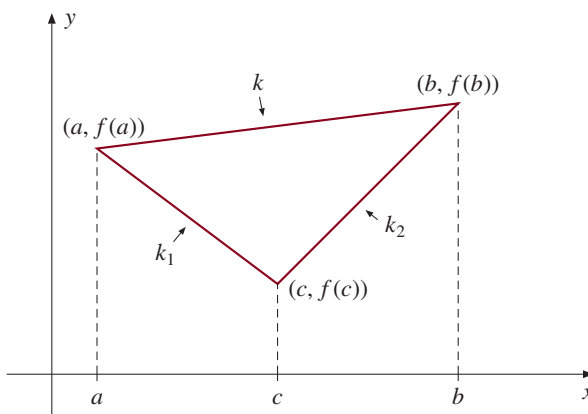
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}. \quad (1)$$

Tilsvarende er f konkav i I hvis og bare hvis

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \geq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}. \quad (2)$$

for alle $a, b, c \in I$ med $a < c < b$.

Bevis: De to utsagnene bevises på akkurat samme måte, og vi skal bare ta for oss konveksitetsdelen. Anta først at f er konveks, da kan ikke punktet $(c, f(c))$ ligge over linjestykket som forbinder $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$, og vi må ha situasjonen på figur 6.4.4.



Figur 6.4.4.

Sammenligner vi stigningstallene k , k_1 og k_2 til de tre linjestykkene på figuren, ser vi at $k_1 \leq k \leq k_2$, det vil si

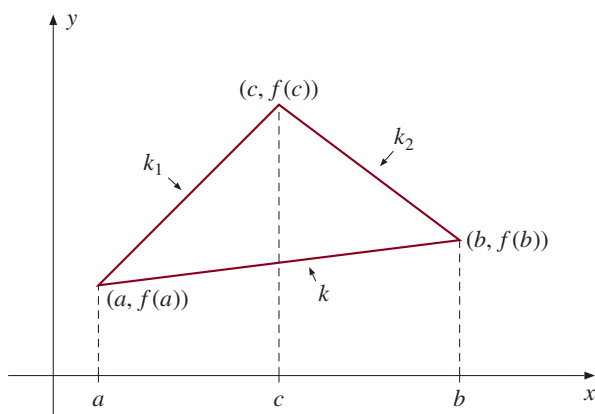
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Sløyfer vi den midterste delen, får vi (1).

Anta nå at f ikke er konveks. Vi må vise at (1) ikke holder. Siden f ikke er konveks, kan vi finne punkter $a, b, c \in I$ slik at $a < c < b$ og $f(c)$ ligger over linjestykket som forbinder $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$; det vil si at vi har situasjonen på figur 6.4.5. Vi ser at forholdet mellom stigningstallene nå er $k_1 > k > k_2$ – med andre ord

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Sløyfer vi den midterste delen, får vi den omvendte ulikheten av (1).



Figur 6.4.5.

Med dette lemmaet som redskap er det lett å vise setningen vi er på jakt etter.

6.4.7 Setning

Anta at f er kontinuerlig i et intervall I og at $f''(x) \geq 0$ for alle indre punkter $x \in I$. Da er f konveks i I . Dersom isteden $f''(x) \leq 0$ for alle indre punkter $x \in I$, så er f konkav i I .

Bevis: Vi viser konveksitetsdelen. Velg tre punkter $a, b, c \in I$ slik at $a < c < b$. Ifølge lemma 6.4.6 er det nok å vise at

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Ved middelverdisetningen finnes det to tall $c_1 \in (a, c)$ og $c_2 \in (c, b)$ slik at

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c_1) \quad \text{og} \quad \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(c_2).$$

Siden $f''(x) \geq 0$, må f' være voksende, og følgelig er $f'(c_2) \geq f'(c_1)$ (fordi $c_1 < c < c_2$). Men dermed er

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

og beviset er ferdig. ■

6.4.8 Eksempel

Hvor er funksjonen

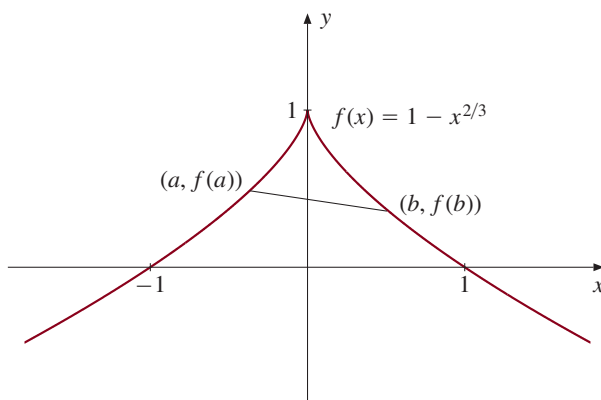
$$f(x) = 1 - x^{2/3}$$

konveks?

Deriverer vi to ganger får vi

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-4/3}.$$



Figur 6.4.6.

Den dobbeltderiverte er positiv unntatt i punktet $x = 0$, der den ikke er definert. Ifølge setningen er da f konveks på intervallene $(-\infty, 0]$ og $[0, \infty)$. Det er fristende å tro at funksjonen også er konveks på hele \mathbb{R} , men det er ikke riktig; figur 6.4.6 viser at linjestykket som forbinder to punkter på hver sin side av null, slett ikke ligger over funksjonsgrafen slik som det skal. Vi må altså være forsiktige med betingelsene i setning 6.4.7 – ryker de i ett eneste punkt, risikerer vi at konklusjonen også ryker! ■

La oss avslutte denne seksjonen med å regne videre på eksempel 6.4.4 for å finne ut hvor funksjonen $f(x) = x^3(x - 1)^{2/3}$ er konveks og hvor den er konkav.

Eksempel (6.4.4 fortsatt)

Vi har allerede regnet ut at

$$f'(x) = \frac{x^2(11x - 9)}{3(x - 1)^{1/3}}.$$

Deriverer vi en gang til, får vi (etter litt opprydning)

$$f''(x) = \frac{x(88x^2 - 144x + 54)}{9(x - 1)^{4/3}}.$$

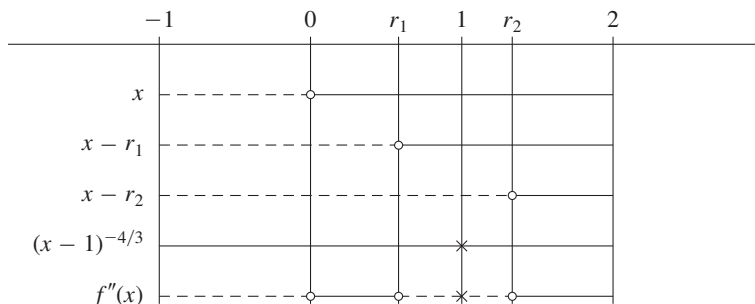
Annengradsligningen $88x^2 - 144x + 54 = 0$ har de to røttene

$$r_1 = \frac{9}{11} - \frac{3\sqrt{3}}{22} \quad \text{og} \quad r_2 = \frac{9}{11} + \frac{3\sqrt{3}}{22}.$$

Følgelig kan $f''(x)$ skrives som

$$f''(x) = \frac{88x(x-r_1)(x-r_2)}{9(x-1)^{4/3}}.$$

Fortegnsskjemaet nedenfor viser at f er konveks i intervallene $[0, r_1]$ og $[r_2, 2]$ (husk at funksjonen bare er definert opp til $x = 2$), og konkav i intervallene $[-1, 0]$, $[r_1, 1]$ og $[1, r_2]$ (men ikke i hele intervallet $[r_1, r_2]$!). Siden r_1 og r_2 er henholdsvis litt mindre og litt større enn 1, er dette i god overensstemmelse med grafen på figur 6.4.1.



Steder der en funksjon går over fra å være konveks til å være konkav eller omvendt, kalles gjerne *vendepunkter*. Mer presist sier vi at a er et *vendepunkt* for f dersom f er kontinuertlig i a , og det finnes en $\epsilon > 0$ slik at f er konveks i det ene av intervallene $(a - \epsilon, a)$, $(a, a + \epsilon)$ og konkav i det andre. I praksis finner vi vendepunkter ved å sjekke hvor den dobbeltderiverte skifter fortegn. Ser du på fortegnsskjemaet for $f''(x)$ i eksempelet ovenfor, ser du at f har vendepunkter i 0 , r_1 og r_2 . Legg forøvrig merke til at med våre definisjoner er alle punkter på en rett linje vendepunkter (fordi ethvert linjestykke er både konvekst og konkav!). Vi kunne ha unngått dette ved å innføre begrepene strengt konkav og strengt konveks og krevd at funksjonen skulle være strengt konveks/konkav på i hvert fall den ene siden av vendepunktet, men det er neppe bryet verdt.

Oppgaver i seksjon 6.4

1. Finn de kritiske punktene til funksjonen og bestem maksimums- og minimumsverdiene.

- $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 12$ på intervallet $[-3, 2]$
- $f(x) = 4x^3 - 21x^2 - 24x - 12$ på intervallet $[-1, 1]$
- $f(x) = e^x \sin x$ på intervallet $[-\pi, \pi]$
- $f(x) = x^2 e^x$ på intervallet $[-1, 3]$
- $f(x) = x + 3x^{2/3}$ på intervallet $[-\frac{1}{2}, 1]$

2. Finn de kritiske punktene til funksjonen og bestem maksimums- og minimumsverdiene.

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + 17$ på intervallet $[-1, 2]$

b) $f(x) = x \ln x$ på intervallet $[\frac{1}{4}, 1]$

c) $f(x) = \tan x - 8 \sin x$ på intervallet $[0, \frac{3}{2}]$

d) $f(x) = \cos(x^{2/3})$ på intervallet $[-\pi^{3/2}, \pi^{3/2}]$

e) $f(x) = |x - 2|e^x$ på intervallet $[1, 3]$

3. Avgjør hvor funksjonen er konveks og hvor den er konkav.

a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 23$

b) $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 3x^2 + 10$

c) $f(x) = e^x \cos x$

d) $f(x) = x^{6/7}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

4. (UiB) La $f(x) = x|x - 1|$.

a) Bestem de intervallene der f er konveks og konkav. Angi også eventuelle vendepunkter.

b) Bestem funksjonens lokale maksima og minima. Skisser grafen.

5. (UiB) La $f(x) = |x - 1|e^x$.

a) Finn funksjonens lokale maksimums- og minimumspunkter.

b) Avgjør hvor funksjonen er konveks og hvor den er konkav.

6. (UiTø) La $f(x) = 2x + 3/x$ for $x \neq 0$.

a) Finn de kritiske punktene til f og undersøk om det finnes lokale maksimums- eller minimumspunkter.

b) Bestem de områdene der f er konveks eller konkav. Skisser grafen.

7. (UiO) La $f(x)$ være definert for alle $x > 0$ ved

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{2x}.$$

a) Undersøk hvor f er voksende og hvor den er avtagende og bestem eventuelle ekstremalpunkter.

b) Bestem de intervallene hvor f er konveks og konkav.

c) Undersøk $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ og skisser grafen til f .

- d) Drøft hvor mange løsninger ligningen $f(x) = a$ har for forskjellige verdier av konstanten a .

8. (UiTø) La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \ln(x^3 + x^2).$$

- Bestem definisjonsområdet til f .
- Avgjør hvor f vokser og avtar. Finn eventuelle ekstremalpunkter.
- Avgjør hvor f er konkav og hvor den er konveks.
- Vis at f har et nullpunkt i intervallet $(1/2, 1)$ og at dette er det eneste nullpunktet til f . Skisser grafen til f .

9. (UiO) Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

- Finn definisjonsområdet og avgjør hvor f er positiv og hvor den er negativ.
- Avgjør hvor f er voksende og avtagende. Finn eventuelle ekstremalpunkter og ekstremalverdier.
- Avgjør hvor f er konkav og hvor den er konveks.
- Skisser grafen til f .

10. (NTNU) Funksjonen f er definert på hele \mathbb{R} ved

$$f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}.$$

- Bestem f' og f'' og angi definisjonsområdet for disse funksjonene.
- Har f noen symmetriegenskaper? Bestem kritiske punkter til f .
- Avgjør hvor f vokser og avtar, og hvor den er konveks og konkav.
- Tegn grafen til f .

11. (UiO) La funksjonen f være definert ved $f(x) = xe^{(1-x^2)/2}$ for alle reelle tall x .

- Finn eventuelle nullpunkter for f .
- Bestem hvor f er voksende og hvor den er avtagende. Finn eventuelle ekstremalpunkter.
- Bestem hvor f er konveks og hvor den er konkav.
- Beregn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ og tegn grafen til f .

12. a) (UiO) Finn eventuelle symmetriegenskaper for funksjonen definert for $-2 \leq x \leq 2$ ved

$$f(x) = e^{\sqrt{|x|}} - 3.$$

Avgjør hvor funksjonen er voksende og hvor den er avtagende og finn den største og minste verdien.

- b) Avgjør hvor funksjonen er konveks og hvor den er konkav. Skisser grafen.
- c) Vis at f har et nullpunkt mellom $x = 1$ og $x = 2$.
13. Bevis konkavitetdelen av lemma 6.4.6.
14. Bevis konkavitetdelen av setning 6.4.7.
15. a) (UiO) Finn definisjonsområdet til funksjonen $g(x) = \frac{x}{\tan x}$.
- b) Regn ut $g'(x)$.
- c) Vis at $\tan x < \frac{x}{\cos^2 x}$ når $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Bruk dette til å vise at g er avtagende i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$.
- I resten av denne oppgaven er $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ funksjonen definert ved:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x = 0 \\ 0 & \text{hvis } x = \pm \frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{\tan x} & \text{hvis } x \neq 0, \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- d) Tegn grafen til f (bruk gjerne lommeregner som hjelpemiddel).
- e) Vis at f er kontinuerlig.
- f) Avgjør om f er deriverbar i punktene $x = 0, \pm \frac{\pi}{2}$, og finn i så fall den deriverte i disse punktene.
16. (UiO) Anta at $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon slik at $f'(x)$ vokser og $f(0) = 0$. Definer

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt \quad \text{for } x > 0.$$

Uttrykk $F''(x)$ ved hjelp av $f(x)$ og $f'(x)$, og vis at F er en konveks funksjon.

17. La $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være kontinuerlig og anta at $a < c < b$.
- a) Vis at dersom f er voksende på hvert av intervallene $[a, c]$ og $[c, b]$, så er f voksende på $[a, b]$.
- b) Vis at selv om f er konveks på hvert av intervallene $[a, c]$ og $[c, b]$, så behøver ikke f være konveks på $[a, b]$.
18. Vis at f er konveks på intervallet $[a, b]$ hvis og bare hvis følgende holder: For alle $x, y \in [a, b]$ og alle $t \in [0, 1]$ er

$$f[(1-t)x + ty] \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Finn en tilsvarende beskrivelse av konkavitet.

6.5 Asymptoter

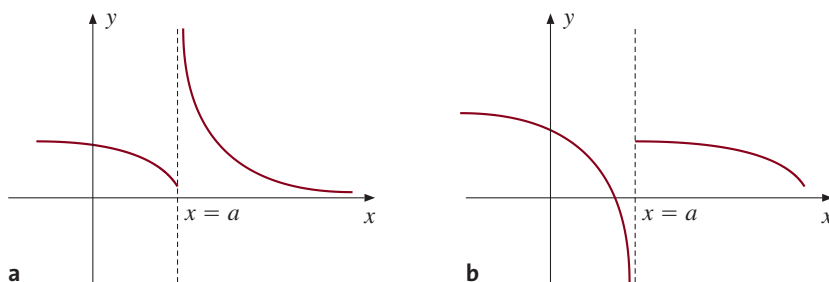
Ekstremalverdisetningen forteller oss at en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall har et maksimum og et minimum. Dersom definisjonsmengden ikke er lukket og begrenset, kan det hende at funksjonen tar vilkårlig store positive eller negative verdier. Asymptoter er et nyttig redskap til å studere slike funksjoner.

Vertikale asymptoter

Det finnes to typer asymptoter – vertikale asymptoter og skrå asymptoter (av og til snakker man også om horisontale asymptoter, men vi skal behandle dem som spesialtilfeller av de skrå asymptotene). Vi skal først se på vertikale asymptoter.

6.5.1 Definisjon

Vi sier at funksjonen f har en (vertikal) asymptote når x går mot a ovenfra dersom $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ er lik ∞ eller $-\infty$ (se figur 6.5.1a). Tilsvarende sier vi at funksjonen f har en (vertikal) asymptote når x går mot a nedenfra dersom $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ er lik ∞ eller $-\infty$ (se figur 6.5.1b). Dersom f har en asymptote både når x går mot a nedenfra og når x går mot a ovenfra, sier vi at f har en (vertikal) asymptote når x går mot a . I alle disse tilfellene sier vi at den vertikale linjen $x = a$ er en asymptote for funksjonen f .



Figur 6.5.1.

6.5.2 Eksempel

Finn de vertikale asymptotene til $f(x) = e^{1/(x-2)}$.

Siden f er kontinuertlig for alle $x \neq 2$, er det bare muligheter for vertikal asymptote når x nærmer seg 2. Lar vi x nærme seg 2 ovenfra, går $1/(x-2)$ mot ∞ , og følgelig er

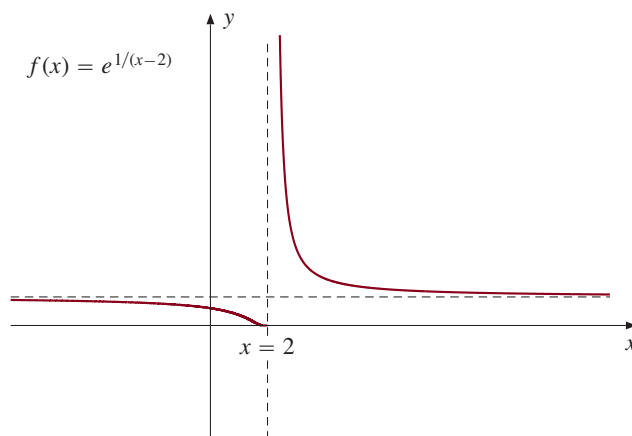
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{1/(x-2)} = \infty.$$

Dette viser at $x = 2$ er en asymptote for f når x nærmer seg 2 ovenfra.

Hva skjer så når x nærmer seg 2 nedenfra? I dette tilfellet går $1/(x-2)$ mot $-\infty$, og følgelig er

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{1/(x-2)} = 0.$$

Altså har funksjonen *ikke* en asymptote når x går mot 2 nedenfra (se figur 6.5.2).



Figur 6.5.2.



De vertikale asymptotene er som regel lette å finne; vi leter rett og slett frem de punktene a hvor f enten er diskontinuerlig eller ikke definert, og sjekker så de ensidige grenseverdiene $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$. Skråasymptotene kan være mer problematiske, og vi skal bruke resten av seksjonen på dem.

Skråasymptoter

Legg merke til at dersom $x = a$ er en asymptote når x nærmer seg a ovenfra (eller nedenfra), så smyger funksjonsgrafen $y = f(x)$ seg tettere og tettere inntil linjen $x = a$ etter hvert som vi går utover mot det uendelig fjerne. En tilsvarende geometrisk idé ligger bak definisjonen av skråasymptoter.

6.5.3 Definisjon

Linjen $y = ax + b$ er en (skrå) asymptote for funksjonen f når x går mot uendelig dersom avstanden mellom linjen og funksjonsgrafen går mot null når x går mot ∞ ; det vil si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

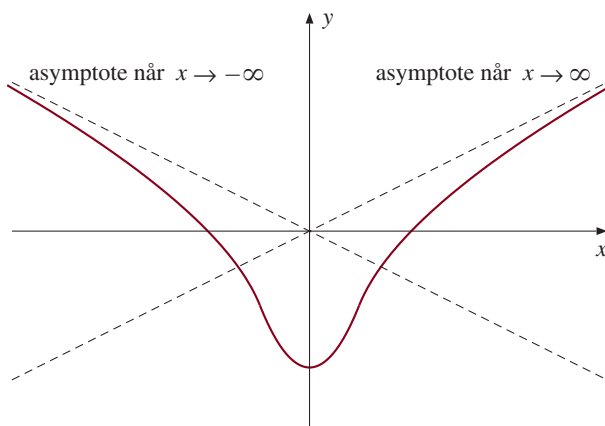
Tilsvarende sier vi at linjen $y = ax + b$ er en (skrå) asymptote for funksjonen f når x går mot minus uendelig dersom

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

(se figur 6.5.3).

Bemerkning

En skråasymptote $y = ax + b$ kalles ofte en *horisontal asymptote* dersom den er horisontal, det vil si dersom $a = 0$. Siden de horisontale asymptotene er på formen $y = b$, er de ofte lette å finne (vi behøver bare å sjekke om $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$), men siden de ellers kan behandles på samme måte som andre skråasymptoter, er det ingen grunn til å behandle dem separat.



Figur 6.5.3.

6.5.4 Eksempel

Vis at $y = x + 1$ er en asymptote for $f(x) = xe^{1/x}$ når $x \rightarrow \infty$.

Ifølge definisjonen må vi sjekke at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [xe^{1/x} - (x + 1)] = 0.$$

Dette er et uttrykk av typen « $\infty - \infty$ » som vi kan gjøre om til et « $\infty \cdot 0$ »-uttrykk:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [xe^{1/x} - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x} \right).$$

Deler vi med x i teller og nevner, og bruker L'Hôpitals regel, får vi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [xe^{1/x} - (x + 1)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1 - 1/x}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x}(-1/x^2) + 1/x^2}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1} = 0. \end{aligned}$$

Dette viser at $y = x + 1$ er en asymptote for funksjonen vår når $x \rightarrow \infty$. ■

Eksemplet ovenfor er forhåpentligvis ikke så vanskelig å følge, men det er allikevel litt mystisk; hvordan i all verden finner man på at $y = x + 1$ muligens er en asymptote

for funksjonen $f(x) = xe^{1/x}$? Det er ikke så vanskelig som det kanskje ser ut til – det finnes nemlig en systematisk metode for å finne frem til skråasymptoter. Vi formulerer denne metoden for asymptoter når $x \rightarrow \infty$, men den fungerer også når $x \rightarrow -\infty$ (vi må bare bytte ut alle grenser av typen $\lim_{x \rightarrow \infty}$ med $\lim_{x \rightarrow -\infty}$).

6.5.5 Metode for å finne skråasymptoter For å finne eventuelle asymptoter for funksjonen f når $x \rightarrow \infty$, går vi frem som følger:

- (i) Beregn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$. Dersom denne grensen ikke finnes, er det ingen asymptote. Dersom $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = a$, så
- (ii) beregn $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$. Dersom denne grensen ikke finnes, er det ingen asymptote. Dersom $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$, så er $y = ax + b$ en asymptote for f når $x \rightarrow \infty$.

La oss benytte denne metoden på funksjonen i eksempel 6.5.4:

6.5.6 Eksempel

Vi skal finne asymptoten til $f(x) = xe^{1/x}$ når $x \rightarrow \infty$. Ifølge metoden ovenfor beregner vi først

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = 1.$$

Dette viser at $a = 1$, og det neste skrittet er å beregne

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] &= \lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = 1. \end{aligned}$$

Altså er $b = 1$, og ifølge metoden vår er $y = x + 1$ en asymptote. ■

La oss også se på hva som skjer i et tilfelle hvor vi ikke har asymptote.

6.5.7 Eksempel

Undersøk om $f(x) = x + \ln x$ har en asymptote når $x \rightarrow \infty$.

Vi beregner først

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1.$$

Altså er $a = 1$. Neste skritt er å beregne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty.$$

Siden grensen $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$ ikke eksisterer, forteller metoden vår at funksjonen ikke har noen asymptote når x går mot ∞ . ■

Bemerkning

Legg merke til at funksjonen i eksemplet ovenfor ikke har noen asymptote til tross for at $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = 1$. Mange tror at dersom $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = 1$, så må $y = x$ være en asymptote for funksjonen, men det er ikke sant.

La oss også ta med et eksempel hvor $x \rightarrow -\infty$. Dette eksemplet viser at regningene ofte kan bli ganske stygge, og at vi får god bruk for våre teknikker til å finne grenseverdier.

6.5.8 Eksempel

Har $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^3} - x^2$ en asymptote når $x \rightarrow -\infty$?

Vi beregner først (husk trikset med å gange med den konjugerte oppe og nede)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3x^3} - x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^4 + 3x^3} - x^2)(\sqrt{x^4 + 3x^3} + x^2)}{x(\sqrt{x^4 + 3x^3} + x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 3x^3 - x^4}{x(\sqrt{x^4 + 3x^3} + x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{x^3(\sqrt{1 + 3/x} + 1)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Altså er $a = 3/2$. Vi beregner så

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^4 + 3x^3} - x^2 - \frac{3x}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + 3/x} - 1 - 3/2x}{1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[1/(2\sqrt{1 + 3/x})](-3/x^2) + 3/2x^2}{-2/x^3} \\ &= \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 + 3/x)^{-1/2} - 1}{1/x} \\ &= \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-1/2)(1 + 3/x)^{-3/2}(-3/x^2)}{-1/x^2} = -\frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Altså er $b = -9/8$, og vi har funnet asymptoten $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}$ når $x \rightarrow -\infty$. ■

Vi avslutter denne seksjonen med et bevis for at metoden i 6.5.5 fungerer.

Bevis: [Bevis for 6.5.5] Det er to ting å vise: a) Dersom metoden sier at $y = ax + b$ er en asymptote, så må vi vise at dette virkelig er tilfellet. b) Dersom f har en asymptote $y = ax + b$, så må vi vise at metoden finner frem til den.

For å vise a) antar vi at $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = a$ og $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$. Da følger det umiddelbart fra den siste likheten at $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, og følgelig er $y = ax + b$ en asymptote.

For å vise b) antar vi at f har en asymptote $y = ax + b$. Vi ser først at siden

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (ax + b) + ax + b}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} + a + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} \\ &= 0 + a + 0 = a \end{aligned}$$

så vil del (i) av prosedyren alltid gi oss a . Dessuten ser vi at

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b) + b] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] + \lim_{x \rightarrow \infty} b \\ &= 0 + b = b \end{aligned}$$

så del (ii) av prosedyren finner alltid b . Dermed vet vi at hvis en asymptote finnes, så vil metoden finne den for oss, og beviset er fullført. ■

Oppgaver i seksjon 6.5

I oppgavene 1 til 12 skal du finne eventuelle asymptoter.

1. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$
2. $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 2x + 7}{x^2 + x - 2}$
3. $f(x) = \frac{x^3 - x}{(x - 1)(x + 1)}$
4. $f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 - 7}{x^2 + 1}$
5. $f(x) = \frac{x \ln(x^2) - 1}{\ln x}$
6. $f(x) = x \ln x$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
8. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2} - x^2$
9. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$
10. $f(x) = x^2(e^{1/x} - 1)$
11. $f(x) = x^3 - x^3 \cos \frac{1}{x}$

12. $f(x) = x \tan \frac{1}{x}$

13. (UiO) En funksjon er definert ved

$$f(x) = (3x^2 - x^3)^{1/3}.$$

- Bestem nullpunktene til funksjonen. Undersøk hvor funksjonen er positiv og hvor den er negativ.
- Undersøk hvor funksjonen er voksende og hvor den er avtagende. Finn eventuelle lokale og globale ekstremalpunkter.
- Undersøk hvor funksjonen er konveks og hvor den er konkav.
- Finn eventuelle asymptoter og skisser grafen.

14. La f være en funksjon. Vi sier at

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

er en asymptotefunksjon for f av annen grad dersom $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$. Bevis følgende metode for å finne asymptotefunksjoner av annen grad:

- Beregn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x^2$. Hvis grenseverdien ikke finnes, er det ingen asymptotefunksjon. Hvis grenseverdien er lik a , så
- beregn $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax^2]/x$. Hvis grenseverdien ikke finnes, så er det ingen asymptotefunksjon. Hvis grenseverdien er lik b , så
- beregn $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax^2 - bx]$. Hvis grenseverdien ikke finnes, så er det ingen asymptotefunksjon. Hvis grenseverdien er c , så er $g(x) = ax^2 + bx + c$ en asymptotefunksjon.
- Bruk metoden til å finne en asymptotefunksjon for $f(x) = x^2 e^{1/x}$.

6.6 Historisk epistel: Grenser og infinitesimaler

May we not call them ghosts of departed quantities?

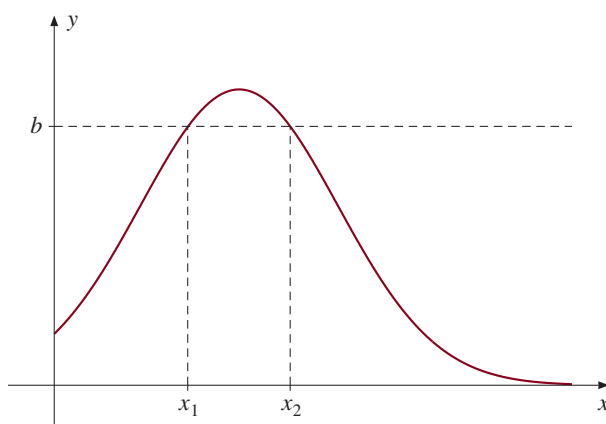
— George Berkeley (1685–1753),
The Analyst

Tenker vi på integrasjon som det å beregne arealer og volumer til geometriske objekter, har integrasjonsteorien røtter langt tilbake i matematikkhistorien. Derivasjon er en atskillig nyere disiplin. Riktignok finner vi tangentkonstruksjoner allerede i oldtiden, men de bygger alltid på spesielle geometriske egenskaper ved de kurvene som blir studert, og utgjør ingen generell metode som kan brukes på alle kurver. Først midt på 1600-tallet dukker de generelle teknikkene opp.

Dette er ikke så overraskende. Før Descartes og Fermat grunnla den analytiske geometrien i 1637 (se seksjon 5.6), hadde man ikke verktøy til å gjøre omfattende beregninger for generelle kurver. Både Fermat og Descartes innså raskt at den nye

oppdagelsen kunne brukes til å studere maksimalpunkter og tangenter, og de utviklet hver sin regneteknikk. I dag er det naturlig å se på disse teknikkene som forløpere for derivasjon.

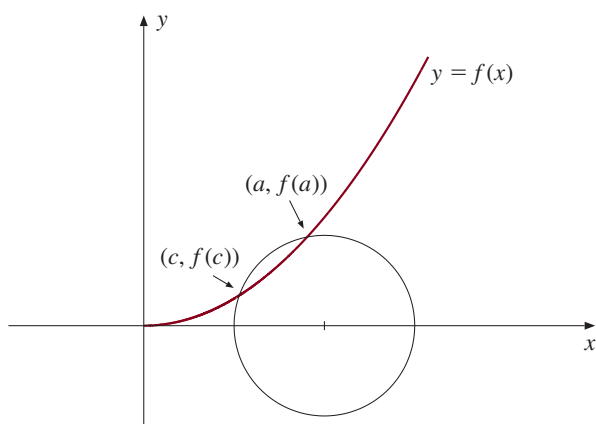
La oss først se hvordan Fermat bestemte toppunktet til en kurve. Dersom b er en verdi som ligger rett under toppunktet til kurven $y = f(x)$, vil ligningen $f(x) = b$ normalt ha to løsninger x_1 og x_2 (se figur 6.6.1).



Figur 6.6.1.

Øker vi b , kommer disse løsningene stadig nærmere hverandre, og når b er lik maksimalverdien, faller de to løsningene sammen. For å finne toppunktet måtte altså Fermat finne ut for hvilken b ligningen $b = f(x)$ har en dobbel rot, og han utviklet en regneteknikk for dette som har klare likhetstrekk med våre dagers derivasjon.

Descartes' metode for å finne tangenter bygde på en lignende idé. Tenk deg at du ønsker å finne tangenten til kurven $y = f(x)$ i punktet a .



Figur 6.6.2.

En sirkel som har sentrum på x -aksen og går gjennom punktet $(a, f(a))$ vil normalt skjære kurven også i et annet punkt $(c, f(c))$ (se figur 6.6.2). Dersom sirkelen bare

tangerer kurven, vil imidlertid disse to skjæringspunktene falle sammen. Den tangerende sirkelen er altså bestemt av at en viss ligning har en dobbel rot. Kan vi finne ut når dette skjer, har vi funnet den tangerende sirkelen, og det er da en smal sak å finne tangenten. Regningene som inngår i denne prosedyren, blir fort kompliserte, og i likhet med Fermats teknikker kan Descartes' metode bare brukes på svært enkle kurver.

Metodene til Fermat og Descartes er rent algebraiske – i begge tilfeller må vi finne ut når en viss ligning har en dobbel rot. Hverken opphavsmennene selv eller deres etterfølgere ga noen teoretisk begrunnelse for hvorfor metodene virket, men nøydde seg med en appell til det geometriske bildet. I årene som fulgte arbeidet mange andre matematikere med tangentproblemet – noen (som nederlenderene Jan Hudde (1628–1704) og René François de Sluse (1622–1685)) utviklet teknikker som forenklet regnearbeidet, mens andre (som engelskmannen Isaac Barrow (1630–1677) og franskmannen Gilles Personne de Roberval (1602–1675)) oppfant alternative angrepsmåter med et mer geometrisk eller dynamisk tilsnitt. En fullstendig derivasjonsteori med de regler og teknikker vi bruker i dag, finner vi imidlertid først hos Isaac Newton (1642–1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).

Vi skal komme tilbake til Newtons og Leibniz' samlede innsats i seksjon 8.8 og nøyer oss med å se på deres derivasjonslære her. Newton tar utgangspunkt i en partikkel som følger en kurve gitt av en ligning $f(x, y) = 0$. Han tenker seg at hastighetskomponentene i x - og y -retning er henholdsvis x' og y' (i sine første arbeider definerer han ikke disse størrelsene, men tar dem som intuitivt opplagte). Stigningstallet til kurven er da y'/x' , og oppgaven er altså å beregne denne størrelsen. For å gjøre dette, ser Newton på en partikkel som ved et gitt tidspunkt er i punktet (x, y) med hastighetskomponenter x' og y' . Øker vi tiden med en uendelig liten («infinitesimal») størrelse o , flytter partikkelen seg fra (x, y) til $(x + ox', y + oy')$ (siden tidsintervallet er uendelig lite, tillater Newton seg å regne som om hastigheten er konstant). Siden det nye punktet også ligger på kurven, er både $f(x, y)$ og $f(x + ox', y + oy')$ lik null, og vi har ligningen

$$f(x + ox', y + oy') - f(x, y) = 0. \quad (1)$$

Newton multipliserer nå ut alle parenteser og neglisjerer alle ledd som inneholder høyere potenser av o (fordi disse leddene er «uendelig små» sammenlignet med dem som bare inneholder o i første potens). Nå er ligningen blitt så enkel at han kan løse for y'/x' og finne svaret.

La oss prøve metoden på et eksempel. Vi ønsker å finne tangenten til sirkelen

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

i punktet (x, y) . I dette tilfellet er $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, og ligning (1) blir

$$(x + ox')^2 + (y + oy')^2 - 1 - (x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Multipliserer vi ut og forkorter, får vi

$$2xx'o + (x')^2o^2 + 2yy'o + (y')^2o^2 = 0.$$

Vi neglisjerer leddene som inneholder høyere potenser av o , og får

$$2xx'o + 2yy'o = 0.$$

Deler vi på $x'o$ og løser for y'/x' , ser vi at

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{x}{y}.$$

Denne metoden har en klar idé og gir riktig svar, men fra et logisk synspunkt er den problematisk – for å få regnestykket til å fungere må vi noen steder regne som om o er null (når vi neglisjerer høyere potenser av o), mens vi andre steder må anta at o ikke er null (når vi deler med $x'o$).

De samme vanskelighetene finner vi hos Leibniz som tenkte på den deriverte som en brøk dy/dx der dy er det tillegget vi får i y -verdi når vi øker x med den uendelig lille størrelsen dx . I sine egne skrifter var Leibniz ofte uvillig til å snakke om uendelig små størrelser fordi han fant dem vanskelige å begrunne, men hans etterfølgere var mindre forsiktige. Allerede i den første læreboken i integral- og differensialregning – L'Hôpitals *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* fra 1696 – har de uendelig små størrelsene fått hedersplassen i tittelen. Disse størrelsene ble kalt infinitesimaler, og *infinitesimalregning* ble snart en fellesbetegnelse for integral- og differensialregning.

Infinitesimalene var et nyttig regneredskap som gjorde det mulig å utvikle teknikker som raskt og effektivt ga løsningen på mange praktiske problemer. Teoretisk var de langt mer ubehagelige, og hverken Leibniz eller hans etterfølgere kunne forklare hva infinitesimaler egentlig var, eller hvordan de skilte seg fra de andre tallene. Dersom et reelt tall er det samme som et desimaltall, hvordan er da desimalutviklingen til en infinitesimal? I sitt fysikalske hovedverk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* er Newton omhyggelig med å forklare at for ham er alt snakk om infinitesimaler bare talemåter, og at det han egentlig tenker seg, er en grenseovergang hvor de forskjellige størrelsene går mot null.

I 1734 publiserte filosofen George Berkeley en kraftig kritikk av integral- og differensialregningen. Berkeley (som samme år ble utnevnt til biskop av Cloyne i Irland) hadde først og fremst et religiøst siktemål med sitt angrep – han ville overbevise fralme vitenskapsmenn om at matematikken var minst like full av mysterier og selvmotsigelser som teologien. Etter å vist frem en del av infinitesimallærens absurditeter med størrelser som av og til var null og andre ganger ikke, avsluttet han med å si at et en person som kunne fordøye alt dette, ikke samtidig kunne være kresen i teologiske spørsmål.

Berkeleys angrep satte fingeren på den nye matematikkens svake punkt, og hans spottende beskrivelse av deriverte som «gjenferd etter avdøde størrelser» skulle gi ubehagelige ekko i mange tiår. Integral- og differensialregningens praktiske suksess var så formidabel at ingen fornuftig matematiker kunne tenke seg å gi den opp, men mange innså behovet for et solidere fundament. En av de første som tok opp utfordringen, var den skotske matematikeren Colin MacLaurin (1698–1746). Hans *A Treatise of Fluxions* som ble publisert i 1742, var kanskje det første forsøket på å gi teorien et skikkelig grunnlag. Ulempen var bare at MacLaurin var så forsiktig og konservativ i sine begrunnelser at han ikke fikk fanget opp kraften og effektiviteten i de nye metodene, og boken hans fikk derfor liten innflytelse. Et annet lovende forsøk ble gjort av portugiseren José Anastácio da Cunha (1744–1787), men også hans *Principios Mathematicos* fikk liten innflytelse til tross for at den ble oversatt til fransk i 1811.

Først på 1800-tallet fikk integral- og differensialregningen et skikkelig grunnlag gjennom arbeidene til tre menn med ytterst ulike personligheter og karrierer: Bern-

hard Bolzano (1781–1848), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) og Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897).

Bernhard Bolzano var født i Praha hvor han studerte filosofi, matematikk og teologi. Han gjorde rask karriere som teolog og ble allerede i 1805 utnevnt til professor i religionsvitenskap i Praha. Han var kjent for sine radikale ideer, og i det reaksjonære klimaet etter Napoleons fall ble han i 1819 avsatt fra sitt professorat og førte senere et tilbaketrukket liv fordypet i filosofiske og logiske studier. Bare en liten del av hans produksjon ble publisert mens han levde, men mye er senere blitt brakt frem i lyset og viser at Bolzano var en dyp og original tenker som på en rekke punkter foregrip den senere utviklingen.

Allerede før avskjedigelsen hadde Bolzano fordypet seg i matematiske grunnlagsproblemer. I en avhandling fra 1817 innfører han det moderne kontinuitetsbegrepet og formulerer både kompletthetsprinsippet og prinsippet om at alle Cauchy-følger konvergerer (se seksjon *4.4). Siden det skulle gå ennå 50 år før man riktig forstod de reelle tallenes natur, måtte hans drøfting av disse prinsippene nødvendigvis bli ufullstendig, men godtar man forutsetningene, formulerer og beviser han skjæringssetningen på en riktig måte. I sine senere år fortsatte Bolzano studiet av analysens grunnlag, og i hans etterlatte notater har man både funnet et bevis for ekstremalverdisetningen og en konstruksjon av en kontinuerlig, men ingensteds deriverbar funksjon.

Bolzano levde isolert, publiserte lite og arbeidet med problemer som samtiden ennå ikke hadde oppfattet betydningen av. Selv om noen få var klar over innsatsen hans («Bolzano er en dyktig Karl», skriblet Abel i en av notatbøkene sine), fikk han liten innflytelse på ettertiden.



Figur 6.6.3. Augustin Louis Cauchy

Annerledes var det med Augustin-Louis Cauchy som holdt sine forelesninger ved det mest prestisjefylte lærestedet i Paris – på hans tid matematikkverdens ubestridte midtpunkt. Ved en skjebnens ironi ble Cauchy født i 1789, det året den store franske revolusjonen brøt ut. Selv om han var av borgerlig herkomst, skulle han hele livet føle seg knyttet til den aristokratiske samfunnsordenen som gikk under med revolusjonen. Faren var en innflytelsesrik administrator som til tross for sitt rojalistiske grunnsyn fortsatte å stige i gradene under de omskiftelige regimene, og Cauchy selv fikk landets fremste ingeniørutdanning ved den nye École Polytechnique. Mens han arbeidet som ingeniør ved et stort havneprosjekt i Cherbourg, begynte han å sende matematiske ar-

tikler til vitenskapsakademiet i Paris. Han ble fort lagt merke til, og i 1815 fikk han en stilling ved *École Polytechnique*. En av hans oppgaver var å forelese integral- og differensialregning for ingeniørstudentene, og siden han var misfornøyd med de vanlige lærebøkene, utarbeidet han sine egne fremstillinger som ble publisert i 1821 og 1823. Cauchy forkastet de tradisjonelle infinitesimalene, og baserte isteden fremstillingen på grensebegrepet. Uavhengig av Bolzano kom han frem til den moderne definisjonen av kontinuitet, og han var den første som beviste middelverdisetningen og forstod dens betydning.

Cauchys fremstilling var et revolusjonerende fremskritt som viste hvordan man ved hjelp av grensebegrepet kunne unngå de logiske problemene som infinitesimalene ledet til. Pedagogisk var den imidlertid ingen suksess – studentene klaget, og skolens administrasjon påla Cauchy å vende tilbake til den tradisjonelle undervisningsmetoden. Men for matematikere rundt om i verden kom Cauchys fremstilling til å danne skole.

Politisk og religiøst var Cauchy like reaksjonær som han var revolusjonær i matematikken. Etter Napoleons fall gikk makten i Frankrike tilbake til Bourbonfamilien, og i årene som fulgte ble det gjort utallige forsøk på å vende tilbake til tiden før revolusjonen. Ludvig XVIII (1815–1824) hadde virkelighetssans nok til å bremse utviklingen, men under hans bror Karl X (1824–1830) fikk de konservative kreftene fritt spill. Cauchy støttet denne utviklingen helhjertet, og da Karl X ble styrtet under juli-revolusjonen i 1830, nektet Cauchy å avlegge troskapsed til den nye kongen og forlot Frankrike. Han skulle ikke vende tilbake før i 1838.

De første årene i eksil levde Cauchy i Torino, men i 1833 flyttet han til Praha for å være privatlærer for hertugen av Bordeaux. Den 14 år gamle hertugen var ikke bare barnebarn av Karl X, men også Bourbonfamiliens nye tronpretendent. Valget av lærer var katastrofalt – Cauchy hadde aldri ry på seg for å være en stor pedagog, og hans forsøk på å holde disiplin ble effektivt kneblet av hans overdrevne respekt for elevens kongelige status. Da hertugen av Bordeaux avsluttet sin utdannelse i 1838, hadde han fått varig avsmak for matematikk, og Cauchy hadde kastet bort noen av sine beste år på en oppgave han ikke hadde forutsetninger for å løse. Under sitt opphold i Praha hadde Cauchy for øvrig et kort møte med Bolzano, men dette møtet ser ut til å ha blitt like resultatløst som Cauchys lærergjerning.

Da Cauchy vendte tilbake til Paris i 1838, hadde han mistet sitt professorat ved *École Polytechnique*, men var fortsatt medlem av vitenskapsakademiet. I årene som fulgte prøvde han på forskjellig vis å skaffe seg en ny stilling, men det var først etter februarrevolusjonen i 1848 at han igjen fikk en ledende posisjon ved et universitet. Han fortsatte å arbeide aktivt med matematikk helt til sin død i 1857.

Cauchy var en sammensatt og motsetningsfull person. Som matematiker er han en av tidenes største og mest produktive – arbeidet med analysens grunnlag utgjør bare en liten del av hans innsats, og ellers huskes han best for teorien om komplekse funksjoner og for sine fundamentale bidrag til kontinuumsmekanikken. Like idérisk og fantasifull som han var som matematiker, like trangsynt og dogmatisk var han i andre spørsmål. Han oppfattet utvilsomt seg selv som en mann med høye idealer og strenge prinsipper, men i sin omgang med andre var han ofte smålig og skjødesløs, og mange vitenskapelige oppdagelser gikk tapt eller ble forsinket fordi Cauchy rotet bort manuskriptene eller utnyttet dem til egen fordel.

Cauchys forelesninger var et enormt fremskritt i forhold til tidligere fremstillinger, men de løste slett ikke alle grunnlagsproblemene i integral- og differensialregningen.

Som vi så i seksjon 2.5, skulle det enda gå drøye 40 år før man virkelig fikk et godt tak på de reelle tallene. Også forståelsen av kontinuerlige funksjoner var svært mangelfull – de fleste lærebokforfattere trodde (og «beviste»!) at enhver kontinuerlig funksjon var deriverbar bortsett fra i et endelig antall knekkpunkter. Gjennom studiet av trigonometriske rekker (som hadde vokst naturlig frem av Fouriers arbeider) begynte matematikerne å ane nye klasser av funksjoner med helt andre egenskaper enn det de var vant til, men for å forstå disse funksjonene måtte de oppgi sine intuitive metoder og bruke skarpere analyseverktøy.

Hovedpersonen i denne utviklingen er Karl Weierstrass. I sine forelesninger i Berlin viste han hvordan analysen kunne bygges opp ved hjelp av strengt logiske virkemidler. Han innførte ϵ - δ -definisjonene, formulerte og beviste ekstremalverdisetningen, og ga det første eksemplet på en kontinuerlig, ingensteds deriverbar funksjon som ble offentlig kjent. I kapittel 11 skal vi møte et annet nøkkelbegrep som går tilbake til Weierstrass – uniform konvergens. Men viktigere enn enkeltresultatene er ånden i Weierstrass' forelesninger; han godtok ingen tvil – her skulle alt undersøkes til bunns. «Stringens i Weierstrassk forstand» ble et begrep blant matematikere.

Weierstrass var født i Ostenfelde i Tyskland i 1815. Faren arbeidet i statsadministrasjonen og ville at sønnen skulle følge i hans fotspor. Den unge Karl begynte derfor på et juridisk og administrativt studium i Bonn, men han viste snart større interesse for øl og fest enn for jus og administrasjon. Innimellom kneipebesøkene leste han matematikk på egen hånd. Etter 8 semester forlot han administrasjonstudiet uten eksamen. Familien hadde ikke råd til å koste på ham nok en langvarig utdanning, og Weierstrass tok et ettårig lærerstudium for å sikre seg et yrke. Fra 1842 til 1855 var han gymnasielærer forskjellige steder i Preussen, men ved siden av læreryrket fortsatte han med sine matematikkstudier. Weierstrass' arbeidskapasitet var enorm, og en typisk historie forteller at da han en gang ikke møtte til første time, fant skoleinspektøren ham sittende ved skrivebordet bak gjentrukne gardiner – han hadde arbeidet hele natten og ikke merket at en ny dag var begynt.

I disse årene konsentrerte Weierstrass seg om ideer som gikk tilbake til Abel og Jacobi. Han fant tidlig viktige resultater, men som isolert skolelærer i provinsen var han usikker på deres verdi, og først i 1854 publiserte han sitt store arbeid om abelske funksjoner. Avhandlingen ble en sensasjon; Weierstrass fikk et æresdoktorat i Königsberg og ble raskt kallet til en universitetsstilling i Berlin.

Weierstrass' enorme arbeidsinnsats hadde forvandlet ham fra en anonym skolelærer til en berømt matematiker, men den hadde også kostet mye. Etter et sammenbrudd i 1861 fikk han store helseproblemer og måtte gi sine forelesninger sittende mens en student skrev på tavlen. Allikevel skulle disse forelesningene komme til å prege en ny generasjon matematikere.

Weierstrass var raus med sine ideer. Mye av det han viste i forelesninger og på seminarer, publiserte han aldri, men overlot til sine studenter å videreføre og bearbeide. Han var alltid villig til å diskutere andres resultater og problemer, og han opparbeidet etter hvert et uovertruffet ry som universitetslærer. Mange av de ledende matematikerne i neste generasjon hadde hatt Weierstrass som lærer eller inspirator.

En spesiell plass blant Weierstrass' studenter har den russiske matematikeren Sofja Kovalevskaja (1850–1891). Som kvinne hadde hun ikke adgang til Universitetet i Berlin, og mye av Weierstrass' undervisning måtte foregå privat. Innsatsen betalte seg – i 1874 ble Sofja Kovalevskaja den første kvinnen som tok doktorgraden i matematikk, og i 1884 ble hun den første kvinnelige professoren i matematikk i moderne tid (tid-

ligere hadde Hypatia (ca. 370–415) hatt en lærerstilling ved Akademiet i Alexandria og Maria Agnesi (1718–1799) et professorat i Bologna). Weierstrass og Kovalevskaja fortsatte å korrespondere, og det var et hardt slag for ham da hun døde av lungebetennelse i 1891 (du vil finne mer informasjon om Sofja Kovalevskaja i seksjon 10.9).

I sine siste år var Weierstrass lenket til rullestol, men han fortsatte å arbeide med matematikk til sin død i 1897.

Med Weierstrass' arbeider forsvant de siste restene av infinitesimalen fra matematikken. De fleste trodde nok at infinitesimalene var borte for godt, men i 1960 oppdaget Abraham Robinson (1918–1974) en stringent måte å innføre dem på. I Robinsons *ikke-standard analyse* utvides mengden av reelle tall \mathbb{R} til en større mengde ${}^*\mathbb{R}$ som også omfatter uendelig små og uendelig store tall. I denne utvidelsen kan man regne med tall og funksjoner akkurat som i \mathbb{R} . I tillegg til å gi en alternativ presisering av grunnleggende analyse, har Robinsons teori utviklet seg til å bli et effektivt forskningsverktøy på en rekke områder.

Grundigere drøftinger av utviklingen ovenfor finner du i bøkene til Edwards [6] og Grattan-Guinness [7], og du vil også finne mye informasjon i generelle matematikkhistorier som [8] og [4]. Mejlbos artikkel [11] inneholder en systematisk gjennomgang av Bolzanos, Cauchys og Weierstrass' bidrag til de sentrale resultatene i dette og forrige kapittel. Ønsker du å se nærmere på originallitteraturen, finner du en del instruktive utdrag hos Struik [13]. Robinsons ikke-standard analyse kan du lese om i artiklene [12] og [10].

På biografisiden gir Belhostes bok [1] et utall opplysninger om Cauchy og hans samtid, men stor underholdningslitteratur er den avgjort ikke. Weierstrass og Kovalevskaja har fått et kapittel i Bells bok [2], men mer pålitelig er nok Biermanns artikkel [3] om Weierstrass og Koblitz' [9] biografi av Kovalevskaja. Daubens bok om Abraham Robinson [5] er interessant innledningsvis, men taper seg etter hvert.

Litteratur

- [1] Belhoste, Bruno: *Augustin-Louis Cauchy. A Biography*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] Bell, E.T.: *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York, 1961.
- [3] Biermann, Kurt-R.: «Karl Weierstrass», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 223 (1966), 191–220.
- [4] Boyer, C.B. og U. Merzbach: *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1989.
- [5] Dauben, J.W.: *Abraham Robinson*, Princeton University Press, Princeton, 1995.
- [6] Edwards, C.H.: *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [7] Grattan-Guinness, Ivor: *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT-Press, Cambridge, Mass., 1970.
- [8] Katz, Victor J.: *A History of Mathematics*, HarperCollins, New York, 1993.
- [9] Koblitz, Ann Hibner: *A convergence of lives. Sofia Kovalevskaja: Scientist, Writer, Revolutionary*, Birkhäuser, Boston, 1983.

- [10] Lindstrøm, Tom: «Uendelig små og store tall», *NORMAT* 44, 1996.
- [11] Mejlbo, Lars C.: «Nogle fundamentale sætninger om reelle tall og deres historie», *NORMAT* 25–26 1978, 57–69.
- [12] Mejlbo, Lars C.: «Om ikke-standard analyse», *NORMAT* 29, 1981.
- [13] Struik, Dirk J.: *A Source Book in Mathematics 1200–1800*, Princeton University Press, Princeton, 1986.

7 Anvendelser og utvidelser

The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift we neither understand nor deserve.

— Eugene P. Wigner (1902–1995),
The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences

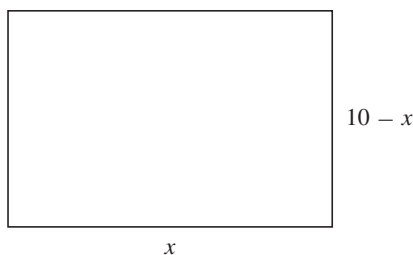
I den første delen av dette kapitlet skal vi se hvordan differensialregningen kan brukes til å løse praktiske problemer. I den andre delen skal vi utvide vårt repertoar av funksjoner til å omfatte to nye klasser – arcusfunksjoner og hyperbolske funksjoner.

7.1 Maksimums- og minimumsproblemer

Vi vet hvordan vi kan bruke derivasjon til å finne minimums- og maksimumsverdier til funksjoner. Det finnes en lang rekke praktiske problemer hvor vi også ønsker å finne et maksimum eller et minimum – vi kan for eksempel være interessert i å produsere en vare på en slik måte at profitten blir størst mulig, eller vi kan forsøke å gjennomføre en oppgave på kortest mulig tid. For å løse slike problemer behøver vi ikke nye matematiske teknikker, men vi trenger trening i å omformulere praktiske problemer i matematiske termer slik at vi kan få brukt de teknikkene vi allerede kjenner. Hensikten med denne seksjonen er å gi den nødvendige treningen gjennom et utvalg eksempler og oppgaver. La oss begynne med et svært enkelt problem.

7.1.1 Eksempel

Du har en 20 cm lang ståltrådbit som du ønsker å bøye sammen til et rektangel. Hvordan skal du bøye for at arealet til rektanget skal bli størst mulig?



Figur 7.1.1.

Figur 7.1.1 viser et av de mulige rektanglene. I dette tilfellet har vi bøyd slik at grunnlinjen får lengde x cm. Toppkanten har dermed også lengde x , og følgelig er det $20 - 2x$ cm igjen til de to sidekantene. Hver sidekant har derfor lengde $10 - x$ cm. Arealet til rektanget (målt i kvadratcentimeter) er dermed

$$A(x) = x(10 - x).$$

Vi ser at dette arealet avhenger av hvor lang vi har valgt grunnlinjen x . For å finne det maksimale arealet, er det nok å finne maksimumsverdien til funksjonen $A(x)$. Legg merke til at vi bare er interessert i x -verdier som ligger mellom 0 og 10; vi kan opplagt ikke ha en negativ grunnlinje, og velger vi grunnlinjen lengre enn 10, er det ikke nok ståltråd til å fullføre rektanget. Vi har dermed fått omskrevet vårt opprinnelige problem i en matematisk språkdrakt – det vi ønsker er å finne maksimumspunktet til funksjonen $A(x) = x(10 - x)$ over intervallet $[0, 10]$.

Deriverer vi, ser vi at

$$A'(x) = 10 - 2x.$$

Følgelig er $A'(x) = 0$ for $x = 5$, og fortegnet til $A'(x)$ er positivt når x går fra 0 til 5, og negativt når x går fra 5 til 10. Dette betyr at A har sin maksimumsverdi for $x = 5$, og denne verdien er $A(5) = 5(10 - 5) = 25$.

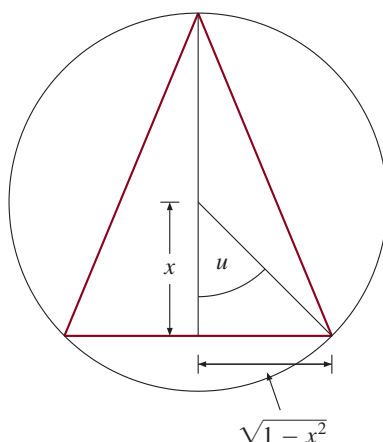
Det største arealet får vi altså ved å bøye ståltråden slik at rektanget blir et kvadrat med side 5 cm. ■

Erfaringen viser at det bare er ett trinn i eksemplet ovenfor som er vanskelig å klare på egen hånd – og det er å tegne figur 7.1.1 og kalle den ene siden for x ! Dette er også det viktigste trinnet fordi det er det som gjør det mulig å oversette det opprinnelige problemet til en matematisk formel. Før vi har innført et navn på den ene siden, har vi ikke noe å regne med. Av en eller annen grunn er dette et vanskelig psykologisk skritt for mange – de synes kanskje ikke de har rett til å tukle til problemet med sine egne betegnelser. Dette er en følelse man må forsøke å overvinne; i de fleste problemer av denne typen er nøkkeltrinnet nettopp det å sette navn på en karakteristisk størrelse.

La oss se på et litt vanskeligere eksempel.

7.1.2 Eksempel

Hva er det største arealet en likebeint trekant kan ha dersom den er innskrevet i en sirkel med radius 1? (Husk at en trekant er *likebeint* dersom to av sidene er like lange, og at en trekant er *innskrevet* i en sirkel dersom alle hjørnene ligger på sirkelomkretsen.)



Figur 7.1.2.

Figur 7.1.2 viser situasjonen. Igjen er nøkkelskrittet å sette navn på en størrelse som forteller oss hvilken av de mange mulige trekantene vi ser på. På figuren har vi valgt å kalle avstanden fra sirkelsentret ned til grunnlinjen for x . Vi ser at høyden i trekanten blir $1 + x$. Bruker vi Pythagoras, ser vi også at halve grunnlinjen er $\sqrt{1 - x^2}$. Dermed blir arealet av trekanten

$$A(x) = (1 + x)\sqrt{1 - x^2}.$$

Legg også merke til at x må ligge mellom -1 og 1 .

Vår oppgave er altså å finne den maksimale verdien til funksjonen $A(x)$ på intervallet $[-1, 1]$. Deriverer vi, får vi

$$\begin{aligned} A'(x) &= \sqrt{1 - x^2} + (1 + x)\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}(1 - x^2 - x - x^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}(1 - x - 2x^2). \end{aligned}$$

Annengradsligningen $2x^2 + x - 1 = 0$ har røttene $1/2$ og -1 , og ved å drøfte fortegnet til den deriverte, ser vi at $A(x)$ har sitt maksimum for $x = 1/2$. Det maksimale arealet blir dermed

$$A(1/2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

■

Bemerkning

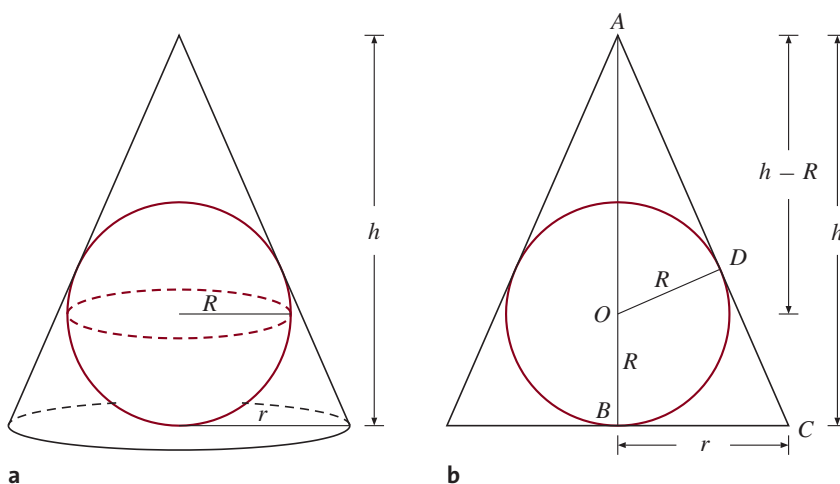
Når $x = 1/2$, er det lett å se at vinkelen u (se figur 7.1.2) er $\pi/3$ (regn ut $\cos u$). Fra dette følger det lett at trekanten er likesidet. Den største likebeinte trekanten som kan innskriveres i en gitt sirkel er altså den likesidete. Det viser seg faktisk at den like-sidete trekanten er den største av alle innskrevne trekanter (likebeinte eller ikke). Se oppgave 12.

Vi kunne ha løst oppgaven i eksempel 7.1.2 på andre måter også, for eksempel ved å bruke vinkelen u i stedet for linjestykket x . Hvilken variabel vi velger, spiller i prinsippet ikke noen rolle, men i praksis kan det ha stor betydning for hvor kompliserte regningene blir.

Det neste eksemplet er vanskeligere, men problemene vi støter på underveis, er ganske typiske.

7.1.3 Eksempel

En kule med radius R er innskrevet i en regulær kjegle. Hva er det minste volumet kjeglen kan ha?



Figur 7.1.3.

Figur 7.1.3a viser en romtegning av situasjonen, men det plane snittet i 7.1.3b er enklere å arbeide med. Før vi begynner, er det kanskje lurt å minne om at volumet til en regulær kjegle er gitt ved

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

der r er radien i grunnflaten og h er høyden.

Vi skal la h være variabelen vår. Fra formelen $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ ser vi at dersom vi kan uttrykke r ved hjelp av h , så blir V en funksjon av h som kan deriveres på vanlig måte. For å finne sammenhengen mellom h og r , ser vi på de formlike trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle ADO$. Vi bruker først Pythagoras' læresetning til å regne ut at $AD = \sqrt{(h - R)^2 - R^2} = \sqrt{h^2 - 2hR}$. Siden trekantene er formlike, ser vi så at

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DO},$$

det vil si

$$\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{h^2 - 2hR}}{R}.$$

Løser vi for r , får vi

$$r = \frac{hR}{\sqrt{h^2 - 2hR}}.$$

Setter vi dette inn i formelen for V , ser vi at

$$V(h) = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{3(h^2 - 2hR)} = \frac{\pi R^2 h^2}{3(h - 2R)}.$$

Dermed har vi kvittet oss med r og uttrykt V som en funksjon av h . Deriverer vi med hensyn på h (husk at R er en konstant), får vi

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} R^2 \frac{2h(h - 2R) - h^2}{(h - 2R)^2} = \frac{\pi}{3} R^2 \frac{h(h - 4R)}{(h - 2R)^2}.$$

Fra det opprinnelige, geometriske problemet ser vi at $h > 2R$. Det eneste kritiske punktet for funksjonen er dermed $h = 4R$, som er et minimumspunkt. Dette betyr at kjeglen har minst volum når $h = 4R$, og at det minimale volumet er

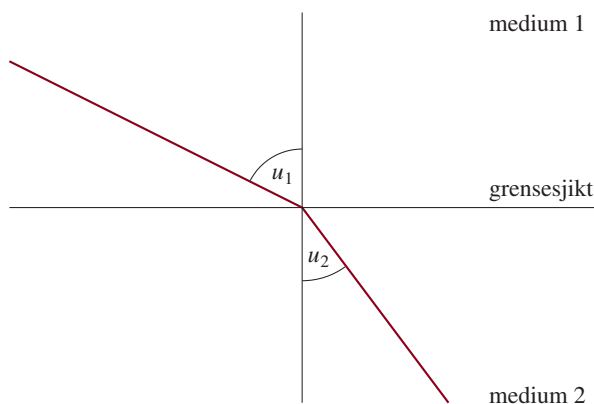
$$V(4R) = \frac{8}{3} \pi R^3,$$

altså nøyaktig det dobbelte av volumet til kulen! ■

De eksemplene vi hittil har sett på, er ikke av så stor interesse eller betydning i seg selv. De er valgt for å illustrere de vanligste teknikkene på problemer av passelig vanskelighetsgrad. Det siste eksemplet vi skal se på, er imidlertid av stor betydning i fysikken og viser hvordan vi kan utlede en presis fysisk lov fra et generelt prinsipp.

7.1.4 Eksempel (Snells brytningslov)

En lysstråle som passerer fra et medium til et annet (for eksempel fra luft til glass eller fra luft til vann), brytes i grensesjiktet mellom de to mediene. Hvor stor brytningen er, bestemmes av lyshastigheten i mediene. Den nederlandske matematikeren og fysikeren Willebrord Snell van Royen (1591–1626) fant en eksperimentell lov for hvor stor brytningen er.



Figur 7.1.4.

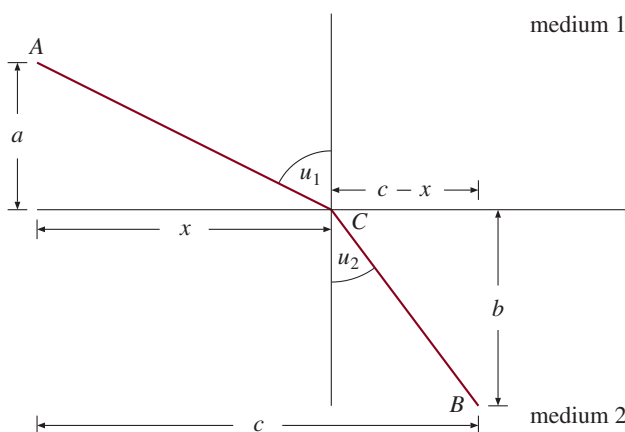
Lar vi u_1 og u_2 være vinklene mellom lysstrålen og normalen til grensesjiktet før og etter brytning (se figur 7.1.4), sier Snells brytningslov at

$$\frac{\sin u_1}{\sin u_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

der v_1 og v_2 er lyshastigheten i de to mediene. (Historisk sett jukser vi litt her; på Snells tid var det selvfølgelig umulig å måle lyshastigheter, og alt Snell observerte var at forholdet $\sin u_1 / \sin u_2$ var lik en konstant $n_{1,2}$ som avhang av hvilke medier han brukte, men ikke av vinklene u_1 og u_2 . Denne konstanten $n_{1,2}$ kalles *brytningsindeksen* mellom mediene. Det var først senere man ble klar over at $n_{1,2}$ var lik forholdet mellom lyshastighetene.)

I dette eksemplet skal vi se hvordan Snells lov kan utledes fra et generelt prinsipp for hvordan lys oppfører seg. Dette generelle prinsippet kalles *Fermats prinsipp*, og det sier at på sin vei mellom to punkter vil lyset alltid følge en bane som minimaliserer reisetiden. Sammenligner vi altså den tiden som lyset faktisk bruker, med den tiden det ville ha brukt dersom det hadde valgt en annen, men nærliggende bane, så viser det seg at lyset har valgt den raskeste reisemåten.

For å utlede Snells brytningslov, tenker vi oss at lystrålen som starter i punkt A i figur 7.1.5 går gjennom punkt B . Vår oppgave er å bestemme hvilken bane den følger fra A til B . I hvert av mediene følger lysstrålen en rett linje, så for å bestemme lysets bane, er det nok å bestemme punktet C hvor lysstrålen passerer fra det ene mediet til det andre.



Figur 7.1.5.

Dette punktet er bestemt av avstanden x . La oss regne ut tiden lyset trenger for å komme fra A til B . For å komme fra A til C , må strålen tilbakelegge en avstand $\sqrt{a^2 + x^2}$. Hvis farten i det øverste mediet er v_1 , blir tiden fra A til C

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1}.$$

For å komme fra C til B , tilbakelegger strålen en avstand $\sqrt{b^2 + (c-x)^2}$. Hvis farten i det nederste mediet er v_2 , blir tiden fra C til B

$$t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}.$$

Den totale tiden blir dermed

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}.$$

Ifølge Fermats prinsipp skal vi velge x slik at $t(x)$ blir minst mulig. Deriverer vi uttrykket for $t(x)$, får vi

$$t'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Skal $t(x)$ ha et minimum, må $t'(x) = 0$, det vil si

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Går vi tilbake til figur 7.1.5, ser vi at

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin u_1 \quad \text{og} \quad \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \sin u_2.$$

Setter vi dette inn i uttrykket vi har funnet, får vi

$$\frac{\sin u_1}{v_1} = \frac{\sin u_2}{v_2}$$

som gir Snells brytningslov

$$\frac{\sin u_1}{\sin u_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

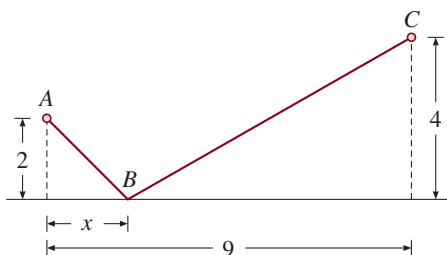
når vi omgrupperer litt. Dette viser at for å bruke minimal tid, må lyset følge den banen som Snells lov tilsier. ■

Bemerkning

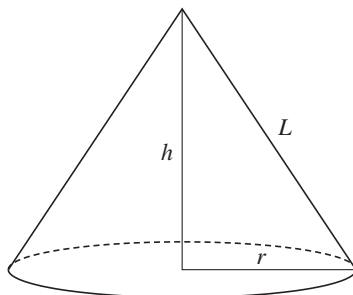
Fermats prinsipp er et eksempel på det som kalles *variasjonsprinsipper*. Et variasjonsprinsipp sier at stilt overfor en rekke forskjellige muligheter, velger naturen den som maksimaliserer eller minimaliserer en viss størrelse (i Fermats prinsipp minimaliseres gangtiden). Det viser seg at en rekke fundamentale lover i fysikken kan formuleres som variasjonsprinsipper, og fysikernes oppgave blir da å utlede mer spesialiserte lover fra disse grunnleggende prinsippene. Vår utledning av Snells lov fra Fermats prinsipp er et enkelt eksempel på et slikt argument.

Oppgaver i seksjon 7.1

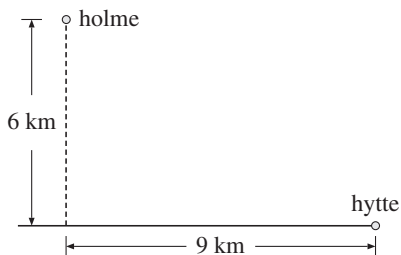
1. Du skal lage en rektangulær innhegning til hesten din. Den ene siden av innhegningen dekkes av låven og på de tre andre sidene skal du bygge gjerde. Hva er det største arealet innhegningen kan ha dersom du har materialer til 50 m gjerde?
2. En fabrikk produserer sylindereformede blykkbokser. Materialet som brukes i den krumme sideflaten er dobbelt så dyrt som det som brukes i bunn- og toppflaten. Boksene skal ha et volum på 1 dm^3 , og fabrikkens ønsker å lage dem så billig som mulig. Hvor stor skal høyden og radien være?
3. Hvor langt skal linjestykket x på figuren være for at avstanden fra A til C via B skal bli minst mulig? (Det finnes et elegant geometrisk argument der du slipper å regne, se oppgave 18.)



4. En bil bruker $2 + 0.08v^2$ liter bensin per time når den kjører med en fart av v mil per time. Ved hvilken hastighet bruker bilen minst bensin per mil, og hva er forbruket?
5. (NTNU) En rett sirkulær kjegle har en sidekant med lengde $L = 9$. Hva er det maksimale volumet av en slik kjegle?



6. (NTNU) En holme ligger 6 km fra strandkanten. 9 km fra det punktet på stranden som er nærmest holmen, ligger det en hytte. Hvis man ror med en fart av 3 km/t og går med en fart av 5 km/t, hva er den korteste tiden man kan bruke fra holmen til hytta?

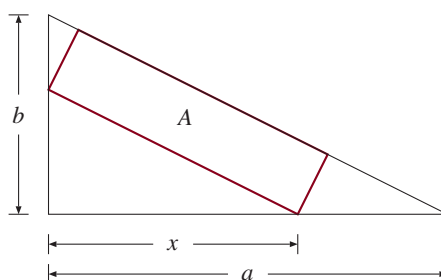


7. (NTNU) En renne skal lages av et rektangulært stykke blikk som er 60 cm bredt, ved at man bøyer opp en vinkel θ på hver side. Tverrsnittet av rennen skal være et trapes der tre av sidene («blikksidene») er like lange:

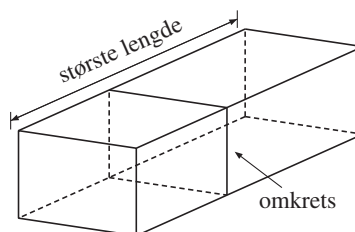


Hvilken verdi av θ vil maksimalisere arealet og dermed volumet av rennen?

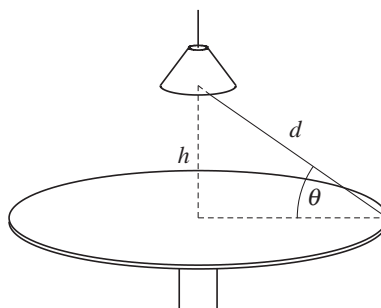
8. (UiO) Betrakt et rektangel A innskrevet i en rettvisklet trekant som vist på figuren. Finn arealet av A uttrykt ved x , og finn den verdien av x som gjør arealet størst mulig.



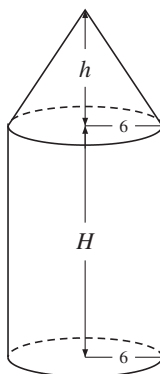
9. a) (NTNU) Vis at det største rektangulære arealet som kan lages med en gitt omkrets c , er et kvadrat.
- b) For forsendelser av særpakker har postverket følgende regel: Summen av omkretsen og største lengde må ikke overskride 300 cm. Finn dimensjonene på den største «rektangulære» pakken som kan sendes som særpakke.



10. (NTNU) En lampe skal henges opp over sentret av en sirkulær bordplate med radius 1 slik at belysningen langs bordkanten blir maksimal. Dersom belysningen er proporsjonal med $\sin \theta$ og omvendt proporsjonal med d^2 , hvor høyt over bordet skal lampen henge?

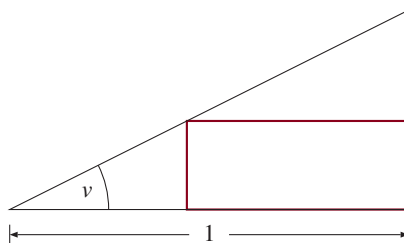


11. (NTNU) En silo har form som en rett, sirkulær sylinder med radius 6 m og har en rett, sirkulær kjegle (med samme radius) på toppen.

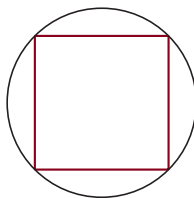


Hvis sideflatene i sylindere og kjeglen til sammen skal være 200 m^2 , hva må høydene H og h i sylindere og kjeglen være for at volumet skal bli så stort som mulig?

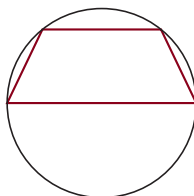
12. a) La A og B være to punkter på en sirkel. Vis at blant alle de innskrevne trekantene med A og B som hjørner, er det en likebeint som har størst areal.
- b) Vis at blant alle innskrevne trekant er det den likesidede som har størst areal.
13. (UiO) Figuren viser et rektangel innskrevet i en rettvinklet trekant. Hva er det største arealet et slikt rektangel kan ha?



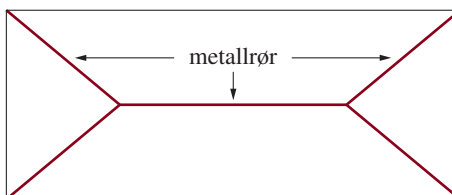
14. (UiO) Hva er det største arealet til et rektangel som kan innskrives i en sirkel med radius r (se figuren)?



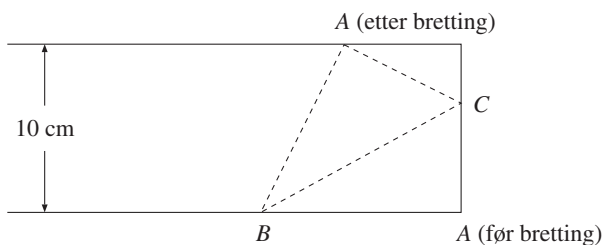
15. (UiO) På figuren ser du en sirkel med radius r . Et trapes er tegnet inn i sirkelen slik at grunnlinjen til trapeset er en diameter i sirkelen. De to andre hjørnene til trapeset ligger på sirkelomkretsen. Finn det største arealet et slikt trapes kan ha.



16. (UiO) På figuren ser du undersiden av en rektangulær bordplate. Bordplaten er 3 meter lang og 1 meter bred. Den er forsterket av metallrør som går midt under bordet og ut til hvert hjørne slik du ser på figuren. Firmaet som produserer bordene, ønsker at den totale lengden til rørene skal være så liten som mulig. Hva er det minste denne lengden kan være?

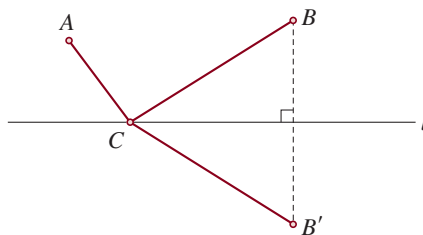


17. Du har en lang papirstripe som er 10 cm bred. Du ønsker å brette det nedre hjørnet A opp på den øverste kanten slik at brettekanten BC blir kortest mulig (se figuren). Hva er den minste lengden BC kan ha?

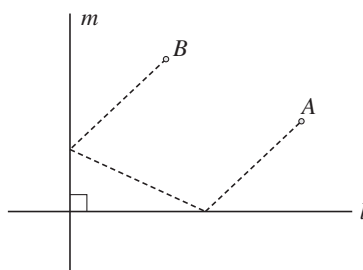


18. I denne og den neste oppgaven skal vi se litt på hvordan vi kan løse geometriske minimaliseringsproblemer uten å derivere.

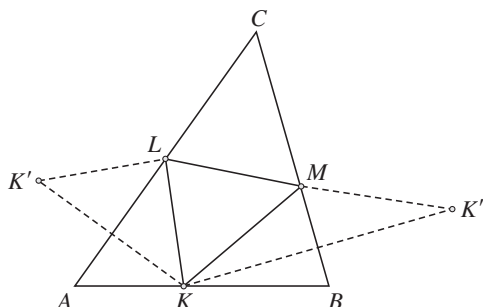
- a) Anta at A og B er to punkter som ligger på samme side av en linje l . La C være et punkt på l , og la B' være speilingen av B om l (se figur). Vis at avstanden fra A til B via C er lik avstanden fra A til B' via C . Hvor skal C ligge for at denne avstanden skal være minst mulig?



- b) La l og m være to linjer som står normalt på hverandre, og la A og B være to punkter som vist på figuren. Du ønsker å gå fra A til B via l og m på kortest mulig måte. Finn en geometrisk løsning av dette problemet ved å speile B på en smart måte.



19. La $\triangle ABC$ være en trekant med spisse vinkler.



Vi skal finne den innskrevne trekanten $\triangle KLM$ som har minst omkrets.

- Velg et punkt K på linjestykket AB og speil punktet K om AC og BC som vist på figuren. Speilingspunktene kalles K' og K'' . Vis at omkretsen til $\triangle KLM$ er lik lengden til den brukne stien $K'LMK''$. Hvor må L og M ligge for at omkretsen til $\triangle KLM$ skal være minst mulig?
- Vis at trekantene $\triangle K'CK''$ alltid har samme form uansett hvilket punkt K på AB vi har valgt. Vis at trekanten er minst når avstanden KC er minst.
- Vis at dersom $\triangle KLM$ er den innskrevne trekanten med minst omkrets, så er K punktet der normalen fra C treffer linjestykket AB . Hvor ligger L og M ?
- Hva skjer med argumentet ovenfor dersom en av vinklene i ABC er stump?

7.2 Koblede hastigheter

En av grunnene til at differensialregningen er så viktig i fysikk og ingeniørfag, er at hastighet og akselerasjon er henholdsvis den første- og annenderiverte av posisjonen med hensyn på tiden. Ethvert problem som inneholder hastighet og akselerasjon, kan derfor naturlig formuleres ved hjelp av deriverte. I dette avsnittet skal vi ta en titt på en type problemer som omhandler *to* hastigheter – én vi kjenner og én vi ønsker å finne. Men før vi går løs på disse problemene, kan det være lurt å minne litt om den generelle sammenhengen mellom derivasjon og hastighet.

Anta at en partikkel forflytter seg langs en rett linje, og at $x(t)$ er avstanden den har til startpunktet ved tiden t . Vi skal regne avstanden med fortegn slik at $x(t)$ er positiv dersom partikkelen er på den ene siden av startstedet og negativ på den andre.

Hastigheten til partikkelen ved tiden t er rett og slett definert som den deriverte $x'(t)$. Siden

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

er den gjennomsnittlige hastigheten i intervallet $[t, t + \Delta t]$, og

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

ser vi at dette er en rimelig definisjon. Legg merke til at $x'(t)$ er positiv dersom partikkelen er på vei i positiv retning, og negativ dersom den er på vei i negativ retning.

Akselerasjonen til partikkelen ved tiden t er definert til å være den dobbeltderiverte $x''(t)$. Akselerasjonen er et mål på hvor fort hastigheten endrer seg.

Som sagt handler de problemene vi skal se på om to hastigheter – en kjent og en ukjent. Disse to hastighetene er sammenkoblet på en slik måte at vi kan regne oss fra den ene til den andre. Det er lettest å forstå dette ved å se på et eksempel.

7.2.1 Eksempel

En 5 meter lang stige står lent mot en husvegg. Vi drar den nederste enden av stigen vannrett utover med en fart av 2 m/s mens den andre enden glir nedover husveggen. Hvor fort glir den øverste enden nedover når den nederste enden er 4 meter fra husveggen?

Figur 7.2.1 viser stigens posisjon ved tiden t . Den nederste enden er $x(t)$ meter fra husveggen, mens den øverste er $y(t)$ meter over bakken. Siden stigen er 5 meter lang, forteller Pythagoras oss at

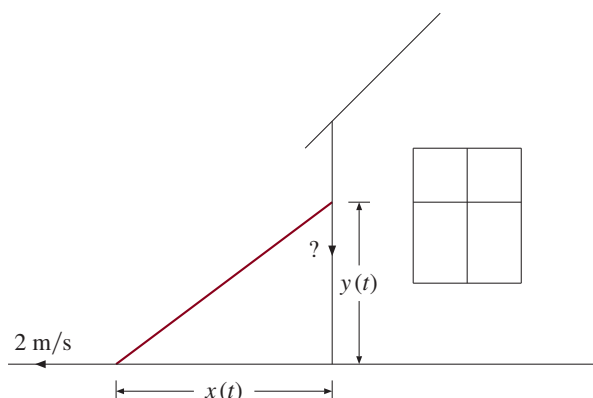
$$x(t)^2 + y(t)^2 = 25. \quad (1)$$

Vi vet at $x'(t)$ er 2 m/s, og vi ønsker å finne $y'(t)$. Dessverre inneholder ikke ligning (1) noen av disse størrelsene, men ved hjelp av et lite triks kan vi få smuglet dem inn: Deriverer vi med hensyn på t på begge sider av ligningen, får vi

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

(på venstresiden bruker vi kjerneregelen på hvert av uttrykkene $x(t)^2$ og $y(t)^2$, og på høyresiden bruker vi rett og slett at den deriverte til en konstant er null). Poenget er at vi nå har en ligning som inneholder både den kjente hastigheten $x'(t)$ og den ukjente $y'(t)$. Løser vi for den ukjente, får vi

$$y'(t) = -\frac{x(t)x'(t)}{y(t)}.$$



Figur 7.2.1.

Vi er interessert i hastigheten i det tidspunktet hvor $x(t) = 4$ m. Siden $x(t)^2 + y(t)^2 = 25$, blir $y(t)^2 = 25 - x(t)^2 = 25 - 16 = 9$. Altså er $y(t) = 3$ m, og vi får

$$y'(t) = -\frac{x(t)x'(t)}{y(t)} = -\frac{4 \cdot 2}{3} \text{ m/s} = -\frac{8}{3} \text{ m/s}.$$

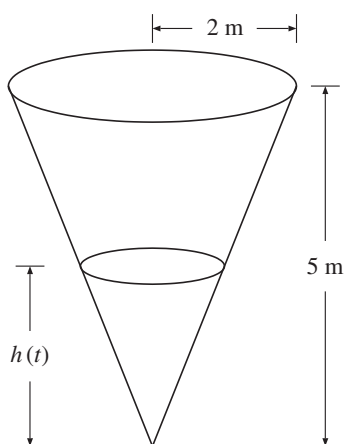
Den øverste stigeenden glir altså nedover husveggen med en fart av $\frac{8}{3}$ m/s. Legg merke til at siden y minker, er $y'(t)$ negativ. ■

La oss ta et eksempel til før vi begynner å filosofere over løsningsmetoden.

7.2.2 Eksempel

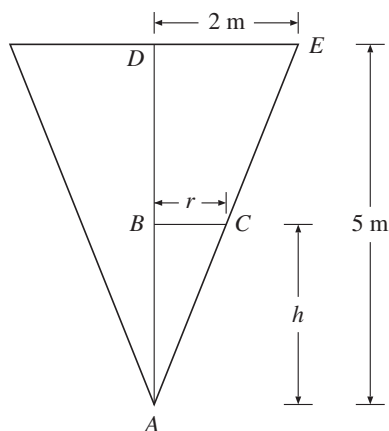
En kjegleformet tank står med spissen ned. Høyden til tanken er 5 meter, og radien på toppen er 2 meter. Vann pumpes inn i tanken med en fart av 0.1 m^3 per minutt. Vi ser på tanken i det øyeblikket vannet står 3 meter høyt, og lur på hvor fort vannstanden øker.

Også i denne oppgaven har vi én kjent og én ukjent hastighet. Den kjente hastigheten er farten tanken fylles med ($0.1 \text{ m}^3/\text{min.}$), og den ukjente er farten vannstanden øker med. Kaller vi volumet ved tiden t for $V(t)$, og lar $h(t)$ betegne vannstanden ved samme tidspunkt, ser vi at den kjente hastigheten er $V'(t)$ og den ukjente er $h'(t)$. Vi må finne en forbindelse mellom disse to størrelsene.



Figur 7.2.2.

Figur 7.2.2 viser situasjonen når vannstanden er h meter. For å finne hva volumet av vannet er, må vi først finne radien til vannspeilet.



Figur 7.2.3.

Siden de to trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle ADE$ i figur 7.2.3 er formlike, ser vi at

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD},$$

det vil si

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{5},$$

som gir $r = 2h/5$. Volumet av vannet blir dermed

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \left(\frac{2h}{5} \right)^2 h = \frac{4\pi h^3}{75}. \quad (2)$$

Denne relasjonen gjelder for alle tidspunkt t , og deriverer vi på begge sider med hensyn på tiden, får vi

$$V'(t) = \frac{4\pi \cdot 3h(t)^2 h'(t)}{75} = \frac{4\pi h(t)^2 h'(t)}{25}.$$

Løser vi med hensyn på den ukjente hastigheten $h'(t)$, ser vi at

$$h'(t) = \frac{25V'(t)}{4\pi h(t)^2}.$$

I vår situasjon er $V'(t) = 0.1 \text{ m}^3/\text{min}$ og $h(t) = 3 \text{ m}$. Altså er

$$h'(t) = \frac{25 \cdot 0.1}{4\pi \cdot 3^2} \text{ m/min} = \frac{2.5}{36\pi} \text{ m/min} \approx 0.022 \text{ m/min}.$$

Når vannet står 3 meter høyt, stiger altså vannstanden med omtrent 2.2 cm i minuttet. ■

La oss se nærmere på fremgangsmåten i de to eksemplene ovenfor. I begge tilfeller kjente vi én hastighet og jaktet på en annen. De to hastighetene var de tidsderiverte til to størrelser – i det første eksemplet til de to lengdene x og y , i det andre til volumet V og høyden h . I begge tilfeller fant vi en forbindelse mellom disse to størrelsene som gjaldt for alle t . I det første eksemplet var denne forbindelsen

$$x^2 + y^2 = 25,$$

i det andre eksemplet

$$V = \frac{4\pi h^3}{75}.$$

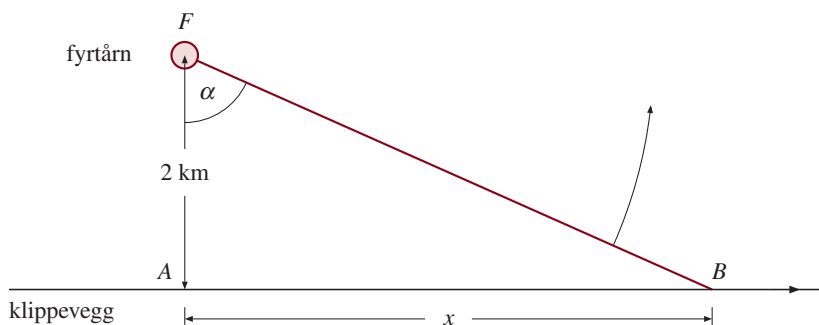
Siden disse forbindelsene gjaldt for alle t , kunne vi derivere med hensyn på t på begge sider (hvorfor?). På den måten fikk vi en ligning som bandt sammen den kjente og den ukjente hastigheten, og ved å løse denne ligningen, løste vi også problemet.

La oss bruke denne strategien på et tredje eksempel.

7.2.3 Eksempel

Et fyrtårn sender ut en roterende lysstråle. Strålen bruker 2 sekunder per omdreining. Lyset fra tårnet treffer en rett klippevegg 2 km borte (se figur 7.2.4). Hvor fort beveger lysstrålen seg bortover klippeveggen når vinkelen mellom klippeveggen og strålen er $\pi/6$?

Figur 7.2.4 viser den generelle situasjonen sett ovenfra. I dette tilfellet er den kjente hastigheten omdreiningfarten til lysstrålen (π radianer per sekund), mens den ukjente hastigheten er farten lysstrålen beveger seg bortover klippeveggen med. I notasjonen på figuren er den første størrelsen $\alpha'(t)$, mens den andre er $x'(t)$. Vår første oppgave er å finne en sammenheng mellom α og x .



Figur 7.2.4.

Det er ikke så vanskelig – bruker vi elementær trigonometri på $\triangle FAB$ i figur 7.2.4, ser vi at

$$\tan \alpha = \frac{x}{2}.$$

Neste punkt er å derivere med hensyn på t :

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \alpha' = \frac{x'}{2}.$$

Dette gir

$$x' = \frac{2\alpha'}{\cos^2 \alpha}.$$

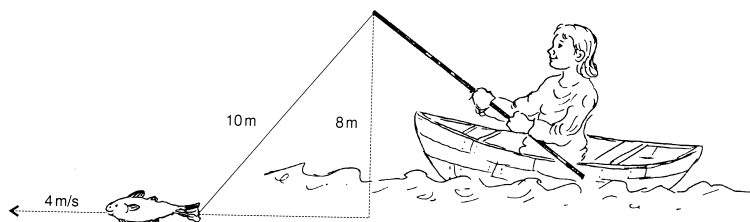
I den situasjonen vi er interessert i, er $\alpha = \pi/3$ (fordi $\angle ABF = \pi/6$ og $\angle FAB = \pi/2$). Altså er

$$x' = \frac{2\pi}{\cos^2(\pi/3)} = 8\pi \approx 25.1 \text{ km/s.}$$

■

Oppgaver i seksjon 7.2

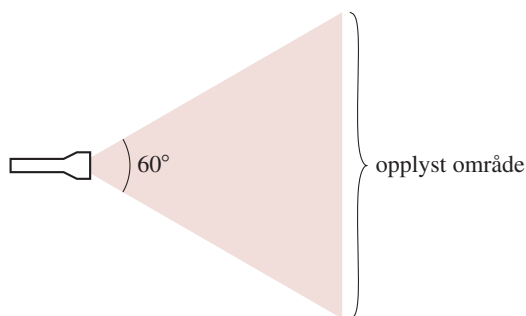
- (NTNU) En 4 meter lang stige står opptil en vegg på et flatt underlag. Foten av stigen sklir bort fra veggen med konstant fart på 0.5 m/s. Hvor fort beveger toppen av stigen seg når den er 2 meter over bakken?
- (UiO) En rett sirkulær kjegle med vertikal akse og med spissen ned fylles med vann med hastigheten 100 cm^3 per sekund. Kjeglen har høyde 40 cm og radien i toppflaten er også 40 cm. Hvor raskt stiger vannhøyden i det øyeblikket den er 10 cm?
- (NTNU) Et fyrtårn sender ut en lysstråle som roterer med konstant fart, 2 omdreininger i minuttet. Fyrtårnet ligger 0.5 km fra en rettlinjert strandlinje. Finn strålens fart langs strandkanten i et punkt på stranden 1 km fra fyrtårnet.
- En drage flyr med konstant høyde 60 meter over bakken. Farten er 2 m/s. Hvor fort løper linen ut i det øyeblikket 100 meter allerede er ute?
- (NTNU) En jente er ute og fisker. En fisk biter på kroken og svømmer rett fra båten med en konstant fart av 4 m/s og en konstant dybde av 8 meter under toppen av fiskestangen.



Hvor mange meter line løper ut av snellen i sekundet i det øyeblikket 10 meter line er ute?

6. Du er 2 meter høy og går rett bort fra en lyktstolpe som er 6 meter høy. Du går med en fart av 2 m/s. Hvor fort vokser skyggen din?

7. Du er ute og går om natten med en lommelykt som lyser opp en sektor på 60° . Du går rett mot et gjerde med en fart av 1 m/s. Hvor fort minker den opplyste lengden av gjerdet?



8. (NTNU) I et gitt øyeblikk gjelder:

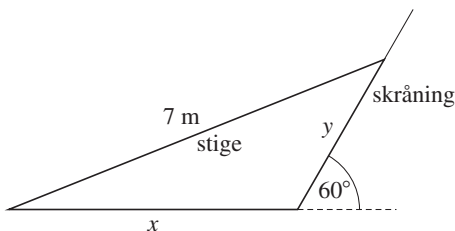
– Bil A er 3 km øst for krysset X og kjører med hastighet 80 km/t vestover.

– Bil B er 4 km nord for krysset X og kjører med hastighet 50 km/t nordover.

Er avstanden mellom de to bilene (i luftlinje) voksende eller avtagende i dette øyeblikket, og hvor fort endres den?

9. (NTNU) Et svømmebasseng er 25 m langt, 10 m bredt, 1 m dypt i den grunne enden og 6 m dypt i den dype enden. Bunnen skrår jevnt. Bassenget fylles med vann, 2000 liter per minutt. Hvor fort stiger vannet i bassenget ved det tidspunktet da vanddybden i den dype enden er 3 m?

10. (UiO) En 7 meter lang stige glir med den ene enden på bakken og den andre langs en 60° skråning (se figur).

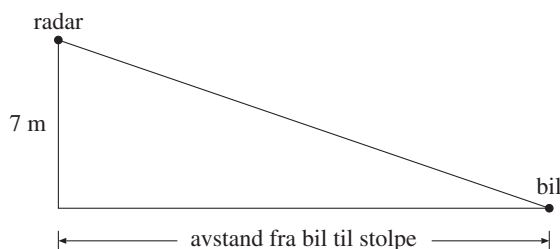


Vis at $x^2 + xy + y^2 = 49$. I et bestemt øyeblikk er avstanden x 3 meter og den nedre enden av stigen beveger seg mot venstre med en fart av 2 m/s. Hvor fort glir den øvre enden nedover i dette øyeblikket?

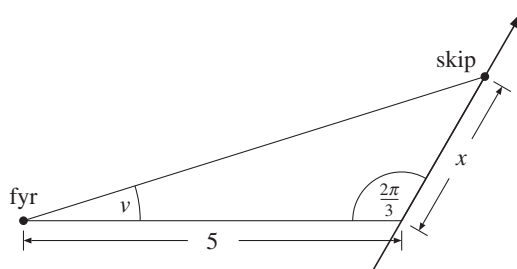
11. (NTNU) En smeltende isblokk er rektangulær med sidekanter av lengde x , y og z . Isblokken henger over et horisontalt plassert kar som har loddrette vegger og grunnflateareal 900 cm^2 , og smeltevannet fra isblokken drypper ned i karet. Ved et bestemt tidspunkt er $x = 20 \text{ cm}$, $y = 15 \text{ cm}$ og $z = 10 \text{ cm}$, og da avtar x og y med 0.1 cm/min mens z avtar med 0.2 cm/min . Anta for enkelhets skyld at is og vann har samme tetthet. Hvor hurtig stiger vannet i karet ved dette tidspunktet?

12. (NTNU) En ti meter høy, kjegleformet vanntank står vertikalt med spissen ned. 2 meter over spissen er radien 1 meter. Det strømmer vann fra tanken ned i et sylindrisk kar med vertikal akse og diameter 8 meter. Hvor raskt øker vannhøyden i karet når vannhøyden i tanken er 4 meter og avtar med 0.2 m/s ?

13. (UiO) En radar er plassert på en stolpe 7 meter over en vei. En bil nærmer seg stolpen. I det øyeblikket avstanden fra bilen til stolpen er 24 meter, viser radaren at avstanden fra bilen til radaren avtar med 30 meter i sekundet. Hvor fort kjører bilen?



14. Et skip som seiler på en rettlinjet kurs, observeres fra et fyrtårn. Figuren viser situasjonen sett ovenfra. Alle avstander er målt i nautiske mil og alle vinkler i radianer.



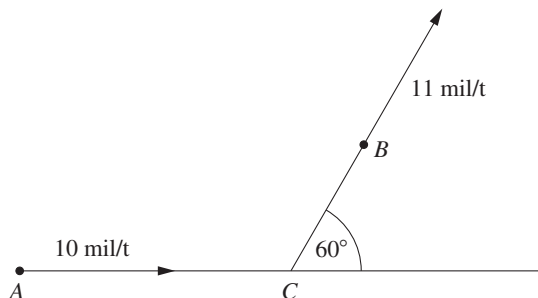
a) Vis at $\tan v = \frac{x\sqrt{3}}{x+10}$

b) Avstanden x og vinkelen v øker med tiden t . Vis at

$$x'(t) = \frac{(x+10)^2}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{v'(t)}{\cos^2 v}$$

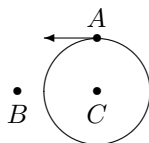
c) Når $v = \frac{\pi}{6}$, øker vinkelen v med en fart av 1 radian/time. Hvor fort seiler skipet?

15. Figuren viser posisjonen og hastigheten til to skip, A og B , sett ovenfra. Skip A nærmer seg skjæringspunktet C med en fart på 10 (nautiske) mil i timen, mens B seiler vekk fra C med en fart på 11 mil i timen. Avstanden fra A til C er 5 mil, mens avstanden fra C til B er 3 mil. Vinkelen mellom skipenes kurser er 60° .

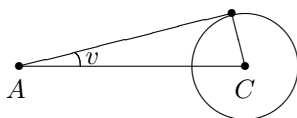


- Finne avstanden mellom skipene
- Hvor fort endrer avstanden mellom skipene seg? Øker eller minker den?

16. (UiO) En mann står stille og ser sin datter kjøre karusell. Figuren viser situasjonen sett ovenfra. Karusellen fører jenta rundt i en sirkelbane med radius 6 meter, og den bruker ett minutt på hver omdreining. Avstanden fra faren B til sentrum C i karusellen er 8 meter. Hvor fort avtar avstanden mellom far og datter når datteren er i punkt A på figuren (dvs. i punktet der $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$)?



17. (UiO) Oppgave: En sirkulær skive med radius 5 cm beveger seg langs en rett linje mot et punkt A . Figuren nedenfor viser situasjonen sett ovenfra. Når avstanden fra A til sentrum C i sirkelen er 13 cm, øker vinkelen v med 0.5 radianer i sekundet. Hvor fort nærmer sirkelen seg A i dette øyeblikket?



7.3 Newtons metode

Anta at vi ønsker å finne nullpunktene til en funksjon $f(x)$. Dersom $f(x)$ er en førstegradsfunksjon

$$f(x) = ax + b$$

eller en annengradsfunksjon

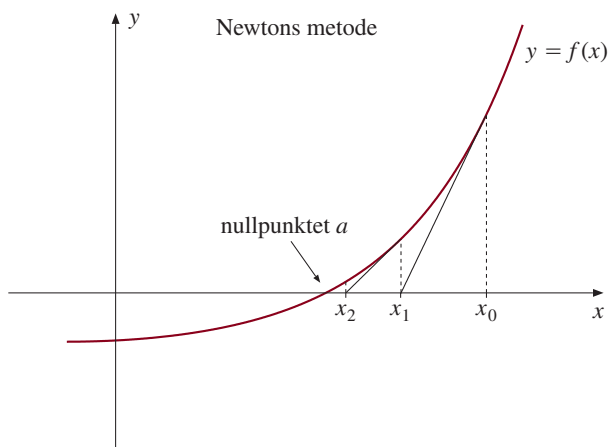
$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

kan vi bruke våre kunnskaper om første- og annengradslikninger til å skrive ned en formel for nullpunktene. Er funksjonen mer komplisert, for eksempel

$$f(x) = 2 \sin x - x,$$

finnes det vanligvis ikke noen formel for nullpunktene. Alt vi kan gjøre er å gi teoretiske bevis for at nullpunkter finnes (for eksempel ved hjelp av skjæringssetningen), eller finne så gode tilnærmelser til nullpunktene som mulig. I denne seksjonen skal vi se på en meget effektiv metode til å finne tilnærmede løsninger. Den kalles *Newtons metode* fordi Newton var den første som brukte den.

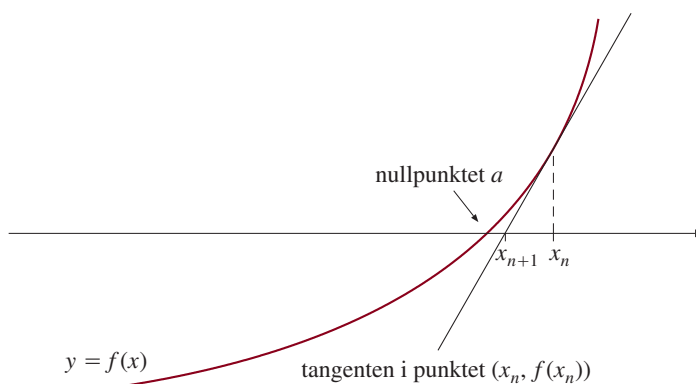
Den geometriske ideen i metoden ser vi i figur 7.3.1. Vi begynner med å «tippe» et nullpunkt x_0 (som vi senere skal se, lønner det seg ikke å tippe helt vilt; det er en fordel å ha studert funksjonen såpass nøye at man vet at x_0 er i nærheten av det nullpunktet man ønsker å lokalisere). Vi regner så ut tangenten i punktet $(x_0, f(x_0))$, og lar x_1 være skjæringspunktet mellom denne tangenten og x -aksen.



Figur 7.3.1.

Som figuren viser, vil x_1 normalt ligge nærmere nullpunktet enn x_0 . Så gjentar vi prosedyren; vi regner ut tangenten i $(x_1, f(x_1))$, og lar x_2 være skjæringspunktet mellom denne og x -aksen. Vanligvis er x_2 en enda bedre tilnærmelse enn x_1 . Ved å fortsette på denne måten, kan vi skaffe oss en så god tilnærmelse som vi måtte ønske.

Anta nå at vi har funnet $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Vi skal finne en formel som forteller oss hvordan vi kan regne ut x_{n+1} . Vi vet at x_{n+1} er skjæringspunktet mellom x -aksen og tangenten i punktet $(x_n, f(x_n))$ (se figur 7.3.2).



Figur 7.3.2.

Denne tangenten har ligningen

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Siden det ligger på tangenten, må punktet $(x_{n+1}, 0)$ passe i ligningen; altså

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Løser vi for x_{n+1} , får vi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1)$$

Denne formelen forteller oss hvordan vi finner den $(n + 1)$ -te tilnærmelsen x_{n+1} når vi kjenner den n -te tilnærmelsen x_n .

7.3.1 Newtons metode Punktene i Newtons metode er gitt ved rekursjonsformelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

La oss se hvordan metoden virker i praksis.

7.3.2 Eksempel

Finn en tilnærmet verdi for det nullpunktet som funksjonen $f(x) = 2 \sin x - x$ har mellom 0 og π .

Figur 7.3.3 viser hvordan funksjonen oppfører seg. Nullpunktet later til å ligge ikke altfor langt unna $\pi/2$, så vi velger $x_0 = \pi/2$ som vår første tilnærming. I følge formel (1) ovenfor er

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2 \sin x_n - x_n}{2 \cos x_n - 1}.$$

For $n = 0$, får vi

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\pi}{2} - \frac{2 - \pi/2}{2 \cdot 0 - 1} = 2.$$

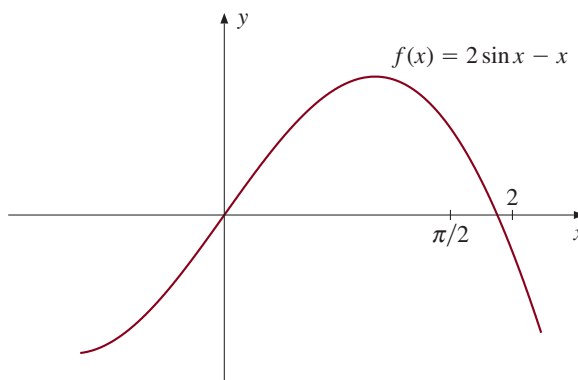
Videre er

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{2 \sin 2 - 2}{2 \cos 2 - 1} \approx 1.9010$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 1.9010 - \frac{2 \sin 1.9010 - 1.9010}{2 \cos 1.9010 - 1} \approx 1.8955$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 1.8955 - \frac{2 \sin 1.8955 - 1.8955}{2 \cos 1.8955 - 1} \approx 1.8955.$$

Vi ser at verdiene nå begynner å ligge svært tett, og det er et tegn på at vi er kommet nær nullpunktet. Ønsker vi å gi svaret med fire desimaler, er det rimelig å angi 1.8955 som vår tilnærmede løsning. (En mye brukt tommelfingerregel sier at om du ønsker svaret med n desimalers nøyaktighet, skal du bruke Newtons metode til du får de samme n desimalene to ganger på rad. I praksis er dette som regel en fornuftig strategi, men det finnes eksempler hvor den gir galt svar.)



Figur 7.3.3.

*Betingelser for konvergens

Newtons metode er rask og effektiv når den virker, men det er flere ting som kan gå galt. Figur 7.3.4 viser én av de vanligste feilkildene – starter vi for langt unna nullpunktet, risikerer vi at følgen divergerer istedenfor å konvergere! Vi skal bevise en setning som sier at dette ikke vil skje om vi starter tilstrekkelig nær nullpunktet (gitt at visse rimelige antagelser er oppfylt). Beviset for setningen er forholdsvis vanskelig, og det er også resten av seksjonen. Man taper ikke noe senere i boken ved å hoppe over dette stoffet.

7.3.3 Setning

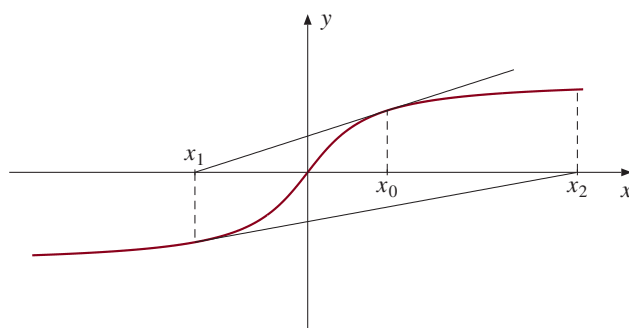
Anta at $f(a) = 0$, at $f'(a) \neq 0$ og at $f''(x)$ eksisterer og er kontinuerlig i en omegn rundt a . Da finnes det en $\delta > 0$ slik at følgen $\{x_n\}$ i Newtons metode konvergerer mot a når $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$.

Bevis: Definer en ny funksjon g ved

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Vi ser at $g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a$ siden $f(a) = 0$ og $f'(a) \neq 0$. Videre ser vi at følgen $\{x_n\}$ i Newtons metode er gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n).$$



Figur 7.3.4.

Deriverer vi $g(x)$, får vi

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Siden $f(a) = 0$ og $f'(a) \neq 0$, ser vi at $\lim_{x \rightarrow a} g'(x) = 0$. Dette betyr at dersom vi velger et tall C , $0 < C < 1$, så kan vi finne en $\delta > 0$ slik at $|g'(x)| \leq C$ når $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Anta nå at $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$. Da er $|x_0 - a| < \delta$. La oss gjøre et overslag over avstanden mellom x_1 og a . Siden $x_1 = g(x_0)$ og $a = g(a)$, har vi

$$|x_1 - a| = |g(x_0) - g(a)| = |g'(c)| \cdot |x_0 - a|$$

for et tall c mellom x_0 og a (middelverdisetningen). Siden $|g'(c)| \leq C$ og $|x_0 - a| < \delta$, får vi

$$|x_1 - a| < C \cdot \delta.$$

På tilsvarende måte kan vi gi et overslag for avstanden mellom x_2 og a :

$$|x_2 - a| = |g(x_1) - g(a)| = |g'(d)| \cdot |x_1 - a| \leq C|x_1 - a| \leq C \cdot C\delta = C^2\delta.$$

Fortsetter vi på denne måten, ser vi at

$$|x_n - a| \leq C^n \delta$$

og siden $C < 1$, betyr dette at $|x_n - a| \rightarrow 0$. Altså konvergerer $\{x_n\}$ mot a , og beviset er ferdig. ■

Setningen ovenfor forteller oss at dersom betingelsene er oppfylt, vil Newtons metode konvergere forutsatt at vi starter tilstrekkelig nær et nullpunkt. Hvor nær vi må starte, og hvor fort x_n konvergerer, sier ikke setningen noe om. Ser vi nærmere på beviset, kan vi imidlertid trekke ut mer informasjon:

7.3.4 Korollar

Anta at $f(a) = 0$ og at $f'(a) \neq 0$. Anta videre at $\delta > 0$ er valgt slik at

$$\frac{|f(x)f''(x)|}{f'(x)^2} \leq C < 1$$

for alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Dersom $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$, så vil $\{x_n\}$ konvergere mot a , og $|x_n - a| \leq C^n \delta$.

Dette resultatet kan blant annet brukes til å estimere hvor god nøyaktigheten er når vi bruker Newtons metode – har vi regnet ut x_n , vet vi at nøyaktigheten er bedre enn $C^n \delta$. Et slikt overslag vil ofte involvere en del regning (fordi C bestemmes av størrelsen til uttrykket $|f(x)f''(x)|/f'(x)^2$), og det viser seg som regel at konvergensen er mye raskere enn overslaget tilsier (det er fordi vi har latt være å ta hensyn til at $\lim_{x \rightarrow a} g'(x) = 0$; se oppgave 14). I praktiske situasjoner er det som regel greiere å bruke tommelfingerregelen vi nevnte tidligere (samme n desimaler to ganger på rad).

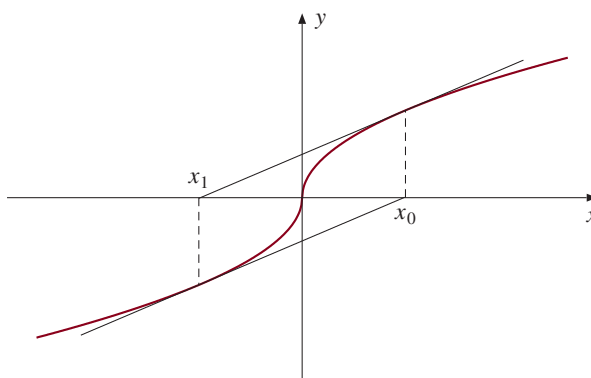
La oss avslutte med et eksempel som viser at man bør være omhyggelig med å sjekke at betingelsene i setningene ovenfor er oppfylt dersom man ønsker å stole på konklusjonen.

7.3.5 Eksempel

La

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{hvis } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$

(se figur 7.3.5).



Figur 7.3.5.

Velg $x_0 > 0$. Da er

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\sqrt{x_0}}{1/(2\sqrt{x_0})} = -x_0.$$

Beregner vi x_2 , får vi

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{-\sqrt{-x_1}}{-1/(2\sqrt{-x_1})} = -x_1 = x_0.$$

Dermed ser vi hva som skjer; uansett hvilket startpunkt vi velger, vil følgen $\{x_n\}$ hoppe frem og tilbake mellom verdiene x_0 og $-x_0$. I dette tilfellet hjelper det altså ikke å velge startpunktet nær nullpunktet – vi får ikke konvergens allikevel.

Hvorfor er ikke dette i strid med setning 7.3.3 ovenfor? Ganske enkelt fordi forutsetningene ikke er oppfylt – funksjonen f er ikke (to ganger) deriverbar i en omegn om 0 siden $f'(0)$ ikke eksisterer.

Det er instruktivt å gå gjennom beviset for setning 7.3.3 og se nøyaktig hvor det bryter sammen for funksjonen i dette eksemplet. ■

Oppgaver i seksjon 7.3

1. Finn en tilnærmet verdi for det nullpunktet som funksjonen har i det angitte intervallet. La x_0 være midtpunktet i intervallet, og bruk Newtons metode to ganger.

a) $f(x) = x^5 + 3x - 7$ på $[1, 2]$

b) $f(x) = \tan x + x - 1$ på $[0, \pi/2]$

c) $f(x) = \ln x + x$ på $[0, 1]$

d) $f(x) = e^x - 4x$ på $[0, 1]$.

2. Vis at funksjonen har nøyaktig ett nullpunkt og bruk Newtons metode til å finne en tilnærmet verdi.

a) $f(x) = x^3 + 3x + 9$

b) $f(x) = \tan x - x + 1$ på $(-\pi/2, \pi/2)$

c) $f(x) = x + \sin x + 1$.

3. (NTNU) Ligningen $\sin 2x = x$ har en løsning som er tilnærmet lik 1. Finn en bedre verdi for denne løsningen ved å bruke Newtons metode to ganger.

4. a) Forklar hvorfor funksjonen $f(x) = x^5 + 7x^3 - 20$ har nøyaktig ett nullpunkt i intervallet $(1, 2)$.

b) Bruk Newtons metode tre ganger for å finne en tilnærmet verdi for nullpunktet.

5. (NTNU) Ligningen $\sin x = \frac{2}{3}x$ har en løsning i intervallet $(0, \pi/2)$. Sett $x_0 = 1.5$ og bruk Newtons metode én gang for å finne en tilnærmet verdi til denne løsningen.

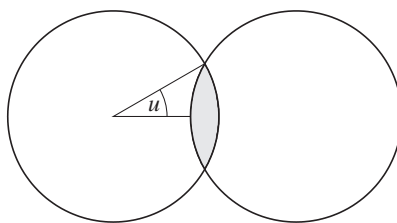
6. (NTNU) Finn ved hjelp av kalkulator eller på annen måte det største hele tallet k slik at $k + e^{k/10} < 100$. Dette tallet k er en tilnæringsverdi for roten i ligningen $x + e^{x/10} = 100$. Bruk Newtons metode én gang til å finne en bedre tilnæringsverdi.

7. a) (UiO) Tegn grafen til funksjonen $f(x) = e^{\sqrt{x}} - 3$. Forklar hvorfor f må ha nøyaktig ett nullpunkt i intervallet $[1, 2]$.
- b) Bruk Newtons metode én gang med $x_0 = 1$ til å finne en tilnærmet verdi for dette nullpunktet. Vil denne verdien bli for stor eller for liten?
8. a) (NTNU) Ligningen $x \ln x = 1$ har en eneste løsning. Gi en kort begrunnelse for denne påstanden.
- b) Løs ligningen i a) numerisk ved hjelp av Newtons metode. Bruk $x_0 = 1.5$ og stopp etter to trinn. Er løsningen for liten eller for stor?
9. (NTNU) La f være funksjonen $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \cos x$, $x \in [0, \pi]$. Vis at f har et lokalt minimum for en x -verdi mellom 1.8 og 1.9. Bestem denne x -verdien med to desimalers nøyaktighet, korrekt avrundet. Drøft funksjonen og skisser grafen.

10. (UiO) Et motordrevet kjøretøys drivstofforbruk D , målt i liter per mil, varierer med kjøretøyets hastighet v , målt i mil per time, etter formelen

$$D(v) = \frac{e^v + e^{-v}}{2} + \frac{1}{v}.$$

- a) Finn en ligning som bestemmer den hastigheten v_0 som gir minimalt drivstofforbruk.
- b) Bruk Newtons metode en gang med utgangspunkt $v = 1$ til å finne en tilnærmet løsning av ligningen $v^2 e^v - v^2 e^{-v} - 2 = 0$.
11. (NTNU) To sirkler med radius 1 ligger som vist på figuren.



- a) Finn avstanden mellom sentrene uttrykt ved vinkelen u og vis at det skraverte arealet er gitt ved

$$A(u) = 2u - \sin 2u, \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}.$$

- b) Bruk Newtons metode til å finne u med 3 desimaler når den ene sirkelen dekker nøyaktig halvparten av den andre. Hvor stor er avstanden mellom sentrene da?
12. a) La $f(x) = |x|^{2/3}$. Vis at følgen $\{x_n\}$ i Newtons metode konvergerer mot null uansett hvilket startpunkt $x_0 \neq 0$ vi bruker.
- b) La $g(x) = |x|^{1/3}$. Vis at følgen $\{x_n\}$ i Newtons metode divergerer for alle startpunkter $x_0 \neq 0$.

- c) La $h(x) = |x|^\alpha$ der $\alpha > 0$. Avgjør for hvilke α Newtons metode konvergerer og for hvilke den divergerer.

13. La g være en deriverbar funksjon definert for alle x . Vi sier at $a \in \mathbb{R}$ er et *fikspunkt* for g dersom $g(a) = a$. I denne oppgaven skal vi se på en metode for å finne tilnærmede verdier for fikspunkter. I neste oppgave skal vi koble denne metoden opp mot Newtons metode.

- a) Anta at a er et fikspunkt for g og at det finnes et tall $\delta > 0$ slik at $|g'(x)| \leq C$ for alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$, der $C < 1$. Vis at

$$|g(x) - g(a)| \leq C|x - a|$$

for alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

- b) Velg $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$ og definer en følge $\{x_n\}$ ved å sette $x_{n+1} = g(x_n)$ for $n = 0, 1, 2, \dots$. Vis at

$$|x_n - a| \leq C^n |x_0 - a|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

og forklar hvorfor $\{x_n\}$ konvergerer mot a .

- c) Finn en tilnærmet verdi for den løsningen ligningen $\sin 2x = x$ har i første kvadrant. Sett $g(x) = \sin 2x$, $x_0 = 1$, og la x_5 være den tilnærmede verdien. Anslå feilmarginen i svaret.

- d) Anta nå at $|g'(x)| \leq K|x - a|$ for alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Vis at

$$|x_n - a| \leq K^{2^n - 1} \delta^{2^n}.$$

14. I denne oppgaven skal vi anvende resultatene fra forrige oppgave på Newtons metode. Anta at vi skal bruke Newtons metode til å finne en tilnærmet verdi for nullpunktet a til en funksjon f . Innfør en ny funksjon

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

- a) Vis at følgen $\{x_n\}$ du får ved å bruke Newtons metode på f er den samme som den du får ved å bruke metoden i oppgave 13 på g .
- b) Anta at f er to ganger deriverbar og at $f'(a) \neq 0$. Vis at $g'(a) = 0$.
- c) Anta at

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K|x - a| < 1$$

for alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Vis at

$$|x_n - a| \leq K^{2^n - 1} \delta^{2^n}.$$

Forklar hvorfor dette som regel er et mye bedre estimat enn det vi ga i korollar 7.3.4.

15. (UiO) Vi har gitt en funksjon $f(x) = x^\beta$, der β er et positivt, reelt tall. Ligningen $f(x) = 0$ har naturligvis løsningen $x = 0$, men vi ønsker å bruke den til en test av Newtons metode.

- Vi anvender Newtons metode på ligningen $f(x) = 0$ med startverdi $x_0 = a$ der $a > 0$. Vis at Newtons metode konvergerer for alle $\beta \geq 1$. Hva skjer når $\beta = 1/2$?
- Vi velger $a = 1$ og $\beta = 4$. Hvor mange iterasjoner må vi bruke for at feilen skal bli mindre enn 0.001?

7.4 Omvendte funksjoner

Når vi arbeider med en funksjon $y = f(x)$, starter vi gjerne med en x -verdi og regner så ut den tilhørende y -verdien. Hvis f.eks. $f(x) = 2x + 1$, og vi velger $x = 2$, får vi y -verdien $y = f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Av og til ønsker vi imidlertid å gå den andre veien; vi har en y -verdi og ønsker å finne den tilhørende x -verdien. Starter vi f.eks. med $y = 7$, ønsker vi å finne x slik at $f(x) = 7$. Er funksjonen som ovenfor, får vi ligningen $7 = 2x + 1$, som gir $x = 3$. Har vi en annen y -verdi, f.eks. $y = 11$, får vi en annen ligning $11 = 2x + 1$, som gir $x = 5$. Dersom vi planlegger å gjøre dette for mange y 'er, kan det være greit å løse ligningen en gang for alle for en generell y -verdi, altså løse ligningen $y = 2x + 1$ med hensyn på x . Dette gir oss $x = \frac{y-1}{2}$. I denne formelen kan vi putte inn en hvilken som helst y -verdi og få ut den tilsvarende x -verdien. Vi kan uttrykke formelen som en funksjonssammenheng

$$x = g(y)$$

der

$$g(y) = \frac{y-1}{2}.$$

Denne funksjonen g kaller vi den *omvendte* (eller *inverse*) funksjonen til f . I denne seksjonen skal vi studere egenskapene til slike omvendte funksjoner. Før vi starter på teorien, kan det være smart å se på et praktisk eksempel som kanskje illustrerer bedre hvorfor omvendte funksjoner er både naturlige og viktige.

7.4.1 Eksempel

En fabrikk produserer en vare for salg. Fabrikkleidelsen regner med at dersom de produserer x enheter av varen, vil overskuddet av salget være

$$y = f(x) = 1000x - 200\,000$$

I utgangspunktet tar man sikte på å skaffe firmaet et overskudd på 1 million og lurer på hvor mange enheter man da må produsere. Vi setter da $y = 1\,000\,000$ og løser ligningen $1\,000\,000 = 1000x - 200\,000$ for x . Vi får $x = 1200$. Så finner man kanskje ut at 1 million er litt pessimistisk, og tar isteden sikte på 2 millioner. Antall enheter x man da må selge, er gitt ved $2\,000\,000 = 1000x - 200\,000$, dvs. $x = 2200$. Skal man foreta en fullstendig analyse av situasjonen, lønner det seg å løse ligningen

$$y = 1000x - 200\,000$$

for en generell y . Da får vi formelen

$$x = \frac{y + 200\,000}{1000}$$

som forteller oss hvor mange enheter vi må produsere for å få overskudd y . Funksjonen

$$g(y) = \frac{y + 200\,000}{1000}$$

er den omvendte funksjonen til f . Ønsker vi å se hvor mange enheter vi må produsere for å gå med et overskudd på 5 millioner, setter vi $y = 5\,000\,000$ inn i dette uttrykket:

$$g(5\,000\,000) = \frac{5\,000\,000 + 200\,000}{1000} = 5200.$$



Disse eksemplene viser oss ideen bak omvendte funksjoner: Løser vi ligningen $y = f(x)$ for x , får vi den omvendte funksjonen $x = g(y)$. Dessverre er det ikke alltid så lett å gjøre dette i praksis. For det første kan det tenkes at det finnes mer enn én x -verdi slik at $y = f(x)$, og da må vi på et eller annet vis velge én av dem. Starter vi f.eks. med $y = f(x) = x^2$, får vi to løsninger når vi løser for x , nemlig $x = \pm\sqrt{y}$. I funksjonslærens barndom tillot man funksjoner å ha to (eller flere) verdier og regnet derfor lykkelig med $g(y) = \pm\sqrt{y}$, men det ledet til så mange komplikasjoner at man snart gikk bort fra det. Vi må altså velge en av de to verdiene.

Det andre problemet man støter på når man skal finne omvendte funksjoner, er at selv når det bare finnes én x slik at $y = f(x)$, så kan det være umulig å finne en formel for denne x 'en – ligningen $y = f(x)$ lar seg bare ikke løse. Et enkelt eksempel er funksjonen $f(x) = e^x + x$. Dette er en strengt voksende funksjon som kommer nedefra minus uendelig og vokser mot pluss uendelig, slik at det til hver $y \in \mathbb{R}$ finnes nøyaktig én x slik at $y = f(x)$. Men for å finne denne x 'en må vi løse ligningen $y = e^x + x$, og det er umulig! Mye av styrken til teorien for omvendte funksjoner er at den gjør det mulig å si noe fornuftig om den omvendte funksjonen til f også i de tilfellene der ligningen $y = f(x)$ ikke lar seg løse.

Før vi definerer omvendte funksjoner generelt, må vi innføre noen begreper. Når vi arbeider med omvendte funksjoner, er det viktigere enn ellers å holde styr på hvor de forskjellige funksjonene er definert og hvor de tar sine verdier. Vi skal derfor bruke D_f til å betegne definisjonsmengden til en funksjon f , og vi skal la V_f betegne verdimengden. Husk at D_f består av alle de x -verdiene som $f(x)$ er definert for, og at V_f er mengden av alle funksjonsverdier $y = f(x)$; det vil si

$$V_f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}.$$

En funksjon $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ kalles *injektiv* (eller *en-entydig*) dersom det til hver $y \in V_f$ finnes nøyaktig én $x \in D_f$ slik at $y = f(x)$. Sagt på en annen måte er f injektiv dersom $x_1 \neq x_2$ medfører $f(x_1) \neq f(x_2)$. En strengt voksende eller strengt avtagende funksjon er opplagt injektiv. (Husk at en funksjon er *strengt voksende* dersom $x_1 < x_2$ medfører $f(x_1) < f(x_2)$, og at den er *strengt avtagende* dersom $x_1 < x_2$ medfører $f(x_1) > f(x_2)$). Dersom en oppgave ber deg om å vise at en funksjon er injektiv, kan det derfor være lurt å derivere den for å se om den er strengt voksende eller strengt avtagende.)

Det er de injektive funksjonen vi kan finne en omvendt funksjon til:

7.4.2 Definisjon

Anta at $f : D_f \rightarrow V_f$ er injektiv. Vi definerer den *omvendte funksjonen* $g : V_f \rightarrow D_f$ ved å la $g(y)$ være det entydig bestemte elementet $x \in D_f$ slik at $f(x) = y$. Sagt med symboler er altså

$$g(y) = x \quad \text{dersom} \quad f(x) = y.$$

Den omvendte funksjonen g betegnes ofte med f^{-1} . Omvendte funksjoner kalles også *inverse* funksjoner.

Advarsel

Bland ikke den omvendte funksjonen

$$f^{-1}(x)$$

sammen med brøkfunksjonen

$$\frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}.$$

Selv om skrivemåten ligner, har disse funksjonene ingen ting med hverandre å gjøre!

Bemerkning

Legg merke til at når vi går fra f til den omvendte funksjonen f^{-1} , bytter vi rollene til definisjonsmengden D_f og verdimengden V_f . Dette er naturlig (hvis du skjønner hva den omvendte funksjonen er!), men lett å glemme.

7.4.3 Eksempel

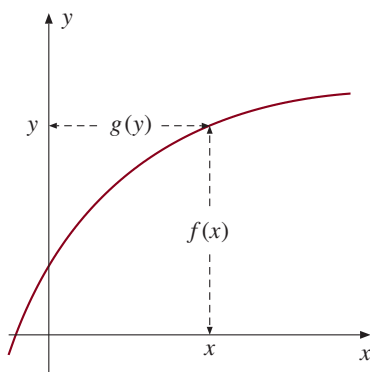
Finn den omvendte funksjonen til

$$f(x) = \ln(x + 3).$$

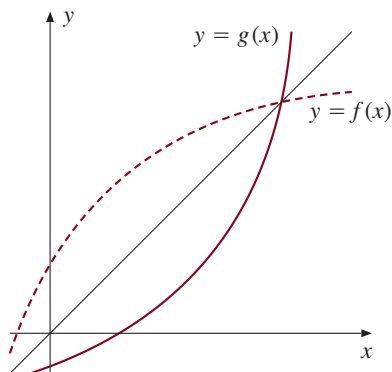
I dette tilfellet kan vi følge vår grunnstrategi med å løse ligningen $y = \ln(x + 3)$ for x . Siden ligningen bare har én løsning $x = e^y - 3$, er funksjonen injektiv. Vi ser at definisjonsmengden til f er $D_f = (-3, \infty)$ og at verdimengden er $V_f = \mathbb{R}$. Den omvendte funksjonen er dermed $g : \mathbb{R} \rightarrow (-3, \infty)$ gitt ved $g(y) = e^y - 3$. ■

I figur 7.4.1 har vi tegnet opp grafen til den opprinnelige funksjonen $y = f(x)$. Vi tolker grafen på vanlig måte; dersom vi går en distanse x utover langs x -aksen, er $f(x)$ den avstanden vi må gå (oppover eller nedover) for å komme til funksjonsgraf. Vi kan bruke den samme figuren til å beskrive den omvendte funksjonen $x = g(y)$; hvis vi går en avstand y utover langs y -aksen, er $g(y)$ den avstanden vi må bevege oss sidelengs for å komme til (den samme) funksjonsgraf (overbevis deg om at du skjønner dette!). Det er ofte nyttig å fremstille grafen til en omvendt funksjon på denne måten, men det er også litt bakvendt – det tvinger oss til å tenke annerledes enn vi er vant til. Dersom vi skal arbeide mye med den omvendte funksjonen, er

det ofte mer praktisk å fremstille den grafisk på vanlig måte. Når vi gjør det, er det også naturlig å bruke x og ikke y som variabelnavn; vi vil altså snakke om $g(x)$ og ikke om $g(y)$. I eksempelet ovenfor vil derfor den inverse funksjonen være $g(x) = e^x - 3$. (Husk at det ikke spiller noen rolle hvilket navn vi bruker på variabelen).



Figur 7.4.1.

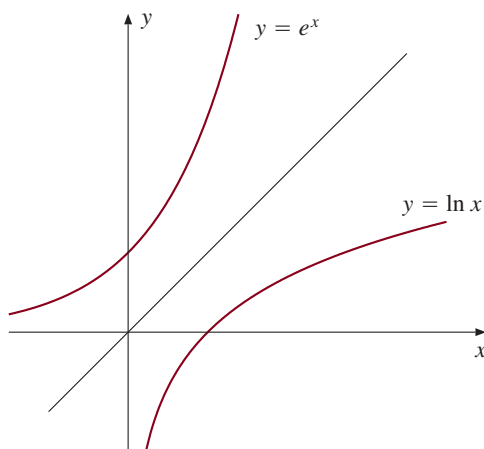


Figur 7.4.2.

Figur 7.4.2 viser hvordan grafen til g nå blir seende ut – den blir speilingen til grafen til f om linjen $y = x$. Dette skyldes at når vi bytter om koordinatene til et punkt (f.eks., omgjør $(2, 3)$ til $(3, 2)$), så vil det nye punktet være speilingen av det gamle om linjen $y = x$.

7.4.4 Eksempel

$g(x) = \ln x$ er den omvendte funksjonen til $f(x) = e^x$ (hvorfor?).



Figur 7.4.3.

Figur 7.4.3 viser hvordan grafen til $y = \ln x$ er speilingen av grafen til $y = e^x$ om linjen $y = x$. ■

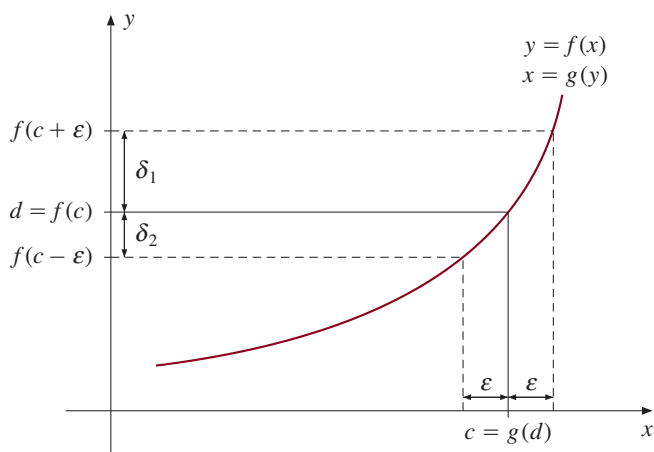
Som tidligere nevnt er mye av styrken til teorien for omvendte funksjoner at den gjør det mulig å si noe fornuftig om f^{-1} selv når ligningen $y = f(x)$ ikke kan løses. La oss først se på kontinuitet. Siden grafen til den omvendte funksjonen f^{-1} er en speiling av grafen til f , er det naturlig å tro at f^{-1} må være kontinuerlig dersom f er det. Dette er riktig, men ikke helt lett å bevise.

7.4.5 Teorem

Hvis $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig og strengt voksende, så er den omvendte funksjonen $g = f^{-1}$ kontinuerlig og strengt voksende med definisjonsmengde $D_g = V_f = [f(a), f(b)]$. Hvis f er kontinuerlig og strengt avtagende, så er $g = f^{-1}$ kontinuerlig og strengt avtagende med definisjonsmengde $D_g = V_f = [f(b), f(a)]$.

***Bevis:** Vi skal anta at f er strengt voksende og overlate det andre tilfellet til leserne. La oss først sjekke at g er strengt voksende: Anta at y_1 og y_2 er to punkter i V_f slik at $y_1 < y_2$, og la x_1, x_2 være de to punktene i D_f slik at $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$. Siden $y_1 < y_2$ og f er strengt voksende, må $x_1 < x_2$. Siden $g(y_1) = x_1 < x_2 = g(y_2)$, betyr dette at g er strengt voksende.

La oss så vise at $V_f = [f(a), f(b)]$. Siden f er strengt voksende, må $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ for alle $x \in [a, b]$. Dette betyr at V_f er en delmengde av $[f(a), f(b)]$. Men siden f er kontinuerlig, følger det fra skjæringssetningen at det for enhver $d \in [f(a), f(b)]$ finnes en $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = d$. Altså må V_f være lik hele $[f(a), f(b)]$.



Figur 7.4.4.

Til slutt skal vi vise kontinuitet. Gitt en $d \in V_f$ og en $\epsilon > 0$, må vi altså finne en $\delta > 0$ slik at hvis $|y - d| < \delta$, så er $|g(y) - c| < \epsilon$, der $c = g(d)$. Figur 7.4.4 viser ideen bedre enn noen forklaring; dersom vi velger δ lik det minste av tallene δ_1 og δ_2 , så vil $g(y)$ havne mellom $c - \epsilon$ og $c + \epsilon$ når $|y - d| < \delta$.

La oss kontrollere denne ideen ved regning: Siden f er strengt voksende må $f(c - \epsilon) < f(c) = d$ og $f(c + \epsilon) > f(c) = d$. Vi kan derfor la δ være det minste av de to positive tallene $\delta_1 = d - f(c - \epsilon)$ og $\delta_2 = f(c + \epsilon) - d$. Dersom $|y - d| < \delta$, må dermed $f(c - \epsilon) < y < f(c + \epsilon)$. Siden vi allerede har vist at g er strengt voksende, følger det at $g[f(c - \epsilon)] < g(y) < g[f(c + \epsilon)]$. Bruker vi at $g[f(c - \epsilon)] = c - \epsilon$ og

$g[f(c + \epsilon)] = c + \epsilon$, ser vi at $c - \epsilon < g(y) < c + \epsilon$. Altså er $|g(y) - c| < \epsilon$, som er akkurat det vi skulle vise. ■

Bemerkning

Man kan vise at en kontinuerlig, injektiv funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nødvendigvis er strengt monoton. Teoremet ovenfor forteller oss derfor at kontinuerlige, injektive funksjoner har kontinuerlige inverser.

Den viktigste konsekvensen av teorem 7.4.5 er at den omvendte funksjonen til en deriverbar funksjon selv er deriverbar og har en derivert som lett kan beregnes.

7.4.6 Teorem

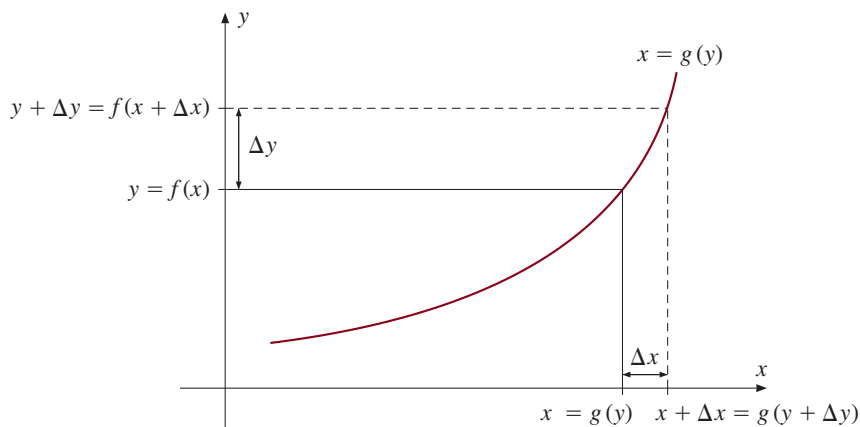
Anta at f er en kontinuerlig, strengt monoton funksjon som er deriverbar i punktet x med $f'(x) \neq 0$. Da er den omvendte funksjonen $g = f^{-1}$ deriverbar i punktet $y = f(x)$, og

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Bevis: Vi må beregne

$$g'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}.$$

La $\Delta x = g(y + \Delta y) - g(y)$; da er $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (se figur 7.4.5). Ifølge det forrige teoremet er g kontinuerlig, noe som medfører at $\Delta x \rightarrow 0$ når $\Delta y \rightarrow 0$.

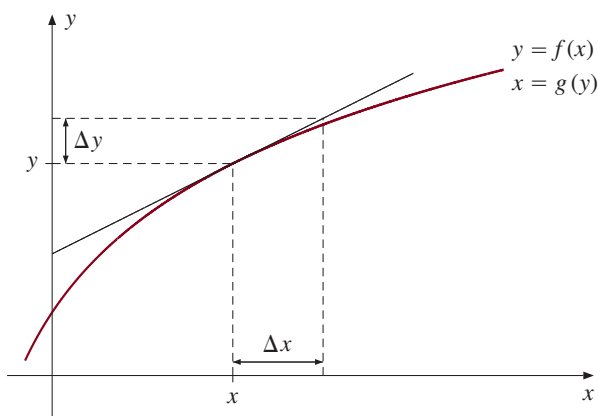


Figur 7.4.5.

Vi kan nå omforme uttrykket for $g'(y)$:

$$\begin{aligned} g'(y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}. \end{aligned}$$

hvor vi i det siste skrittet bruker definisjonen av $f'(x)$ og vår tidligere observasjon at $\Delta x \rightarrow 0$ når $\Delta y \rightarrow 0$. ■



Figur 7.4.6.

Tenker vi geometrisk, er formelen for $g'(y)$ svært naturlig. I figur 7.4.6 har vi grafen til både f og g på samme tegning; tenker vi på y som funksjon av x , ser vi grafen til f , men tenker vi på x som funksjon av y , ser vi grafen til g . I begge tilfeller er den deriverte ikke noe annet enn stigningstallet til tangenten. Dette stigningstallet avhenger imidlertid av om vi ser på x eller y som den frie variabelen; i det første tilfellet er stigningstallet lik $\Delta y/\Delta x$, i det andre lik $\Delta x/\Delta y$. Altså er $f'(x) = \Delta y/\Delta x$ og $g'(y) = \Delta x/\Delta y$, og vi får formelen $g'(y) = 1/f'(x)$. Erfaringsmessig blir mange forvirret av at vi har forskjellig variabel i $g'(y)$ og $f'(x)$, men det skyldes rett og slett forskjellige måter å beskrive det samme punktet på; når vi bruker f er x det naturlige utgangspunktet, men når vi bruker g er det y som er variabelen.

La oss se et eksempel på hvordan teorem 7.4.6 kan brukes til å regne ut den deriverte til en omvendt funksjon.

7.4.7 Eksempel

Deriverer vi, ser vi at funksjonen

$$f(x) = xe^{x^2} + 1$$

er strengt voksende, og følgelig har en invers funksjon $g(y)$. Vi ønsker å finne $g'(1)$. Fra formelen for $f(x)$ ser vi at $1 = f(0)$. Dermed er

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{(1 + 2 \cdot 0^2)e^{0^2}} = 1.$$

I prinsippet kunne vi tenke oss å løse denne oppgaven på en annen måte, nemlig ved først å løse ligningen $y = xe^{x^2} + 1$ for x , og så derivere uttrykket vi da får med hensyn på y . Denne metoden fungerer ikke fordi det er umulig å løse ligningen. ■

I resultatene ovenfor starter vi alltid med en injektiv funksjon, men av og til har vi lyst til å finne «den omvendte funksjonen» til en f som i utgangspunktet *ikke* er injektiv. Et typisk eksempel er $f(x) = x^2$; selv om denne funksjonen ikke er injektiv, føler vi at $g(y) = \sqrt{y}$ i en eller annen forstand er en «omvendt funksjon» til f . Et nyttig triks i slike sammenhenger er å innskrenke definisjonsmengden til f slik at den blir injektiv. Lar vi f.eks. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være definert ved $f(x) = x^2$, er f injektiv (den er strengt voksende på $[0, \infty)$) og har omvendt funksjon $g(y) = \sqrt{y}$. (Hvis vi isteden definerer f på samme måte på intervallet $(-\infty, 0]$, blir den omvendte funksjonen $h(y) = -\sqrt{y}$!) Dette trikset skal vi få mye glede av når vi studerer omvendte trigonometriske funksjoner i neste seksjon.

Oppgaver i seksjon 7.4

1. Vis at funksjonen er injektiv og finn den omvendte funksjonen. Angi definisjonsområdet til den omvendte funksjonen.

- $f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$
- $f(x) = x^2$, $D_f = [0, \infty)$
- $f(x) = x^2$, $D_f = (-\infty, 0]$
- $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [0, \infty)$
- $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $D_f = [-1, \infty)$
- $f(x) = \ln(x^2 - 9)$, $D_f = (3, \infty)$
- $f(x) = e^{-(x^2+2x+1)}$, $D_f = (-\infty, -1)$.

2. Funksjonen er injektiv på et intervall som inneholder 0. Finn dette intervallet og bestem den omvendte funksjonen.

- $f(x) = x^2 + 3x + 2$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 2}$
- $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$
- $f(x) = e^x - e^{-x}$.

3. Vis at funksjonen

$$f(x) = 2xe^x + 1,$$

definert for $x \geq -1$, er injektiv. La g være den omvendte funksjonen og beregn $g'(1)$.

4. Vis at funksjonen

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$$

er injektiv i et område rundt 0. Finn dette området og beregn $g'(2)$, der g er den omvendte funksjonen.

5. Vis at funksjonen

$$f(x) = \tan 2x$$

er injektiv i intervallet $(-\pi/4, \pi/4)$. Finn den deriverte til den omvendte funksjonen i punktet $x = 1$.

6. Vis at funksjonen

$$f(x) = \sin x$$

er injektiv på intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$, og kall den omvendte funksjonen g . Finn $g'(\sqrt{3}/2)$.
Vis at $g'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

7. Vis at funksjonen

$$f(x) = \tan x$$

er injektiv på intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$. Finn en formel for den deriverte til den omvendte funksjonen.

8. Anta at g er den omvendte funksjonen til en kontinuerlig, strengt monoton funksjon f og at f er to ganger deriverbar i punktet $y = g(x)$. Vis at g er to ganger deriverbar i x og at

$$g''(x) = -\frac{f''[g(x)]g'(x)}{f'[g(x)]^2}$$

forutsatt at $f'[g(x)] \neq 0$. La $f(x) = \sin x$ og beregn $g''(1/2)$.

9. La $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuerlig, injektiv funksjon. Vis at f er strengt monoton.

10. (UiO) Vis at funksjonen $f(x) = xe^{(1-x^2)/2}$ er injektiv på intervallet $[-1, 1]$. Finn definisjonsområdet til den omvendte funksjonen g og beregn $\lim_{y \rightarrow 1^-} (1-y)[g'(y)]^2$.

7.5 Cotangens

Denne seksjonen er et lite mellomspill hvor vi raskt skal innføre en trigonometrisk funksjon som er utelatt i skolematematikken. *Cotangens* er definert ved

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Dette uttrykket gir mening når $\sin x \neq 0$, det vil si når x ikke er et heltallig multiplum av π . Siden $\tan x = \sin x / \cos x$, ser vi at vi også kan skrive

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}.$$

Deriverer vi brøken $\cos x / \sin x$, får vi

$$\begin{aligned} D \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right] &= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Altså er

$$D[\cot x] = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

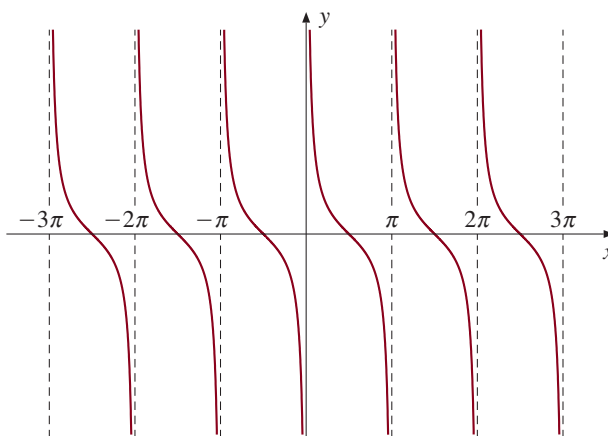
Foregriper vi begivenhetenes gang en smule (integrasjon er egentlig temaet for neste kapittel), ser vi at

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

som er en nyttig formel i mange integrasjonsoppgaver. Bruker vi at $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, kan vi skrive om formelen for den deriverte til

$$D[\cot x] = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

som også er en nyttig formel.



Figur 7.5.1.

Grafen til cotangensfunksjonen ser du i figur 7.5.1. Legg merke til at $x = \pi n$ er en vertikal asymptote for alle hele tall n . Nullpunktene til funksjonen er $(n + 1/2)\pi$ der $n \in \mathbb{Z}$.

Oppgaver i seksjon 7.5

1. Finn de eksakte verdiene:

a) $\cot \frac{\pi}{6} =$

b) $\cot \frac{\pi}{4} =$

c) $\cot \frac{\pi}{3} =$

d) $\cot \left(-\frac{\pi}{3}\right) =$

e) $\cot \frac{5\pi}{4} =$

f) $\cot \frac{7\pi}{2} =$

2. Deriver funksjonene:

- a) $\cot(x^2)$
- b) $\cot^2 x$
- c) $x^2 \cot \sqrt{x} + \sin x$
- d) $e^x \cot(\ln x)$.

3. Finn grenseverdiene:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$
- b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cot x}{(\pi/2) - x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^x$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cot \frac{1}{x} - x \right)$

4. a) Vis at $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$.

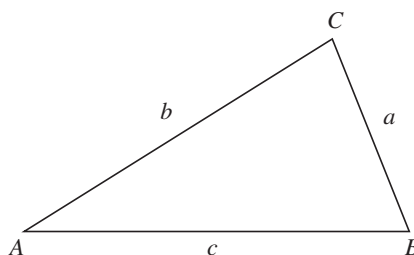
b) Forklar hvorfor $\cot(2z) = \frac{\cot^2 z - 1}{2 \cot z}$ og utled formelen

$$\cot \frac{u}{2} = \frac{\cos u + 1}{\sin u}.$$

c) Kontroller formelen i b) ved å bruke at $\cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2} - 1$ og $\sin u = 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}$.

5. a) Vis at i trekanten ABC er

$$\cot A = \frac{c - a \cos B}{a \sin B}.$$



Dette kalles *cotangenssetningen*.

- b) I en trekant er to sider lik henholdsvis 5 og 10 cm og den mellomliggende vinkelen er 30° . Finn de to andre vinklene.
- 6. a) (UiO) La n være et naturlig tall. Vis at det finnes ett og bare ett punkt x_n i hvert intervall $((n-1)\pi, (n-\frac{1}{2})\pi)$ slik at $\cot x_n = x_n$. Finn også grenseverdien $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/n$.
- b) Funksjonen f er definert for alle reelle tall x ved $f(x) = \sin(e^x)$. Finn alle lokale ekstremalpunkter for f . Finn så alle vendepunktene til f uttrykt ved x_n .

7.6 Arcusfunksjonene

I dataprogrammer og på å lommeregner med funksjonstaster finner du ofte betegnelsene \sin^{-1} , \cos^{-1} og \tan^{-1} . I denne seksjonen skal vi studere funksjonene som skjuler seg bak disse betegnelsene. Som du kanskje har funnet ut, er \sin^{-1} , \cos^{-1} og \tan^{-1} rett og slett de omvendte funksjonene til sinus, cosinus og tangens. Dette kan virke absurd siden ingen av de trigonometriske funksjonene er injektive, men knepet er å innskrenke definisjonsområdene. La oss først studere sinus.

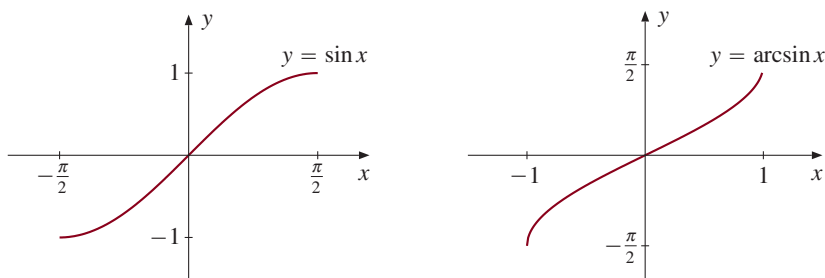
7.6.1 Definisjon

La $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \sin x$. Da er f injektiv med verdimengde $V_f = [-1, 1]$, og den omvendte funksjonen $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ kalles *arcussinus* og betegnes med

$$f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

På lommeregner bruker man ofte betegnelsen \sin^{-1} istedenfor \arcsin for å spare plass, men i matematikkbøker kan denne skrivemåten være farlig fordi det er lett å blande sammen den omvendte funksjonen $\sin^{-1} x = \arcsin x$ med brøken $(\sin x)^{-1} = 1/\sin x$.

Vi kan også definere arcussinus direkte uten å bruke terminologien for omvendte funksjoner: Gitt en $y \in [-1, 1]$ definerer vi simpelthen $\arcsin y$ til å være det tallet x i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ slik at $\sin x = y$. Figur 7.6.1 viser sammenhengen mellom $\sin x$ og $\arcsin x$.



Figur 7.6.1.

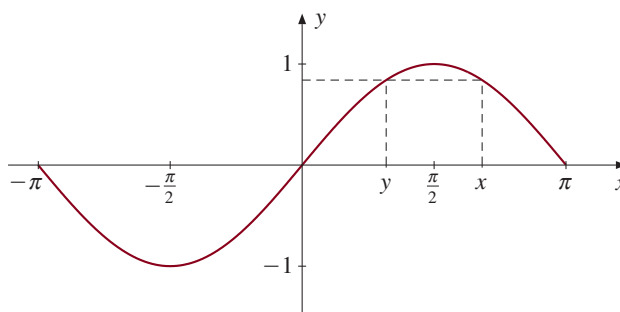
Siden arcussinus er den omvendte funksjonen av sinus, følger det umiddelbart at

$$\sin(\arcsin x) = x$$

for alle $x \in [-1, 1]$. Bruker vi sinus først og deretter arcussinus, må vi imidlertid passe oss. Generelt er

$$\arcsin(\sin x) = y$$

der y er tallet i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ med $\sin y = \sin x$ (se figur 7.6.2). Ligger x i dette intervallet, er selvfølgelig $y = x$, men ellers må vi være litt forsiktige.



Figur 7.6.2.

Ved å bruke teorien fra seksjon 7.4, kan vi raskt skaffe oss flere opplysninger om arcussinus.

7.6.2 Setning

Funksjonen $\arcsin x$ er kontinuerlig og strengt voksende med derivert

$$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bevis: Siden $f(x) = \sin x$ er kontinuerlig og strengt voksende på intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$, følger det fra teorem 7.4.5 at den omvendte funksjonen $g(y) = \arcsin y$ også er strengt voksende og kontinuerlig. Fra teorem 7.4.6 vet vi også at g er deriverbar med

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x},$$

der $x = \arcsin y$ eller, med andre ord, $y = \sin x$. Bruker vi at $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$, ser vi at

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Siden navnet på variabelen ikke spiller noen rolle, kan vi like godt skrive

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

Foregriper vi begivenhetenes gang en smule, ser vi nå én av fordelene ved å innføre funksjonen $\arcsin x$ – vi kan plutselig løse integralet

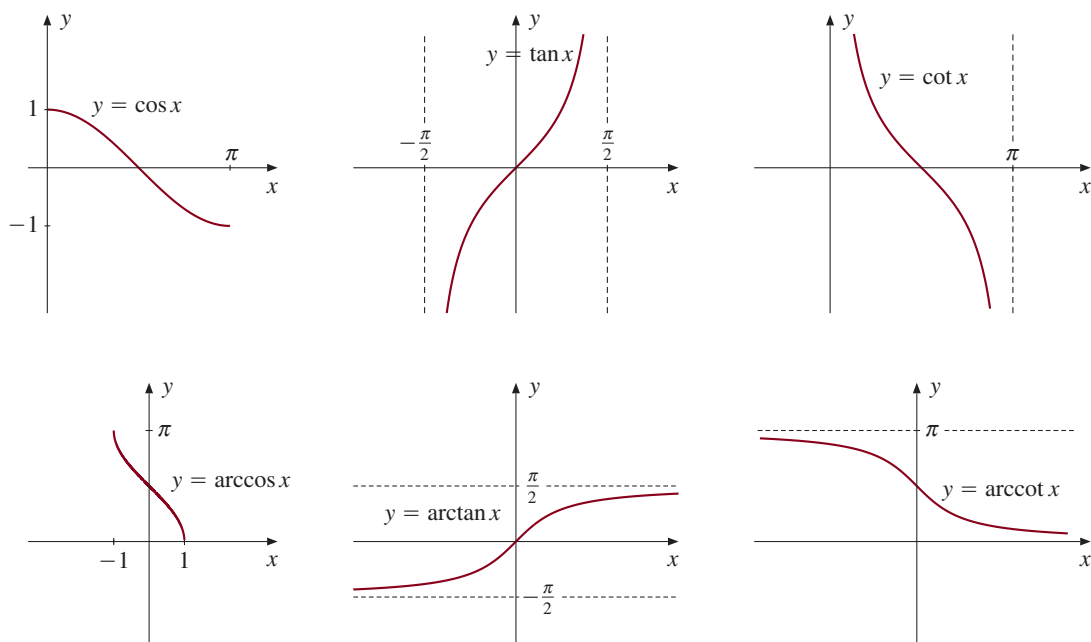
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$$

Som vi senere skal se, medfører dette at vi også kan løse en hel rekke andre integraler som inneholder kvadratrøtter av annengradsuttrykk.

På samme måte som for sinus kan vi også definere de omvendte funksjonene til cosinus, tangens og cotangens.

- 7.6.3 Definisjon** (i) La $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \cos x$. Da er f injektiv, og den omvendte funksjonen kalles *arcuscosinus* og skrives $f^{-1}(x) = \arccos x$.
- (ii) La $f : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \tan x$. Da er f injektiv, og den omvendte funksjonen kalles *arcustangens* og skrives $f^{-1}(x) = \arctan x$.
- (iii) La $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \cot x$. Da er f injektiv, og den omvendte funksjonen kalles *arcuscotangens* og skrives $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$.

Figur 7.6.3 viser cosinus, tangens og cotangens og deres omvendte funksjoner. Legg spesielt merke til at arcustangens har horisontale asymptoter $y = \pi/2$ og $y = -\pi/2$ når x går mot henholdsvis ∞ og $-\infty$, og at arcuscotangens har asymptotene $y = 0$ og $y = \pi$.



Figur 7.6.3.

Også \arccos og \arctan finnes på lommeregnerne, og da som regel under betegnelsene \cos^{-1} og \tan^{-1} .

Ved å bruke teorien for omvendte funksjoner akkurat som i beviset for teorem 7.6.2, kan vi få mer kunnskap om \arccos , \arctan og arccot .

7.6.4 Setning

Funksjonene arccos, arctan og arccot er kontinuerlige. Av disse er arccos og arccot strengt avtagende, mens arctan er strengt voksende. De deriverte er gitt ved

$$D[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2},$$

$$D[\operatorname{arccot} x] = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Bevis: Vi skal nøye oss med å bevise formelen for den deriverte til arcustangens. Ifølge teorem 7.4.6 er (husk formelen $D[\tan x] = 1 + \tan^2 x$):

$$D[\arctan y] = \frac{1}{D[\tan x]} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

siden $y = \tan x$. Bytter vi navn på variabelen, får vi

$$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}.$$

■

Legg merke til at vi også her har lært å integrere en ny funksjon; vi kan nå løse

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

På vanlig måte kan vi selvfølgelig kombinere uttrykkene for de deriverte til arcsin, arccos, arctan og arccot med andre derivasjonsregler. Vi tar med et enkelt eksempel.

7.6.5 Eksempel

Finn den deriverte til

$$f(x) = e^{4x} \arctan x^2.$$

Ved hjelp av produkt- og kjerneregelen ser vi at

$$f'(x) = 4e^{4x} \arctan x^2 + e^{4x} \frac{2x}{1+x^4} = 2e^{4x} \left(2 \arctan x^2 + \frac{x}{1+x^4} \right).$$

■

Oppgaver i seksjon 7.6

1. Finn de eksakte verdiene:

a) $\arcsin \frac{1}{2}$

b) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e) $\arccos \frac{1}{2}$

f) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

g) $\arctan 1$

h) $\arctan \sqrt{3}$

i) $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Finn de deriverte til funksjonene:

a) $\arcsin \sqrt{x}$

b) $\arctan e^x$

c) $x^2 \arcsin x$

d) $\frac{\arcsin x}{x^3}$

e) $\arcsin x + \arccos x$

f) $\ln(\arctan e^x)$

g) $\arccos(\sin x)$

3. Finn grenseverdiene:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin 3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{(\pi/2) - \arctan x}$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan x} \right).$$

4. Gjennomfør de utelatte delene av beviset for setning 7.6.4.
5. La $f(x) = x \arctan x$.
- Avgjør hvor f er voksende og hvor den er avtagende.
 - Hvor er f konveks og hvor er den konkav?
 - Finn asymptotene til f og skisser grafen.
6. a) (UiO) Vis at ligningen $\arctan x = 2 - x$ har en eneste løsning og at den ligger i intervallet $[1, \sqrt{3}]$.
- b) Finn eventuelle asymptoter for funksjonen $f(x) = \arctan x + x - 2$.
7. a) (UiO) Vis at ligningen

$$\frac{1+x}{1+x^2} = 2 \arctan x$$

har en eneste reell løsning $x = x_0$ og at $\frac{1}{3}\sqrt{3} < x_0 < 1$.

b) La

$$\varphi(x) = \frac{\arctan x}{(1+x)^2}.$$

Angi intervallene hvor φ er strengt voksende og strengt avtagende. Tallet x_0 i

a) kan brukes i svaret. Finn den globale maksimumsverdien til φ uttrykt ved x_0 .

8. (UiO) La

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{1+x^2} & \text{for } x \geq 0 \\ Ae^x + B & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

- Finn A og B slik at f er kontinuerlig og deriverbar for alle x . I resten av oppgaven har A og B disse verdiene.
 - Vis at f har et maksimumspunkt mellom 0 og 1. Har f andre ekstremalpunkter? Har f absolutte ekstremalpunkter?
 - Finn eventuelle asymptoter, og skisser grafen til f .
9. (UiO) La f være funksjonen definert ved

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{1+x}.$$

- Vis at definisjonsområdet D_f til f er $D_f = [-1/2, \infty)$. Angi eventuelle nullpunkter for f og finn også eventuelle asymptoter for f .
- Vis at f er strengt voksende på D_f . Har f noen ekstremalpunkter?
- Bestem hvor f er konveks og hvor f er konkav. Finn eventuelle vendepunkter for f og skisser grafen til f .

- d) Vis at ligningen $2 \arcsin\left(\frac{x}{1+x}\right) - 1 = 0$ har nøyaktig en løsning x_0 på D_f og at $0 < x_0 < 1$.
- e) På D_f har f en omvendt funksjon g . Finn definisjonsområdet D_g og verdiområdet V_g til g , og finn også et uttrykk for g på D_g . Skisser grafen til g i samme aksekors som grafen til f .

10. (NTNU) Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \arctan x - \ln(1+x); \quad x \geq 0.$$

- a) Vis at $f(x) > 0$ for $x \in (0, 1)$.
- b) Vis at $f(x^*) = 0$ for en $x^* \in (1, e^{\pi/2} - 1)$.
- c) Benytt Newtons metode til å bestemme x^* med en feil $< 10^{-4}$. (Ta $x_0 = 2$.)

11. (UiB) La

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

- a) Grunngi at $f(x)$ er definert for alle x og vis at $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$ for $x > 0$.
- b) Vis at $f(x) = (\pi/2) - 2 \arctan x$ for $x \geq 0$.
- c) Skisser grafen til f på $[-1, 1]$.
- d) La $F(x) = f(x) - 1$. Forklar at ligningen $F(x) = 0$ har nøyaktig en løsning på $(0, 1)$. Bruk Newtons metode til å finne et anslag for dette nullpunktet. Velg startverdi $x_0 = 0, 2$ og utfør kun én iterasjon.

12. (UiO) Funksjonen

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \ln(x^2+1)$$

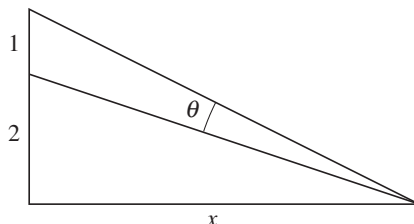
er definert for $x \neq 1$.

- a) Beregn $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Finn hvor f vokser og hvor den avtar, og finn eventuelle lokale maksimumspunkter. Har f noe globalt maksimumspunkt?
- b) Avgjør hvor f er konveks og hvor den er konkav. Undersøk om f har noen asymptoter. Tegn grafen til f .
13. a) (UiO) Deriver funksjonene $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ og $g(x) = -\arctan x$. Tegn grafen $y = f(x) - g(x)$ for $x \neq 0$.
- b) La L_n være linjestykket som forbinder punktene $(-\frac{1}{n}, \arctan[-\frac{1}{n}])$ og $(n, \arctan n)$ i x, y -planet for hvert naturlig tall n . Vis at L_n skjærer x -aksen i punktet $(x_n, 0)$, der

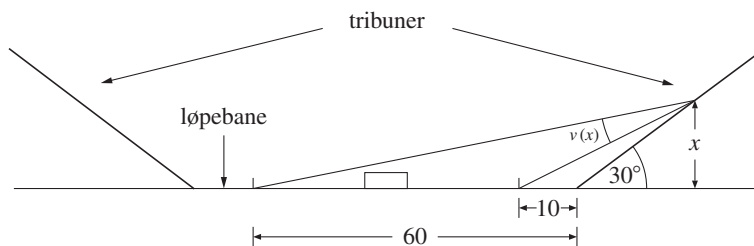
$$x_n = n \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan n\right) - \frac{2 \arctan n}{n\pi}.$$

Finn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

14. (NTNU) En 1 m høy plakett henger på en vertikal vegg slik at nedre bildekant er 2 m over øyenivået til en observatør. Hvor langt fra veggen skal observatøren stå for at vinkelen θ skal bli størst mulig?



15. (UiO) Arne og Egil skal på fotballkamp og lurer på hvor de bør sitte. Egil vil sitte der han alltid har sittet, men Arne går mer systematisk til verks og lager denne skissen.



Han regner ut at dersom de sitter x meter over bakken, vil vinkelen $v(x)$ være gitt ved

$$v(x) = \arctan\left(\frac{60}{x} + \sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{10}{x} + \sqrt{3}\right)$$

«Hva du kan, Arne!» sier Egil, muligens med et snev av ironi.

- Forklar hvordan Arne har kommet fram til denne formelen.
 - Finn $v'(x)$.
 - Arne mener de bør sitte slik at vinkelen $v(x)$ blir størst mulig. Hvor høyt oppe må de sitte for å følge Arnes teori?
16. I denne oppgaven er u og v to vilkårlige tall.

- Forklar hvorfor $\arctan u + \arctan v \in (-\pi, \pi)$. Vis at

$$\arctan u + \arctan \frac{1}{u} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{hvis } u > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{hvis } u < 0 \end{cases}$$

og bruk dette til å vise at

$$\arctan u + \arctan v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

hvis og bare hvis $uv < 1$.

b) Vis at for alle x, y er

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

forutsatt at $\tan x$, $\tan y$ og $\tan(x + y)$ eksisterer.

c) Vis at

$$\arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u + v}{1 - uv}$$

dersom $uv < 1$. Hva er $\arctan u + \arctan v$ når $uv > 1$?

17. a) Anta at $x \in [0, \pi]$. Vis at

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

b) Anta at $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Vis at

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

c) Vis at $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ for $x \in [-1, 1]$.

d) Vis at $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ for $x \in [-1, 1]$.

e) Vis at $\sin(2 \arctan x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ for alle x .

f) Vis at $\cos(2 \arctan x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ for alle x .

*7.7 Hyperbolske og inverse hyperbolske funksjoner

I denne seksjonen skal vi se på en klasse funksjoner som er i slekt med de trigonometriske. Dette slektskapet er så nært at for hver formel som binder sammen to trigonometriske funksjoner, finnes det en tilsvarende formel som binder sammen to hyperbolske funksjoner. I noen tilfeller er disse formlene nøyaktig de samme, men oftere er det en liten forskjell – gjerne et fortegn som er annerledes. Det er disse små forskjellene som gir de hyperbolske funksjonene deres betydning, og som gjør at de kan brukes i sammenhenger hvor de trigonometriske funksjonene nesten, men ikke helt fungerer. Vi skal komme tilbake til dette temaet når vi studerer integrasjonsteknikker i kapittel 9.

De grunnleggende hyperbolske funksjonene kalles *sinus hyperbolicus* og *cosinus hyperbolicus* og er definert ved

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Deriverer vi, ser vi at

$$D[\sinh x] = \cosh x$$

$$D[\cosh x] = \sinh x.$$

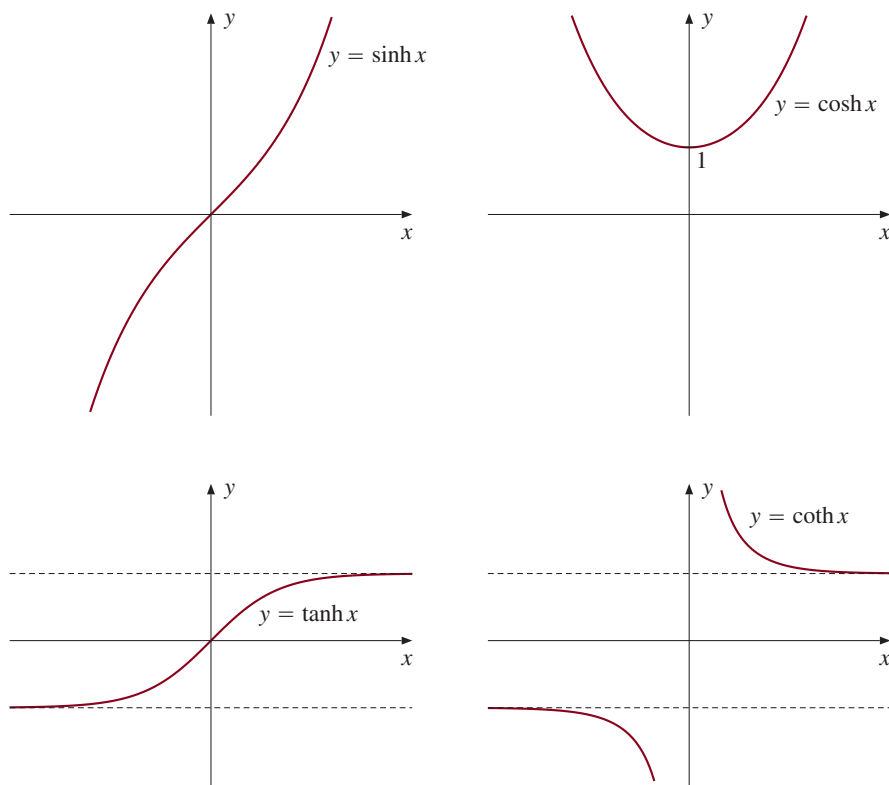
Et enkelt regnestykke (gjør det!) viser dessuten at

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \quad (1)$$

Disse formlene bør sammenlignes med de tilsvarende formlene for vanlig sinus og cosinus, som er

$$\begin{aligned} D[\sin x] &= \cos x \\ D[\cos x] &= -\sin x \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Legg merke til at noen av disse formlene er helt like, mens andre skiller seg på et fortegn. Den lille forskjellen mellom (1) og (2) forklarer hvorfor de nye funksjonene kalles hyperbolske; de har det samme forholdet til hyperbelen $x^2 - y^2 = 1$ som sinus og cosinus har til sirkelen $x^2 + y^2 = 1$.



Figur 7.7.1.

Også for $\sinh 2x$ og $\cosh 2x$ finnes det formler som er nesten identiske med de tilsvarende formlene for $\sin 2x$ og $\cos 2x$:

$$\begin{aligned} \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x. \end{aligned}$$

Begge disse formlene kan utledes direkte fra definisjonene ved enkel regning. Vi viser den første som et eksempel:

$$\begin{aligned} 2 \sinh x \cosh x &= 2 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh 2x. \end{aligned}$$

Når vi først har sinus hyperbolicus og cosinus hyperbolicus, er det naturlig også å innføre tangens hyperbolicus og cotangens hyperbolicus ved

$$\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

Deriverer vi etter brøkregelen, får vi

$$\begin{aligned} D[\tanh x] &= \frac{1}{\cosh^2 x}, \\ D[\coth x] &= -\frac{1}{\sinh^2 x}. \end{aligned}$$

Igjen viser vi den første formelen som et eksempel;

$$D[\tanh x] = D\left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right] = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

hvor vi først har brukt brøkregelen og deretter at $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Selv om det er store algebraiske likheter mellom de trigonometriske og de hyperbolske funksjonene, må vi ikke trekke analogien for langt. Figur 7.7.1 viser at det ikke er noen likhetstrekk mellom grafene til de to funksjonsklassene.

Inverse hyperbolske funksjoner

Akkurat som for de trigonometriske funksjonene er det nyttig å kjenne til de inverse hyperbolske funksjonene. Siden $D[\sinh x] = \cosh x > 0$, er $\sinh x$ strengt voksende og har en invers funksjon som kalles *area sinus hyperbolicus* og skrives

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arsinh} x.$$

I motsetning til $\arcsin x$ kan vi finne en enkel formel for $\operatorname{arsinh} x$. For å gjøre dette, må vi først løse ligningen

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

med hensyn på x . Multipliserer vi med $2e^x$, får vi

$$2ye^x = (e^x)^2 - 1,$$

som vi også kan skrive

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

Dette er en annengradsligning med e^x som ukjent, og løser vi den, får vi

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Siden e^x er positiv, kan den negative roten $y - \sqrt{y^2 + 1}$ ikke brukes, og vi får

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Tar vi logaritmer på begge sider, ser vi at

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Dette betyr at

$$\operatorname{arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

eller med x som variabel

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Deriverer dette uttrykket, får vi

$$D[\operatorname{arsinh} x] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Legg merke til likheten med formelen $D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ i forrige seksjon.

Vi kan gjøre helt tilsvarende regninger for $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{artanh} x$ og $\operatorname{arcoth} x$. (Vi må riktignok være litt forsiktige når vi definerer arcosh – siden \cosh ikke er injektiv, må vi først innskrenke den til å være definert på intervallet $[0, \infty)$ før vi danner den omvendte funksjonen.) Resultatene blir

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) & D[\operatorname{arcosh} x] &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} & D[\operatorname{artanh} x] &= \frac{1}{1-x^2} \quad (\text{for } |x| < 1) \\ \operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} & D[\operatorname{arcoth} x] &= \frac{1}{1-x^2} \quad (\text{for } |x| > 1). \end{aligned}$$

Disse formlene er nyttige for å løse visse typer integraler.

Sammenhengen mellom trigonometriske og hyperbolske funksjoner

La oss helt til slutt i denne seksjonen ta oss tid til å undre på hvorfor det er slik en nær sammenheng mellom trigonometriske og hyperbolske funksjoner. Svaret finner vi langt tilbake i seksjon 3.3 hvor vi viste at

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{og} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Sammenligner vi dette med definisjonene av $\sinh x$ og $\cosh x$, ser vi at

$$\begin{aligned} \sin x &= -i \sinh(ix) \\ \cos x &= \cosh(ix) \end{aligned}$$

eller, som det også kan uttrykkes,

$$\sinh x = -i \sin(ix)$$

$$\cosh x = \cos(ix).$$

Gjennom det komplekse tallsystemet finnes det altså en fundamental algebraisk forbindelse mellom de to funksjonsklassene.

Oppgaver i seksjon 7.7

1. Deriver funksjonene:

a) $f(x) = \cosh(x^2)$

b) $f(x) = \cosh^2(x)$

c) $f(x) = \sinh \sqrt{x}$

d) $f(x) = x \tanh x$

e) $f(x) = \sin x \cosh x$.

2. Bevis formelene for $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{artanh} x$ og $\operatorname{arcoth} x$.

3. Utled formelene for de deriverte til $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{artanh} x$ og $\operatorname{arcoth} x$.

4. Vis formelene:

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

5. Finn grenseverdiene:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sinh x}{x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\coth x)^x$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sinh x)^{1/x}$

6. La $f(x) = x \tanh x$.

a) Avgjør hvor f er voksende og hvor den er avtagende.

b) Vis at f er konveks på intervallet $[-x_0, x_0]$ der x_0 er gitt ved $\tanh x_0 = x_0$.
Bruk Newtons metode til å finne en tilnærmet verdi for x_0 .

c) Finn asymptotene til f og skisser grafen.

7. (UiO) La funksjonen f være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{for } x \leq 0 \\ \frac{\sinh x}{x} & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

der a, b, c er reelle tall.

a) Finn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Velg tallet c slik at f blir kontinuert.

b) Vis at hvis $a = 1/6$ og $b = 0$, så blir $f(x)$ to ganger deriverbar (c har den verdien som ble funnet i punkt a)).

8. (UiB) Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \sinh \sqrt{x}$$

for $x > 0$.

a) Undersøk om $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ eksisterer og finn i tilfelle grensen.

b) Finn den deriverte til f og vis at $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$.

c) Skisser grafen til f .

7.8 Historisk epistel: Naturens språk

Filosofi står skrevet i denne store boken som alltid står åpen for vårt blikk (den kalles Universet), men som ikke kan forstås uten at man først lærer å tolke språket den er skrevet i og symbolene den er komponert av. Den er skrevet i matematikkens språk, og dens symboler er trekanter, sirkler og andre geometriske figurer som er nødvendige for å forstå ett eneste ord av den; uten disse vandrer man rundt i en mørk labyrint.

— Galileo Galilei (1564–1642)

Da det europeiske kulturlivet begynte å blomstre igjen i høymiddelalderen, våknet også interessen for naturvitenskap. De gamle greske skriftene ble funnet frem og oversatt – dels fra arabisk og dels fra originalspråket. Gjenoppdagelsen av Aristoteles førte til at nyplatonismen mistet sin sentrale posisjon som filosofisk fundament for kirkens lære, og Thomas av Aquinas (1225–1274) utformet en ny lærebygning som var en syntese av kristen teologi og aristotelisk filosofi.

I den videre vitenskapelige utviklingen kom den katolske kirken til å spille en dobbeltrolle. Nesten alle tidens vitenskapsmenn var i kirkens tjeneste som prester, lærere

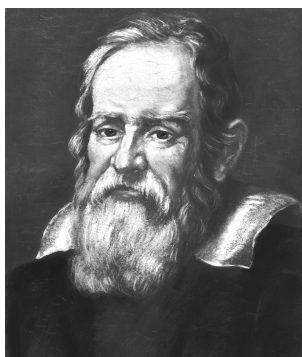
eller munk, og kirkens interesse for naturvitenskapelige spørsmål var en forutsetning for at en ny vitenskap kunne vokse frem. På den annen side var datidens kristendom dogmatisk og detaljrettet, og kirken knyttet sin prestisje til allverdens spørsmål fra alle livets områder. At den klassiske vitenskapen ble bygget inn i dogmeapparatet, styrket nok dens prestisje på kort sikt, men det gjorde en videre utvikling umulig – enhver kritikk av feilaktige vitenskapelige oppfatninger ble automatisk et angrep på kirkens lære.

Og det var feil i den klassiske vitenskapen. Grekerne hadde gjort enorme fremskritt innenfor filosofi, matematikk, astronomi og biologi, men de savnet en god forståelse av grunnleggende fysiske fenomener som fart og kraft. Aristoteles hadde egenhendig gjort biologi til en selvstendig vitenskap basert på observasjoner og eksperimenter, men i fysikk nøyde han seg stort sett med tankeeksperimenter og generell filosofering. Et typisk eksempel er hans tese om at hastigheten til et fallende legeme er proporsjonal med massen – en påstand som er så urimelig gal at den ville bli avslørt av de mest primitive forsøk. Dette eksemplet yder ikke Aristoteles rettferdighet – hans fysikk var en kompleks og systematisk tankebygning basert på læren om de fire elementene – men det viser at grekerne manglet en del grunnleggende kunnskaper som er nødvendige for å bygge en vellykket fysisk teori.

Større hell hadde de i astronomien der flere århundrers innsats avrundes med Ptolemeus' (ca. 100–178 e. Kr.) klassiske verk *Almagest*. Gjennom et finurlig system av sirkelbaner laget Ptolemeus en imponerende nøyaktig modell av planetenes bevegelser. Modellen er uhyre komplisert fordi den bygger på to forutsetninger som var naturlige etter datidens tankegang, men som senere har vist seg å være uriktige. Den ene er at at himmellegemer må bevege seg i sirkelbaner siden sirkelen er den mest fullkomne av alle kurver, og den andre er at jorden er universets midtpunkt, og at planetene derfor beveger seg i baner rundt jorden.

Allerede i oldtiden var det astronomer som mente at solen var planetsystemets naturlige midtpunkt, og at planetenes baner derfor burde beskrives med solen som sentrum, men det var først den polske presten Nicholas Copernicus (1473–1543) som utarbeidet detaljene i et slikt system. Siden Copernicus beholdt Ptolemeus' andre betingelse om at himmellegemene beveger seg i sirkler, er faktisk ikke hans system nevneverdig enklere enn Ptolemeus', men det ga naturlige løsninger på en del problemer som den klassiske astronomien hadde stridd med (blant annet spørsmålet om hvorfor planetene til tider ser ut til å bevege seg baklengs i sine baner).

Copernicus' system vakte imidlertid stor motstand både av teologiske og vitenskapelige grunner. For kirken var det en naturlig parallell mellom jordens plass i universets sentrum og menneskets plass i Guds skaperverk. En utvikling som flyttet jorden bort fra universets midtpunkt, ville også undergrave menneskets enestående posisjon i det kristne verdensbildet. For vitenskapen var det ubegripelig at jorden kunne bevege seg uten at man merket det – fordi relativ bevegelse var dårlig forstått, tenkte man seg at en sten som ble kastet opp fra en planet i bevegelse, ville falle ned et stykke bak utgangspunktet. Skulle man komme videre i astronomien, trengte man en bedre forståelse av hastigheter og krefter.



Figur 7.8.1. Galileo Galilei

Det store gjennombruddet kom med den italienske fysikeren Galileo Galilei (1564–1642). Det hadde vært gjort forsøk med fallende legemer før Galilei, men ingen hadde med samme systematikk undersøkt alle muligheter, og ingen hadde tidligere forsøkt å sammenfatte resultatene i matematisk form. Galilei fant at dersom man ser bort fra luftmotstanden, så faller alle legemer med en fart som øker proporsjonalt med tiden, og denne farten er uavhengig av legemets tyngde. Fra denne loven utledet han at den tilbakelagte strekningen økte proporsjonalt med kvadratet av tiden. Gjennom forsøk med bevegelser i et skråplan oppdaget Galilei at hastigheter kan dekomponeres i en x - og en y -komponent, og at disse komponentene kan behandles uavhengig av hverandre.

I aristotelisk tradisjon er himmelens fysikk helt forskjellig fra jordens – himmellegemene er bygget opp av en uforanderlig «eter» som har helt andre egenskaper enn de fire foranderlige elementene som er byggestenene i jordisk fysikk. Galileis arbeider viste at det ikke bare var himmellegemenes bevegelse som kunne beskrives ved hjelp av matematikk, men at matematikken like godt kunne brukes på enkle jordiske bevegelser. Galilei var også den første som brukte teleskopet til å gjøre systematiske undersøkelser av stjernehimmelen. Han gjorde oppdagelser som styrket ham i troen på at det ikke var noe skille mellom jordisk og himmelsk fysikk – månens overflate minnet om et opprevet fjellandskap, og de fire små månene som kretset om Jupiter, ga ham en miniatyrmodell av det kopernikanske solsystemet. Det ble stadig klarere at de samme fysiske lovene måtte gjelde både på jorden og i himmelen.

Samtidig gjorde astronomien nye fremskritt. Basert på Tycho Brahes (1546–1601) enorme observasjonsmateriale formulerte Johannes Kepler (1571–1630) tre lover for planetenes bevegelser. Han brøt med den gamle regelen om at himmellegemer alltid beveger seg i sirkelbaner, og proklamerte isteden at planetene følger ellipsebaner med solen i det ene brennpunktet. Med et slag forsvant de innviklede beskrivelsene til Ptolemeus og Copernicus der planetene beveger seg langs sirkler som igjen beveger seg på større sirkler – hos Kepler er det nok med én enkel kurve for hver planet.

De nye oppdagelsene krevde en forklaring – hvorfor går planetene i ellipsebaner, og hvorfor ligner planetene og deres måner solsystemer i miniatyr? Forklaringen kom med Isaac Newton (1642–1727) og hans hovedverk *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* fra 1687. I dette verket formulerte Newton sin universelle gravitasjonslov, og med et briljant regnestykke viste han at alle Keplers observasjoner er matematiske konsekvenser av denne enkle loven. Han forklarte også hvorfor himmelens og jordens fysikk er den samme – gravitasjonsloven er en universell lov; det er den

samme kraften som holder planetene på plass i sine baner, får månen til å rotere rundt jorden og eplet til å falle mot jorden. Men Newtons fysikk er mer enn selve gravitasjonsloven – for å kunne bruke den i beregninger måtte han først oppdage de grunnleggende lovene som binder sammen bevegelse og krefter. Den viktigste av disse lovene er den som har blitt hetende Newtons annen lov: kraft er masse ganger akselerasjon.

Newtons oppdagelser revolusjonerte fysikken som fag. Fra å være en samling filosofiske spekulasjoner ispedd noen enkle eksperimenter, ble den nå en matematisk vitenskap der konsekvensene av nye hypoteser først kunne beregnes og deretter testes gjennom eksperimenter. Denne prosessen hadde ikke vært mulig om ikke matematikken samtidig hadde gjennomgått en rivende utvikling. Det er differensial- og integralregning som er det naturlige redskapet for Newtons fysikk, og den nye matematikken ble utviklet parallelt med den nye fysikken. Som vi skal se i seksjon 8.8, spilte Newton en avgjørende rolle også på den matematiske siden.

Utviklingen fra Copernicus til Newton, via Brahe, Galilei, Kepler og mange andre, var ikke bare en vitenskapelig revolusjon, men en omdannelse av hele verdensbildet. I det newtonske univers der jordkloden bare er ett av utallige himmellegemer som sverver rundt i henhold til den samme universelle lov, var det vanskelig å holde fast ved den middelalderske oppfatningen av verden som et kammerspill mellom mennesket og dets skaper. Kirkens reaksjon på den nye vitenskapen var til å begynne med ikke udelt negativ; mange fremstående geistlige oppfordret Copernicus til å publisere sitt system, og hans astronomiske tabeller ble brukt som et grunnlag for den store kalenderreformen på 1570-tallet. Etter hvert vant imidlertid motstanden frem, Copernicus' bok ble forbudt, og Galilei ble tvunget til å avsverge sin kopernikanske overbevisning. Det er ikke så lett å forklare denne utviklingen, men én av årsakene er muligens at den katolske kirken følte seg presset av sine reformerte motstandere – mange protestantiske kirkeledere hadde vært tidlig ute med sin fordømmelse av Copernicus, og katolikkenes avventende holdning ble tatt som et bevis for deres lunkne forhold til Bibelens lære. En annen faktor er kanskje at vitenskapen ble et offer for sin egen suksess; noen nyvinninger kunne nok kirkefedrene tåle, men når Galilei kom med nye revolusjoner hvert annet år, ble det for mye for den konservative majoriteten. For det måtte vel være mer enn et snev av trolldom med i spillet når en mann kunne måle høyden til fjellene på månen? Etter hvert endte striden i en slags våpenhvile – de fleste vitenskapsmenn var selv troende, og kirken fant omsider ut at den kunne ta opp i seg de nye tankene uten å endre sentrale punkter i sin lære. Men Copernicus' bok ble stående på Vatikanets liste over forbudte bøker til 1757.

Cohen har skrevet en god og lettlest bok [2] om utviklingen av den nye fysikken. Mer kontroversiell er Koestlers beskrivelse [6] som understreker at selv ledende tenkere er underlagt sin tids oppfatninger og fordommer. Det er også bryet verd å ta en titt på Galileis egen fremstilling av vitenskapens tenkemåte [4], og ikke minst på Atle Næss' glimrende, lille biografi [8]. Katz [5] har gode beskrivelser av både Ptolemeus og senere astronomer, og utledningen av Keplers lover fra gravitasjonsloven finner du i mange bøker om vektoranalyse, for eksempel Apostol [1], Edwards og Penney [3], Marsden og Tromba [7]. I en bok som kan leses av alle, gir Osserman [9] en fascinerende fremstilling av geometriens rolle i utviklingen av det vitenskapelige verdensbildet.

Litteratur

- [1] Apostol, Tom M.: *Calculus*, Second Edition, Xerox College Publishing, Waltham, 1969.
- [2] Cohen, I. Bernhard: *The Birth of a New Physics*, Penguin Books, London, 1992.
- [3] Edwards og Penney: *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [4] Galilei, Galileo: *Dialog over de to store verdenssystemer – det ptolemeiske og det kopernikanske*, Bokklubbens Kulturbibliotek, Oslo, 2009.
- [5] Katz, Victor J.: *A History of Mathematics*, HarperCollins, New York, 1993.
- [6] Koestler, Arthur: *The Sleepwalkers*, Penguin Books, New York, 1959.
- [7] Marsden , J. E. og A. Tromba: *Vector Calculus*, Third Edition, W. H. Freeman, New York, 1987.
- [8] Næss, Atle: *Da jorden stod stille: Galileo Galilei og hans tid*, Gyldendal, Oslo, 2001.
- [9] Osserman, Robert: *Universets poesi*, Pax, Oslo, 2001.

8 Integrasjon

Nature and Nature's laws lay
hid in night:
God said: «Let Newton be!»,
and all was light.

— *Alexander Pope (1688–1744),
Intended for Sir Isaac Newton*

Hvor høyt er treet, hvilken åkerlapp er størst, hvor mye rommer krukken? Behovet for å finne størrelsen til geometriske objekter meldte seg tidlig i menneskehetens historie, og allerede i de tidligste kildeskriftene vi har fra Egypt og Mesopotamia, finner vi matematiske oppskrifter for å løse slike problemer. Så lenge figurene har rette kanter og sideflater, kan størrelsen ofte beregnes ved hjelp av elementær geometri og litt skarp-sindighet, men når kantene og sideflatene er krumme, blir problemene vanskeligere.

De første som utviklet en systematisk teori for å bestemme størrelsen til geometriske figurer, var de greske matematikerne i oldtiden og da i første rekke Eudoxos (ca. 400–350 f. Kr.) og Arkimedes (287–212 f. Kr.). Den grunnleggende ideen i denne teorien er å beregne størrelsen til kompliserte objekter ved å tilnærme dem med enklere objekter som man lett kan beregne størrelsen til. Dersom man ønsker å finne den nøyaktige størrelsen og ikke bare et omtrentlig overslag, greier det seg ikke med én tilnærming; man må lage stadig bedre approksimasjoner og finne den virkelige størrelsen som en grenseverdi av tilnærmede størrelser. Ved hjelp av denne metoden kunne Arkimedes for eksempel beregne arealet av et parabelsegment.

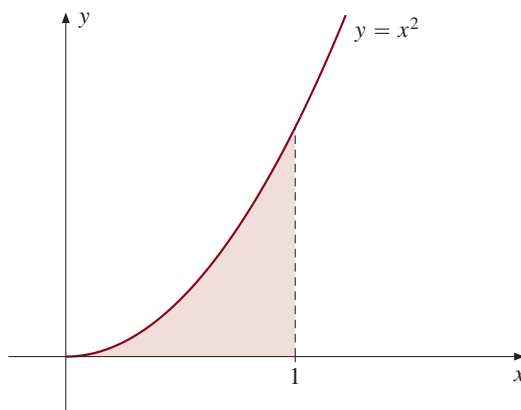
Den greske metoden er logisk lytefri, men regneteknisk uhåndterlig, og det var derfor et enormt fremskritt da Isaac Newton (1642–1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) oppdaget at derivasjon og integrasjon er motsatte regningsarter, og at man kan utføre kompliserte areal- og volumberegninger ved å derivere «baklengs».

I dette kapitlet skal vi først studere grekernes metode på et par eksempler, for deretter å gå over til Newtons og Leibniz' oppdagelse og konsekvensene av den. Det er viktig å være klar over at det Newton og Leibniz gjorde, ikke var et brudd med fortiden, men en revolusjonerende videreføring av tradisjonen fra Eudoxos og Arkimedes. Grunnideene i grekernes teori lever videre som en hjørnestein i Newtons og Leibniz' byggverk.

8.1 Geometriske beregninger av areal og volum

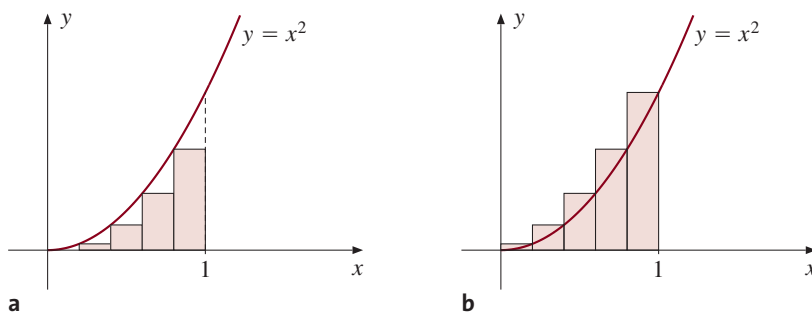
La oss forsøke å beregne et areal og et volum omtrent slik grekerne ville ha gjort det. Vi starter med parabellen $y = x^2$ og prøver å beregne arealet avgrenset av denne kurven, x -aksen og linjen $x = 1$ (se figur 8.1.1). Vi glemmer alt vi tidligere har lært om integrasjon, og later som vi starter på like bar bakke som Eudoxos og Arkimedes.

Hovedideen er som sagt å tilnærme området vårt ved hjelp av enklere figurer som vi lett kan regne ut arealet til.



Figur 8.1.1.

Figur 8.1.2 viser en slik tilnærming; i a) tilnærmer vi fra innsiden ved hjelp av rektangulære bokser under kurven, og i b) tilnærmer vi fra utsiden med rektangulære bokser over kurven. Arealet til området vårt må ligge mellom arealet av boksene i a) og arealet av boksene i b).

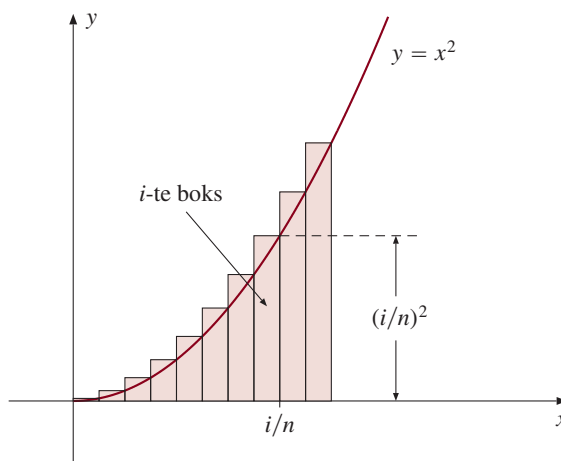


Figur 8.1.2.

La oss regne ut hva disse arealene blir. Dersom hver av boksene har bredde $1/n$ slik som i figur 8.1.3, ser vi at den første av boksene har høyde $(1/n)^2$, den andre har høyde $(2/n)^2$, den tredje $(3/n)^2$ og så videre. Generelt vil den i -te boksen ha høyde

$(i/n)^2$. Det totale arealet av disse boksene blir dermed:

$$\begin{aligned} A_{\text{ut}} &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2. \end{aligned}$$



Figur 8.1.3.

Ser vi isteden på de innskrevne boksene i figur 8.1.4, vil bredden av boksene fortsatt være $1/n$, men den første vil nå ha høyde 0, den andre vil ha høyde $(1/n)^2$, den tredje høyde $(2/n)^2$ og så videre. Generelt vil den i -te boksen ha høyde $(\frac{i-1}{n})^2$. Det totale arealet av disse boksene blir dermed

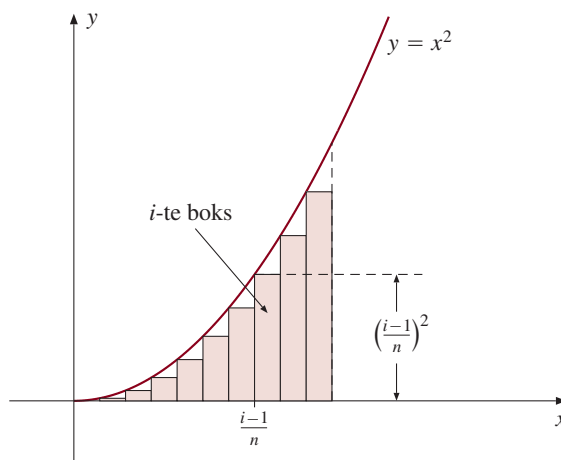
$$\begin{aligned} A_{\text{inn}} &= 0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2. \end{aligned}$$

Det arealet A som vi egentlig er på jakt etter, ligger klemt mellom A_{inn} og A_{ut} , så

$$A_{\text{inn}} < A < A_{\text{ut}}$$

eller med andre ord

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 < A < \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2. \quad (1)$$



Figur 8.1.4.

Ideen er at når n går mot uendelig, vil A_{inn} og A_{ut} bli bedre og bedre tilnærmelser til A . Disse størrelsene burde derfor nærme seg en felles grenseverdi, og denne grenseverdien må være arealet A .

For å fullføre resonnetet må vi først beregne summene $\sum_{i=1}^n i^2$ og $\sum_{i=1}^{n-1} i^2$. Det har vi allerede gjort – ved hjelp av differensligninger viste vi i eksempel 4.2.8 at

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}$$

for alle $k \in \mathbb{N}$. Dermed blir

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

og

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6}.$$

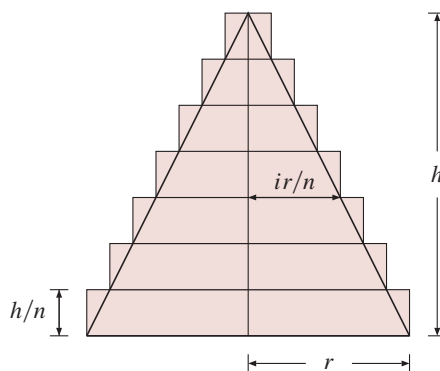
Setter vi dette inn i (1), får vi

$$\frac{(n-1)^3}{3n^3} + \frac{(n-1)^2}{2n^3} + \frac{(n-1)}{6n^3} < A < \frac{n^3}{3n^3} + \frac{n^2}{2n^3} + \frac{n}{6n^3}.$$

Når $n \rightarrow \infty$, går både venstre- og høyresiden mot $1/3$. Altså er A lik $1/3$, og vi har beregnet arealet til flatestykket vårt.

Selv om vi har brukt moderne regneteknikker og notasjon, er argumentasjonen ovenfor helt i grekernes ånd – vi har tilnærmet flatestykket vårt fra innsiden og utsiden, og vist at de approksimerende arealene nærmer seg en felles grense når oppdelingen gjøres finere og finere. Denne felles grensen er arealet til det opprinnelige flatestykket. Sammenlignet med dagens integrasjonsteknikker er regnearbeidet svært krevende, men det er bare et vitnesbyrd om hvor betydningsfull Newtons og Leibniz' oppdagelse er.

La oss vise hvordan de samme teknikkene kan brukes til å beregne et volum. Vi skal vise at volumet til en regulær kjegle med radius r og høyde h er $\pi r^2 h/3$. Fremgangsmåten er den samme som ovenfor – vi tilnærmer kjeglen innenfra og utenfra med volumer som er enklere å beregne. Figur 8.1.5 viser et snitt gjennom kjeglen etter at vi har tilnærmet fra utsiden med en stabel av sylindere.



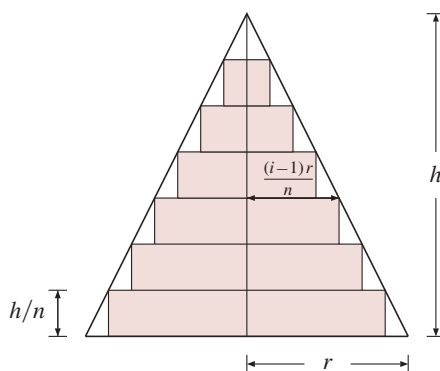
Figur 8.1.5.

Hver sylinder har høyde h/n , og radiene til de forskjellige sylindrene er $r/n, 2r/n, 3r/n, \dots, (n-1)r/n, r$, regnet fra toppen. Siden volumet til en sylinder med radius R og høyde H er $\pi R^2 H$, ser vi at det totale volumet blir

$$\begin{aligned} V_{\text{ut}} &= \pi \left(\frac{r}{n}\right)^2 \left(\frac{h}{n}\right) + \pi \left(\frac{2r}{n}\right)^2 \left(\frac{h}{n}\right) + \dots + \pi r^2 \left(\frac{h}{n}\right) \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{\pi r^2 h}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2. \end{aligned}$$

Dersom vi isteden tilnærmer fra innsiden som i figur 8.1.6, får vi sylindere med høyde h/n og radier $0, 1/n, 2/n, \dots, \frac{n-1}{n}r$. Det samlede volumet blir dermed

$$\begin{aligned} V_{\text{inn}} &= 0 + \pi \left(\frac{r}{n}\right)^2 \left(\frac{h}{n}\right) + \pi \left(\frac{2r}{n}\right)^2 \left(\frac{h}{n}\right) + \dots + \pi \left(\frac{(n-1)r}{n}\right)^2 \left(\frac{h}{n}\right) \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) = \frac{\pi r^2 h}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2. \end{aligned}$$



Figur 8.1.6.

Siden $V_{\text{inn}} < V < V_{\text{ut}}$, håper vi igjen at V_{inn} og V_{ut} nærmer seg en felles grense når oppdelingen blir finere og finere. For å finne ut av dette, summerer vi $\sum_{i=1}^n i^2$ og $\sum_{i=1}^{n-1} i^2$. Det er nøyaktig de samme summene som vi hadde i forrige eksempel, så

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

og

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6}.$$

Dermed er

$$V_{\text{ut}} = \frac{\pi r^2 h}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right)$$

$$V_{\text{inn}} = \frac{\pi r^2 h}{n^3} \left(\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6} \right).$$

Tar vi grenseverdien når $n \rightarrow \infty$, ser vi at $V_{\text{ut}} \rightarrow \pi r^2 h/3$ og $V_{\text{inn}} \rightarrow \pi r^2 h/3$, og følgelig kan vi konkludere med at $V = \pi r^2 h/3$.

Det er på tide å oppsummere. I denne seksjonen har vi sett gjennom eksempler at arealer og volumer kan beregnes ved hjelp av en tilnærmingsteknikk. Vi har også sett at denne teknikken fører til kompliserte regnestykker. I den neste seksjonen skal vi systematisere teknikken til en generell metode, og i seksjonen deretter skal vi forklare sammenhengen med antiderivasjon. Når vi forstår denne sammenhengen, vil vi både ha en systematisk teori for hvordan man definerer arealer, volumer og mange andre størrelser, og en effektiv regneteknikk til å beregne disse størrelsene.

Oppgaver i seksjon 8.1

1. Bevis formelen $V = \frac{1}{3}Gh$ for volumet til en pyramide.
2. a) Finn et uttrykk for summen $s_n = \sum_{k=1}^n k^3$ (for eksempel ved å løse differensligningen $s_n - s_{n-1} = n^3$).
b) Finn arealet under grafen til $y = x^3$ fra $x = 0$ til $x = 1$.

3. Gitt en sirkel med radius r . La a_n være arealet til den innskrevne n -kanten og la A_n være arealet til den omskrevne n -kanten.

a) Vis at $a_6 = \frac{3}{2}\sqrt{3}r^2$ og at $A_6 = 2\sqrt{3}r^2$.

b) Vis at

$$a_n = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}, \quad A_n = nr^2 \tan \frac{\pi}{n}.$$

Bruk lommeregneren til å regne ut a_n og A_n for $n = 8, 32, 128, 1024$.

c) Vis at $\{a_n\}$ er voksende og at $\{A_n\}$ er avtagende, og forklar hvorfor følgene konvergerer. Vis at

$$\frac{a_n}{A_n} = \cos^2 \frac{\pi}{n}$$

og bruk dette til å forklare at $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

d) Vis at $a_{2n}/a_n = 1/\cos \frac{\pi}{n}$ og utled formelen

$$a_{2^n} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-2}}\right)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot a_4.$$

Vis at

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n-2}}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

e) Utled formelen $\cos(u/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$ for $u \in [-\pi, \pi]$. Bruk den til å vise at

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

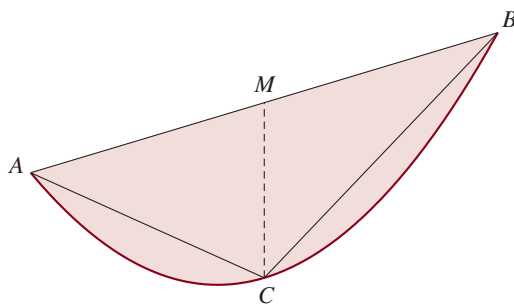
$$\cos\left(\frac{\pi}{32}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

Bevis en generell formel for $\cos(\pi/2^n)$.

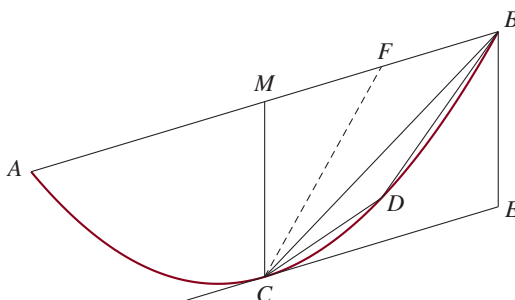
f) Utled Viètes formel for π :

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ rottegn}}}.$$

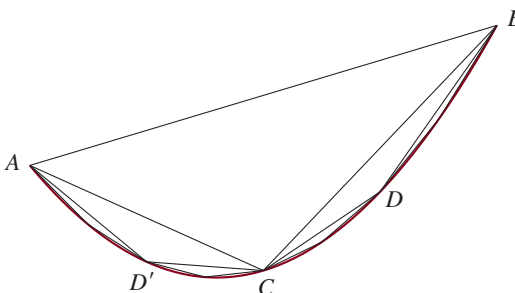
4. I denne oppgaven skal vi se hvordan Arkimedes beregnet arealet til et parabelsegment. Resultatet er vist på figuren: Arealet av det skraverte parabelsegmentet er $\frac{4}{3}$ av arealet til trekanten ABC . For å finne hvilket punkt C er, lar vi M være midtpunktet til AB og trekker en loddrett linje MC ned til parabelbuen.



- a) Vi legger parabelen inn i et koordinatsystem der den får formelen $y = kx^2$. La $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ være to punkter på grafen. La C være punktet på parabelen midt mellom A og B , det vil si at x -koordinaten til C er $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Vis at tangenten i C er parallell med sekanten gjennom A og B .
- b) La D være punktet på parabelen midtveis mellom C og B (x -koordinaten til D er altså $\frac{x_0 + x_2}{2}$). Vis at avstanden fra D ned til tangenten gjennom C (målt loddrett) er en fjerdedel av avstanden CM .
- c) Vis at arealet av trekanten CDB er en fjerdedel av arealet til trekanten CMB . (Hint: La F være midtpunktet til MB . Vis at arealet til CDB er halvparten av arealet til CBF som igjen er halvparten av arealet til CMB .)



- d) La D' være midtpunktet mellom A og C . Vis at arealet til trekanten $CD'A$ er fjerdeparten av arealet til trekanten CMA .
- e) Figuren viser Arkimedes' metode. Først regner han ut arealet til ABC , så legger han til arealene til CDB og $CD'A$ og så videre.



Forklar at arealet til parabelsegmentet er gitt ved

$$A = T + \frac{1}{4}T + \left(\frac{1}{4}\right)^2 T + \left(\frac{1}{4}\right)^3 T + \cdots = \frac{4}{3}T$$

der T er arealet til trekanten ABC .

8.2 Definisjon av integralet

I denne seksjonen skal vi bruke ideen om tilnærming fra innsiden og utsiden til å definere det bestemte integralet $\int_a^b f(x) dx$. For å motivere definisjonene skal vi ofte tenke oss at f er en positiv funksjon og at det vi ønsker, er å beregne arealet under grafen til f mellom punktene a og b . Definisjonene og resultatene vi kommer frem til, vil imidlertid fungere like godt dersom f har negative verdier.

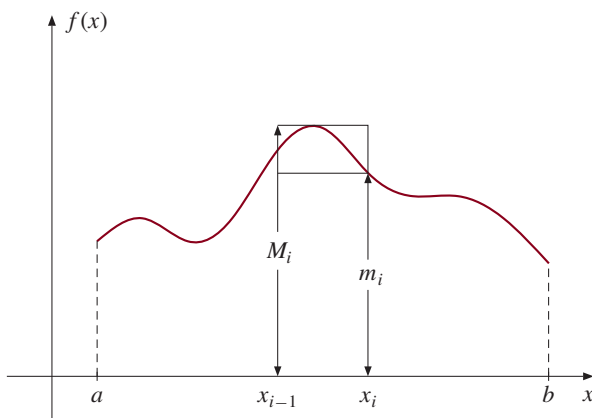
Vi begynner med noen definisjoner. En *partisjon* av intervallet $[a, b]$ er en endelig mengde $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ slik at

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Partisjonen deler opp intervallet $[a, b]$ i n delintervaller

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

For å motivere definisjonen av integralet, tenker vi oss først at f er en positiv, begrenset funksjon og at vi ønsker å beregne arealet under grafen til f .



Figur 8.2.1.

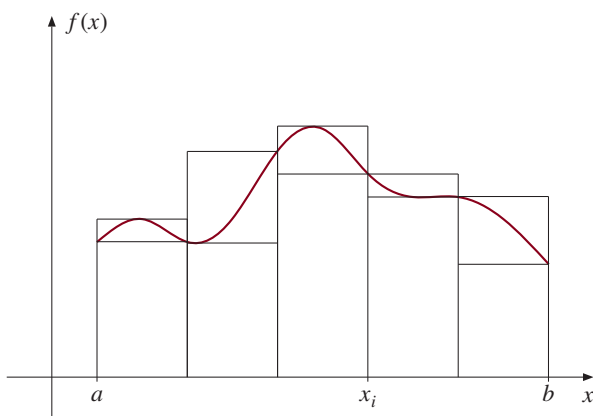
Figur 8.2.1 viser funksjonsgrafene over det i -te delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$. Vi har tilnærmet denne delen av funksjonen med to rektangler – et over og et under grafen. Arealet til det største rektanget er $M_i(x_i - x_{i-1})$, der

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

er minste øvre skranke til f over intervallet $[x_{i-1}, x_i]$. Arealet til det minste rektanget er $m_i(x_i - x_{i-1})$, der

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

er største nedre skranke til f over intervallet $[x_{i-1}, x_i]$.



Figur 8.2.2.

På figur 8.2.2 er dermed det totale arealet til de rektanglene som ligger på oversiden av grafen, lik

$$\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

mens det totale arealet til de rektanglene som ligger på undersiden av grafen, er lik

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Håpet er at dersom vi lager partisjonen finere og finere, så vil disse to uttrykkene nærme seg hverandre, og den felles grenseverdien blir dermed arealet under grafen til f . Legg merke til at dersom f er en negativ funksjon, så vil summene $\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ og $\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ ha en lignende geometrisk tolkning, men denne gangen vil arealene være gitt med negativt fortegn.

For å definere integralet, formaliserer vi først definisjonene ovenfor. Vi starter med en begrenset funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (husk at ifølge ekstremalverdisetningen 5.3.5 er enhver kontinuerlig funksjoner på $[a, b]$ begrenset). Dersom $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ er en partisjon av intervallet $[a, b]$, kaller vi

$$\mathcal{O}(\Pi) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

den øvre trappesummen til Π , og

$$\mathcal{N}(\Pi) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

den nedre trappesummen til Π . Vi definerer så øvreintegralet $\overline{\int_a^b} f(x) dx$ til å være den største nedre skranken til de øvre trappesummene, det vil si

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \{ \mathcal{O}(\Pi) : \Pi \text{ er en partisjon av } [a, b] \}$$

og *nedreintegralet* $\int_a^b f(x) dx$ til å være den minste øvre skranken til de nedre trappe-summene, det vil si

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{N(\Pi) : \Pi \text{ er en partisjon av } [a, b]\}.$$

Øvreintegralet er altså infimum av de verdiene vi kan nå frem til ved å tilnærme fra oversiden, mens nedreintegralet er supremum av de verdiene vi kan få ved å tilnærme fra nedsiden. Det er intuitivt klart at nedreintegralet aldri kan være større enn øvreintegralet (se oppgave 14), og håpet er at de to skal være like slik at vi kan definere integralet til å være fellesverdien av nedre- og øvreintegralet.

8.2.1 Definisjon

Anta at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er en begrenset funksjon. Dersom $\overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx}$ sier vi at f er *integrerbar på* $[a, b]$, og definerer *integralet* $\int_a^b f(x) dx$ ved

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Legg merke til at vi bare har definert integralet for integrerbare funksjoner – for en ikke-integrerbar funksjon f gir ikke symbolet $\int_a^b f(x) dx$ mening. Øvre- og nedreintegralet er derimot definert for *alle* begrensede funksjoner.

Finnes det virkelig funksjoner som ikke er integrerbare? Følgende eksempel viser at svaret er ja.

8.2.2 Eksempel

Funksjonen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{når } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$$

er ikke integrerbar. Grunnen er at siden både de rasjonale og de irrasjonale tallene ligger tett på tallinjen (husk setning 2.2.7), så vil ethvert intervall inneholde både rasjonale og irrasjonale tall. Dette betyr at $M_i = 1$ og $m_i = 0$ uansett hvor lite intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ er, og følgelig er

$$\emptyset(\Pi) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1$$

og

$$N(\Pi) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$$

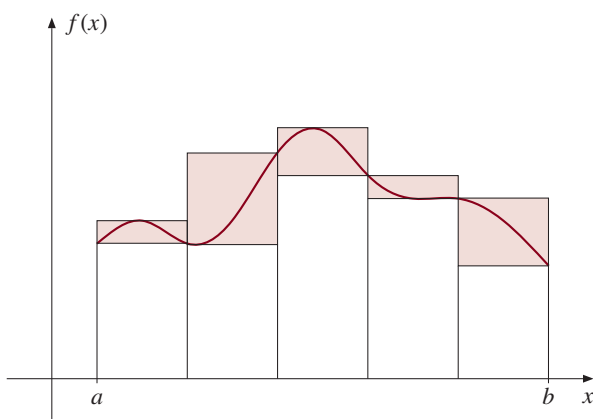
for alle partisjoner Π . Altså er

$$\overline{\int_0^1 f(x) dx} = 1 \quad \text{og} \quad \underline{\int_0^1 f(x) dx} = 0$$

og f er derfor ikke integrerbar på $[0, 1]$. ■

Bemerkning

Hva vil det si at det finnes ikke-integrerbare funksjoner? Geometrisk betyr det at noen funksjoner er så uregelmessige at vi ikke kan definere arealet under grafen deres ved hjelp av vår tilnæringsprosedyre. Det kan selvfølgelig tenkes at vi for noen av disse funksjonene kan definere arealet ved å bruke smartere og mer fleksible metoder (se den historiske epistelen til slutt i dette kapitlet), men man kan vise at det er prinsipielt umulig å finne et fornuftig arealbegrep som omfatter *alle* mengder. Vi må derfor venne oss til tanken på at det finnes visse områder som ikke kan måles og visse funksjoner som ikke kan integreres.



Figur 8.2.3.

Hvordan viser man så at funksjoner er integrerbare? Legg merke til at siden

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} \geq \underline{\int_a^b f(x) dx},$$

så er det nok å vise at det for enhver $\epsilon > 0$, finnes en partisjon Π slik at

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} < \epsilon.$$

Geometrisk betyr dette at arealet av de skraverte feltene i figur 8.2.3 er mindre enn ϵ . Denne observasjonen kan vi bruke til å vise at mange av de funksjonene vi vanligvis støter på, er integrerbare.

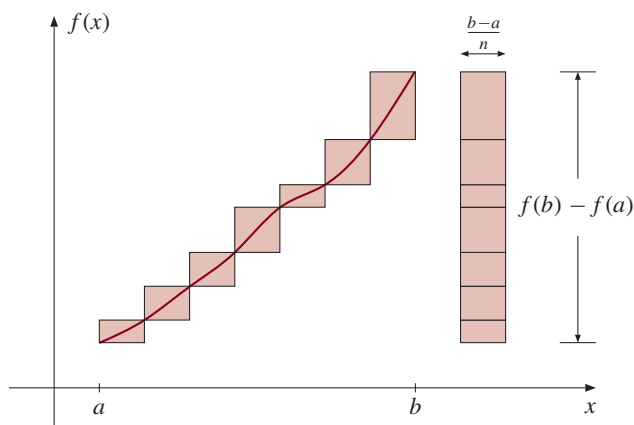
8.2.3 Setning

Enhver monoton funksjon er integrerbar.

Bevis: La oss anta at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er voksende (beviset for avtagende funksjoner er helt analogt). La Π være partisjonen som deler $[a, b]$ inn i n like lange delintervaller av lengde $\frac{b-a}{n}$. Siden f er voksende, er

$$m_i = f(x_{i-1})$$

$$M_i = f(x_i).$$



Figur 8.2.4.

Det er lett å innse at

$$\mathcal{O}(\Pi) - N(\Pi) = [f(b) - f(a)] \cdot \frac{b-a}{n}$$

ved enten å se på figur 8.2.4, eller ved å gjøre følgende regnestykke:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\Pi) - N(\Pi) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= [f(b) - f(a)] \cdot \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

der den siste likheten skyldes at de to summene inneholder de samme leddene bortsett fra leddet $f(b) \cdot \frac{b-a}{n}$ i den første summen og leddet $f(a) \cdot \frac{b-a}{n}$ i den andre. Lar vi n vokse, ser vi at vi kan få $\mathcal{O}(\Pi) - N(\Pi) = [f(b) - f(a)] \cdot \frac{b-a}{n}$ så liten vi måtte ønske, og følgelig er f integrerbar. ■

Beviset ovenfor inneholder viktig informasjon om hvordan man kan beregne integralet til en monoton funksjon. Vi formulerer denne informasjonen som et eget resultat:

8.2.4 Korollar

Hvis $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er en monoton funksjon, så er

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

der $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ er en inndeling av intervallet $[a, b]$ i n like store deler, og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Bevis: Anta at f er voksende. Dersom Π_n er partisjonen i korollaret, vet vi at

$$N(\Pi_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \mathcal{O}(\Pi_n).$$

Ifølge beviset for setningen ovenfor nærmer $N(\Pi_n)$ og $\mathcal{O}(\Pi_n)$ seg hverandre når $n \rightarrow \infty$, og de må derfor begge nærme seg $\int_a^b f(x) dx$ som grenseverdi. Altså er

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} N(\Pi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x$$

og

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\Pi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x.$$

Beviset for avtagende funksjoner er tilsvarende. ■

La oss se hvordan dette resultatet kan brukes til å beregne et integral:

8.2.5 Eksempel

Beregn $\int_0^b e^x dx$.

La $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ være en inndeling av intervallet $[0, b]$ i n like store deler. Ifølge korollaret (med $f(x) = e^x$) er

$$\int_0^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{(i-1)b/n} \cdot \frac{b}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{kb/n}.$$

Summen $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kb/n}$ kan beregnes ved hjelp av differensligninger, men det er lettere å observere at $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kb/n} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{b/n})^k$ er en endelig geometrisk rekke med kvotient $e^{b/n}$. Ifølge summasjonsformelen for geometriske rekker er da

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kb/n} = \frac{(e^{b/n})^n - 1}{e^{b/n} - 1} = \frac{e^b - 1}{e^{b/n} - 1}.$$

Dette betyr at

$$\int_0^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(e^b - 1)}{n(e^{b/n} - 1)} = (e^b - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b/n}{e^{b/n} - 1}.$$

For å beregne den siste grenseverdien er det lurt å sette $x = b/n$ og benytte L'Hôpitals regel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b/n}{e^{b/n} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} = 1.$$

Dermed har vi vist at

$$\int_0^b e^x dx = (e^b - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b/n}{e^{b/n} - 1} = e^b - 1. \quad \blacksquare$$

Regningene i dette eksemplet er av akkurat samme type som de vi gjorde i forrige seksjon, og de illustrerer hvordan korollar 8.2.4 binder sammen den abstrakte definisjonen av integralet med konkrete beregninger.

Det er lett å utvide setning 8.2.3 og korollar 8.2.4 til en klasse funksjoner som omfatter nesten alle de vi støter på i skolematematikken. Vi sier at en funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er *stykkevis monoton* dersom vi kan dele inn $[a, b]$ i endelig mange delintervaller slik at f er monoton på hvert delintervall. Dette betyr altså at vi kan finne en partisjon $a = d_0 < d_1 < d_2 < \dots < d_n = b$ slik at f er monoton på hvert av intervallene (d_{i-1}, d_i) . Sinus og cosinus er typiske eksempler på stykkevis monotone funksjoner, mens de ikke-deriverbare funksjonene vi diskuterte i kapittel 5, er typiske eksempler på funksjoner som ikke er stykkevis monotone. Ved å behandle hvert av intervallene (d_{i-1}, d_i) for seg, er det lett å se at setning 8.2.3 og korollar 8.2.4 også gjelder for stykkevis monotone funksjoner. Vi overlater beviset til leseren.

Oppgaver i seksjon 8.2

- La $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ være funksjonen $f(x) = 1/x$, og la $\Pi = \{1, 6/5, 7/5, 8/5, 9/5, 2\}$ være en partisjon. Finn den øvre trappesummen $\mathcal{O}(\Pi)$ og den nedre trappesummen $N(\Pi)$.
- Finn den øvre og nedre trappesummen bestemt av funksjonen $f(x) = x^2$ og partisjonen $\Pi = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$.
- Finn den øvre og nedre trappesummen bestemt av funksjonen $f(x) = \sin x$ og partisjonen $\Pi = \{0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi\}$.
- Finn den øvre og nedre trappesummen bestemt av funksjonen $f(x) = x^3$ og partisjonen $\Pi = \{-1, -3/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$.
- La $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = x$. For hver $n \in \mathbb{N}$ la Π_n være partisjonen $\{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$.
 - Finn uttrykk for de øvre og nedre trappesummene $\mathcal{O}(\Pi_n)$ og $N(\Pi_n)$.
 - Beregn øvreintegralet $\overline{\int}_0^1 x \, dx$ og nedreintegralet $\underline{\int}_0^1 x \, dx$.
 - Forklar at f er integrerbar og finn integralet $\int_0^1 x \, dx$.
- La a være et positivt tall, la $f(x) = x^2$ og la $\Pi_n = \{0, a/n, 2a/n, 3a/n, \dots, a\}$ være en partisjon av intervallet $[0, a]$.
 - Finn uttrykk for de øvre og nedre trappesummene $\mathcal{O}(\Pi_n)$ og $N(\Pi_n)$.
 - Beregn øvreintegralet $\overline{\int}_0^a f(x) \, dx$ og nedreintegralet $\underline{\int}_0^a f(x) \, dx$.
 - Vis at f er integrerbar og beregn integralet $\int_0^a x^2 \, dx$.
- Finn et uttrykk for summen $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.
 - La $f(x) = x^3$ og la $\Pi_n = \{0, a/n, 2a/n, \dots, a\}$ være en partisjon av $[0, a]$. Finn $\mathcal{O}(\Pi_n)$ og $N(\Pi_n)$.
 - Beregn integralet $\int_0^a x^3 \, dx$.

8. a) Vis at dersom $0 < \Delta x < x$, så er

$$\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} \leq \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \leq \sqrt{x} - \sqrt{x - \Delta x}.$$

- b) Anta at $0 < a < b$, la $\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ være en partisjon av $[a, b]$ med $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ for alle i ($\Delta x < a$), og la $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Vis at

$$\begin{aligned} \emptyset(\Pi) &\leq 2\sqrt{b - \Delta x} - 2\sqrt{a - \Delta x} \\ N(\Pi) &\geq 2\sqrt{b + \Delta x} - 2\sqrt{a + \Delta x}. \end{aligned}$$

- c) Vis at f er integrerbar og finn $\int_a^b f(x) dx$.

9. a) (UiO) Vis at $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$ for alle a og b . Bruk formelen i a) til å vise at

$$\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin kx$$

og

$$\sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \sin kx = \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}.$$

- b) Gitt funksjonen $f(x) = \sin x$ med definisjonsmengde $[0, \pi/3]$, og la Π_n være partisjonen som deler $[0, \pi/3]$ inn i n like lange delintervaller. Finn den øvre og nedre trappesummen $\emptyset(\Pi_n)$ og $N(\Pi_n)$.

- c) Bruk resultatet i c) til å vise at integralet $\int_0^{\pi/3} \sin x dx$ eksisterer og til å bestemme dets verdi.

10. Beregn integralet $\int_0^a \cosh x dx$ ved først å finne uttrykk for de øvre og nedre trappesummene.

11. Funksjonen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \text{ er irrasjonal eller } 0 \\ \frac{1}{q} & \text{hvis } x = \frac{p}{q} \text{ der } p, q \in \mathbb{N} \text{ ikke har felles faktorer.} \end{cases}$$

Vis at f er integrerbar og beregn $\int_0^1 f(x) dx$.

12. (UiO) La i og k være positive, hele tall. I denne oppgaven skal vi bruke notasjonen

$$\begin{aligned} i^{\overline{k}} &= i(i+1)(i+2) \dots (i+k-1) && (k \text{ faktorer}) \\ i^{\underline{k}} &= i(i-1)(i-2) \dots (i-k+1) && (k \text{ faktorer}) \end{aligned}$$

($i^{\overline{k}}$ og $i^{\underline{k}}$ er altså ikke potenser).

- a) Vis at $i^{\overline{k}} \geq i^k \geq i^{\underline{k}}$ for alle $i, k \in \mathbb{N}$. (Her er i^k vanlig potens.)

b) Vis (f.eks. ved induksjon på n) at

$$\sum_{i=1}^n i^{\overline{k}} = \frac{n^{\overline{k+1}}}{k+1} \quad \text{for alle hele tall } n \geq 1 \quad (*)$$

og

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^{\overline{k}} = \frac{n^{\overline{k+1}}}{k+1} \quad \text{for alle hele tall } n \geq 2. \quad (**)$$

c) La a være et positivt reelt tall, og la Π_n være partisjonen som deler intervallet $[0, a]$ inn i n like store deler. La f være funksjonen $f(x) = x^k$ og vis at

$$\emptyset(\Pi_n) \leq \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^n i^{\overline{k}} \quad \text{og} \quad N(\Pi_n) \geq \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n-1} i^{\overline{k}}.$$

d) Bruk b) og c) til å vise at $\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$.

13. La $b > a > 0$ og la k være et positivt reelt tall. Gitt en $n \in \mathbb{N}$, la $\Pi_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ være partisjonen av $[a, b]$ gitt ved

$$x_0 = a, \quad x_1 = at, \quad x_2 = at^2, \quad \dots, \quad x_n = at^n = b$$

der $t = (b/a)^{1/n}$. La $f(x) = x^k$.

a) Vis at den nedre trappesummen kan uttrykkes som

$$N(\Pi_n) = a^{k+1}(t-1) \frac{t^{(k+1)n} - 1}{t^{k+1} - 1}$$

og beregn $\lim_{n \rightarrow \infty} N(\Pi_n)$.

b) Gjør tilsvarende regninger for de øvre trappesummene.

c) Beregn integralet $\int_a^b f(x) dx$.

14. a) La Π og Γ være to partisjoner av intervallet $[a, b]$ og la $\Delta = \Pi \cup \Gamma$ være den partisjonen vi får ved å slå sammen Π og Γ . Vis at

$$\emptyset(\Delta) \leq \emptyset(\Pi) \quad \text{og} \quad N(\Delta) \geq N(\Gamma).$$

b) Vis at enhver øvre trappesum til en funksjon f er større enn eller lik enhver nedre trappesum for f .

c) Vis at øvreintegralet alltid er større enn eller lik nedreintegralet.

15. Vis at dersom $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er integrerbar, så er funksjonen $g(x) = |f(x)|$ også integrerbar og

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

16. a) Vis at dersom $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er integrerbar og $c \in \mathbb{R}$, så er funksjonen $cf(x)$ integrerbar og

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

- b) Vis at dersom f og g er integrerbare funksjoner på $[a, b]$, så er $f + g$ integrerbar på $[a, b]$ og

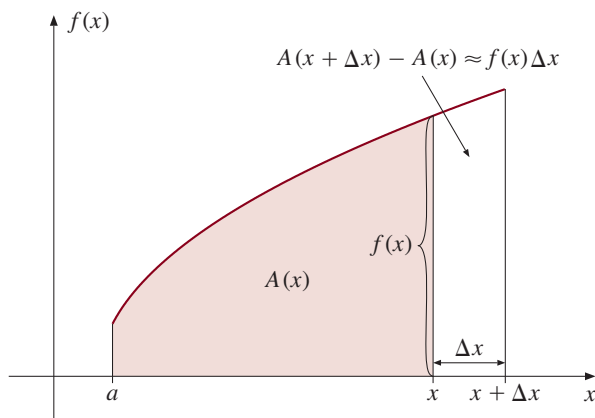
$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

17. Vis at dersom $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er begrenset og stykkevis monoton, så er f integrerbar. (Husk at f er stykkevis monoton dersom det finnes punkter $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ slik at f er monoton på hvert av intervallene (x_{i-1}, x_i) .)

8.3 Analysens fundamentalteorem

Newtons og Leibniz' grunnleggende oppdagelse var at derivasjon og integrasjon er omvendte regningsarter. I stedet for å løse integrasjonsoppgaver gjennom kompliserte og arbeidskrevende summasjoner slik vi har gjort i de foregående avsnittene, kan vi komme frem til svaret rett og slett ved å finne en antiderivert til den funksjonen vi ønsker å integrere. I denne seksjonen skal vi forklare det teoretiske grunnlaget for denne metoden.

Det er ikke så vanskelig å forklare intuitivt hvorfor det må være slik. La f være en kontinuerlig funksjon.



Figur 8.3.1.

I figur 8.3.1 tenker vi oss at vi starter i a og integrerer oppover slik at $A(x)$ er arealet under grafen til f mellom a og x ; med andre ord er $A(x) = \int_a^x f(t) dt$. Går vi et lite stykke videre til $x + \Delta x$, ser vi at $A(x + \Delta x) - A(x)$ må være arealet under grafen mellom x og $x + \Delta x$. Dette området er omtrent et rektangel med høyde $f(x)$ og grunnlinje Δx , og har derfor areal omtrent lik $f(x) \cdot \Delta x$. Altså er

$$A(x + \Delta x) - A(x) \approx f(x) \Delta x$$

der \approx betyr «tilnærmet lik». Deler vi på Δx , får vi

$$\frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \approx f(x).$$

Tilnærmingen burde være bedre jo mindre Δx er (hvorfor?), og følgelig blir

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Dette betyr at $A'(x) = f(x)$, det vil si at den deriverte til integralfunksjonen $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ er $f(x)$ – akkurat hva vi ønsket.

Vår oppgave er å finslipe dette litt grovkornete argumentet til det blir en presis matematisk utledning. Mange er sikkert overbevist allerede og kan ikke forstå vitsen med ytterligere utpenslinger, men fra et logisk synspunkt er det alvorlige mangler ved argumentet ovenfor. Vi har for eksempel snakket om arealet under grafen uten å være sikker på at det eksisterer (det kunne jo tenkes at f ikke var integrerbar), og vi har vært temmelig slurvete i vår omgang med symbolet \approx . Når det gjelder arealbegrepet, er det en vanskelighet til bygget inn i argumentasjonen vår; vi har nemlig antatt at arealet under grafen mellom x og $x + \Delta x$ er $A(x + \Delta x) - A(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$, mens det strengt tatt er definert som $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$. Disse to uttrykkene *burde* selvfølgelig være like, men poenget er at vi ennå ikke har *vist* at de er det. I matematikken har vi ikke lov til å anta at noe er sant fordi det virker «rimelig» – vi må bevise at det faktisk *er* sant.

Vi kan slå to fluer i en smekk. Det viser seg at de argumentene som trengs for å vise at enhver kontinuerlig funksjon er integrerbar, også kan brukes til å vise at integrasjon av kontinuerlige funksjoner er det samme som antiderivasjon. Nøkkelen viser seg faktisk å være følgende resultat, som er en mer presis formulering av vårt ønske om at $\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$ og $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$ skal være det samme.

8.3.1 Setning

Anta at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er begrenset, og at $c \in (a, b)$. Da er

$$(i) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$(ii) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Bevis: De to likhetene vises på nøyaktig samme måte, og vi skriver bare ned argumentet for den første delen. La oss si et par ord om bevisstrategien før vi begynner. Vi skal vise at for enhver $\epsilon > 0$, er

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + \epsilon$$

og

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx + \epsilon.$$

Siden dette gjelder for enhver $\epsilon > 0$, må $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (hvorfor?). Det kan virke litt merkelig at vi smugler inn en epsilon for å bevise en likhet, men denne epsilonen gir oss det ekstra manøvreringsrommet vi trenger.

Gitt en $\epsilon > 0$, kan vi finne partisjoner $\Pi_1 = \{a, x_1, x_2, \dots, c\}$ og $\Pi_2 = \{c, y_1, y_2, \dots, b\}$ av henholdsvis $[a, c]$ og $[c, b]$ slik at

$$\mathcal{O}(\Pi_1) < \int_a^c f(x) dx + \frac{\epsilon}{2}$$

og

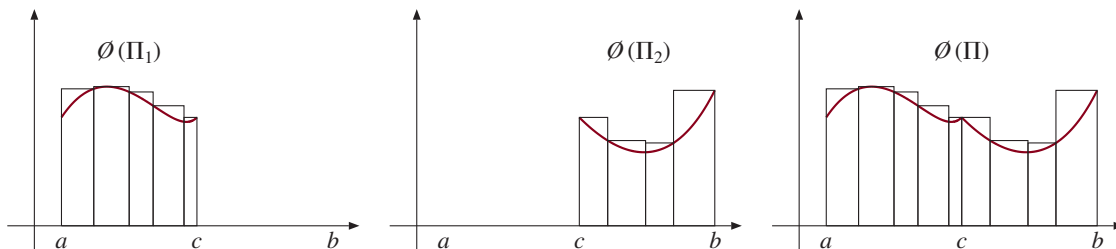
$$\mathcal{O}(\Pi_2) < \int_c^b f(x) dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

Slår vi sammen Π_1 og Π_2 , får vi en partisjon $\Pi = \{a, x_1, x_2, \dots, c, y_1, y_2, \dots, b\}$ av hele intervallet $[a, b]$. Vi ser at $\mathcal{O}(\Pi) = \mathcal{O}(\Pi_1) + \mathcal{O}(\Pi_2)$ (se figur 8.3.2), så

$$\int_a^b f(x) dx \leq \mathcal{O}(\Pi) = \mathcal{O}(\Pi_1) + \mathcal{O}(\Pi_2) \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + \epsilon.$$

Siden vi kan få til dette for en hvilken som helst positiv ϵ , må

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



Figur 8.3.2.

For å vise den omvendte ulikheten, reverserer vi argumentet ovenfor. Gitt en $\epsilon > 0$, kan vi finne en partisjon $\Pi = \{a, x_1, x_2, \dots, b\}$ av $[a, b]$ slik at

$$\mathcal{O}(\Pi) < \int_a^b f(x) dx + \epsilon.$$

La x_i være det punktet i partisjonen Π som ligger rett til venstre for c ; det vil si $x_i < c \leq x_{i+1}$. Da er $\Pi_1 = \{a, x_1, x_2, \dots, x_i, c\}$ en partisjon av $[a, c]$ og $\Pi_2 = \{c, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, b\}$ en partisjon av $[c, b]$. Vi ser at

$$\mathcal{O}(\Pi_1) + \mathcal{O}(\Pi_2) \leq \mathcal{O}(\Pi)$$

(lag en figur). Dermed er

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq \mathcal{O}(\Pi_1) + \mathcal{O}(\Pi_2) \leq \mathcal{O}(\Pi) \leq \int_a^b f(x) dx + \epsilon,$$

og siden dette gjelder for alle $\epsilon > 0$, må

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Dermed har vi ulikheter begge veier og kan konkludere med at

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

■

Bemerkning

Hittil har vi bare definert integralene $\int_a^b f(x) dx$ og $\int_a^b f(x) dx$ når $a < b$, men ofte er det nyttig å ha symbolene definert når $a = b$ og $a > b$ også. Dersom $a = b$, definerer vi $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = 0$. Dette er naturlig fordi $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_a^c f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^a f(x) dx = 0$. Dersom $a > b$, definerer vi

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad \text{og} \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$$

Fordelen med denne definisjonen er at formlene i setning 8.3.1 gjelder uansett størrelsesforholdet mellom a , b og c – vi behøver altså ikke å anta at $a < c < b$. Som et eksempel viser vi at (i) holder når $c < a < b$. Hvis $c < a < b$, sier setningen at

$$\int_c^b f(x) dx = \int_c^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx.$$

Per definisjon er $\int_a^c f(x) dx = -\int_c^a f(x) dx$, og setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, ser vi at

$$\int_c^b f(x) dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_a^b f(x) dx.$$

Flytter vi $\int_a^c f(x) dx$ over på den andre siden, får vi

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

som er det vi skulle vise. Heretter vil vi uten videre bruke (i) og (ii) uten å tenke på rekkefølgen av a , b og c .

La oss bli enige om å kalle funksjonen F en *antiderivert* til f på intervallet $[a, b]$ dersom $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$ og F er kontinuert i endepunktene a, b . Vi trenger en hjelpesetning som sier at to antideriverte bare skiller seg med en konstant.

8.3.2 Lemma

Anta at F og G er to antideriverte til f på intervallet $[a, b]$. Da finnes det en konstant C slik at

$$F(x) = G(x) + C$$

for alle $x \in [a, b]$.

Bevis: Definer $H(x) = F(x) - G(x)$. For alle $x \in (a, b)$ er

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

og ifølge korollar 6.2.4 betyr dette at $H(x)$ er konstant, det vil si $C = H(x) = F(x) - G(x)$. Men dermed er $F(x) = G(x) + C$. ■

Vi er nå klare til å bevise det viktigste resultatet i dette kapitlet – og kanskje i hele boken.

8.3.3 Analysens fundamentalteorem Anta at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert. Da er f integrerbar på ethvert intervall $[a, x]$ der $a \leq x \leq b$ og funksjonen

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

er en antiderivert til f på $[a, b]$.

Bevis: Siden vi ikke vet om f er integrerbar ennå, kan vi ikke skrive opp integralet $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Men f er begrenset (husk ekstremalverdisetningen 5.3.5), så vi kan skrive opp øvreintegralet

$$G(x) = \overline{\int_a^x f(t) dt}$$

og nedreintegralet

$$H(x) = \underline{\int_a^x f(t) dt}.$$

Vi skal først vise at G er en antiderivert til f på $[a, b]$. Vi må da vise at $G'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$, og at G er kontinuert i endepunktene a og b . Vi konsentrerer oss om deriverbarheten som er det vanskeligste punktet (kontinuiteten følger fra oppgave 17). Per definisjon er

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\overline{\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt} - \overline{\int_a^x f(t) dt} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \overline{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt} \end{aligned}$$

der det siste skrittet bruker setning 8.3.1. For hver Δx , la $M(x, \Delta x)$ være supremum til f over intervallet $[x - |\Delta x|, x + |\Delta x|]$ (tallverdiene er med i tilfelle Δx skulle være

negativ), og la $m(x, \Delta x)$ være infimum til f over det samme intervallet. Siden f er kontinuert, må

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} M(x, \Delta x) &= f(x) \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m(x, \Delta x) &= f(x).\end{aligned}$$

Fra definisjonen av øvreintegralet ser vi at dersom Δx er positiv, så er (tenk på øvre og nedre trappesummer)

$$m(x, \Delta x) \cdot \Delta x \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \leq M(x, \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Tilsvarende ser vi at om Δx er negativ, så er

$$m(x, \Delta x) \cdot (-\Delta x) \leq \int_{x+\Delta x}^x f(t) dt \leq M(x, \Delta x) \cdot (-\Delta x).$$

I begge tilfeller er

$$m(x, \Delta x) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \leq M(x, \Delta x),$$

og dermed er

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(x).$$

Det betyr at

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(x)$$

som er nøyaktig det vi ønsket å vise.

På akkurat samme måte viser man at $H'(x)$ er en antiderivert til $f(x)$ på $[a, b]$. Ifølge lemma 8.3.2 er da $G(x) = H(x) + C$. Siden $H(a) = G(a) = 0$, må konstanten C være null, og følgelig er $G(x) = H(x)$. Dermed er øvreintegralet

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

lik nedreintegralet

$$H(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

og per definisjon betyr det at f er integrerbar over intervallet $[a, x]$. Altså eksisterer integralet $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, og

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt = G(x).$$

Siden $G'(x) = f(x)$, må $F'(x) = f(x)$, og beviset er fullført. ■

Analysens fundamentalteorem har mange konsekvenser – både teoretiske og praktiske. Vi skal diskutere de teoretiske til slutt i denne seksjonen. De praktiske er lettest å se om vi omformulerer resultatet litt.

8.3.4 Korollar

Anta at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og at K er en antiderivert til f . Da er

$$\int_a^b f(x) dx = K(b) - K(a).$$

Bevis: Fra analysens fundamentalteorem vet vi at også

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

er en antiderivert til f . Ifølge lemma 8.3.2 er da $F(x) = K(x) + C$. Bruker vi at $F(a) = 0$, får vi

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) = F(b) - F(a) = [K(b) + C] - [K(a) + C] = K(b) - K(a).$$

■

Notasjon: Vi skal bruke skrivemåten $[K(x)]_a^b = K(b) - K(a)$.

Det er korollaret ovenfor som tillater oss å integrere på den måten vi er vant til.

8.3.5 Eksempel

Beregn

$$\int_2^3 x^4 dx.$$

Siden den deriverte til $x^5/5$ er x^4 , forteller korollaret oss at

$$\int_2^3 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_2^3 = \frac{3^5}{5} - \frac{2^5}{5} = \frac{243 - 32}{5} = \frac{211}{5}.$$

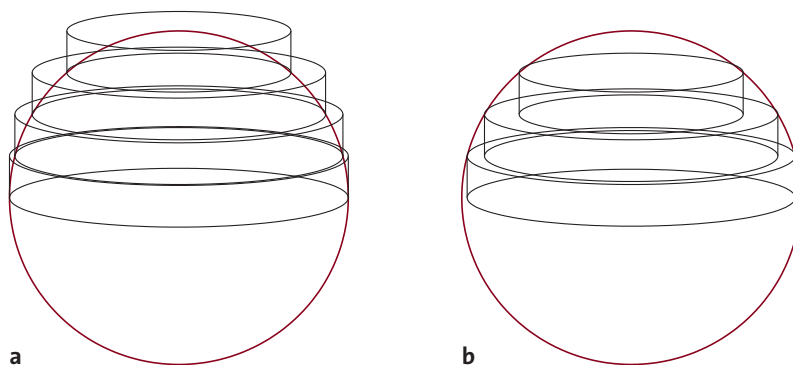
■

La oss også se på et eksempel som viser hvordan de forskjellige delene av teorien vår spiller sammen når vi skal løse et anvendt problem.

8.3.6 Eksempel

Utleid formelen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ for volumet til en kule.

Vi skal vise at volumet til en halvkule er $V = \frac{2}{3}\pi r^3$.



Figur 8.3.3.

Figur 8.3.3 viser hvordan vi kan tilnærme halvkulen fra innsiden og utsiden ved hjelp av en stabel sylinderskiver. På snittegningen, figur 8.3.4 ser vi at når vi tilnærmer fra innsiden, har den i -te sylinderskiven høyde $\Delta x = r/n$ og radius $\sqrt{r^2 - x_i^2}$. Volumet av denne sylinderskiven er

$$\pi \left(\sqrt{r^2 - x_i^2} \right)^2 \Delta x = \pi (r^2 - x_i^2) \Delta x,$$

og det totale volumet av indre sylinderskiver er derfor

$$V_{\text{indre}} = \sum_{i=1}^n \pi (r^2 - x_i^2) \Delta x.$$

Ser vi isteden på de ytre sylinderskivene, vil de ha volum

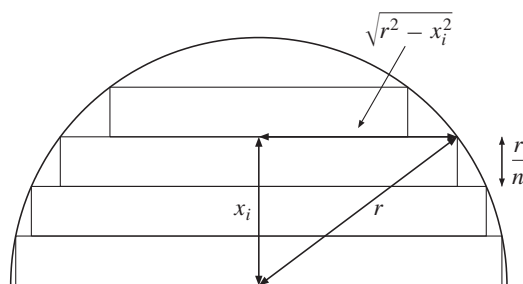
$$V_{\text{ytre}} = \sum_{i=1}^n \pi \left(\sqrt{r^2 - x_{i-1}^2} \right)^2 \Delta x = \sum_{i=1}^n \pi (r^2 - x_{i-1}^2) \Delta x.$$

Uttrykkene for V_{indre} og V_{ytre} er nedre og øvre trappesummer for funksjonen $\pi(r^2 - x^2)$, og ifølge korollar 8.2.4 konvergerer de derfor begge mot $\int_0^r \pi(r^2 - x^2) dx$. Dette må bety at volumet til halvkulen er

$$V = \int_0^r \pi(r^2 - x^2) dx.$$

For å regne ut dette integralet observerer vi at siden $\pi r^2 x$ og $\frac{\pi}{3} x^3$ er antideriverte til henholdsvis πr^2 og πx^2 , så er $\pi r^2 x - \frac{\pi}{3} x^3$ en antiderivert til $\pi(r^2 - x^2)$. Ifølge korollaret ovenfor er da

$$\int_0^r \pi(r^2 - x^2) dx = \left[\pi r^2 x - \frac{\pi}{3} x^3 \right]_0^r = \pi r^2 r - \frac{\pi}{3} r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3.$$



Figur 8.3.4.

Vi har dermed vist at volumet til en halvkule er

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3$$

akkurat som vi skulle. ■

Fremgangsmåten i dette eksemplet er typisk: Først approksimerer vi den størrelsen vi ønsker å regne ut ved hjelp av summer. Disse summene gjenkjenner vi som øvre og nedre trappesum til et visst integral, og av dette følger det at størrelsen vi er på jakt etter er lik integralet. Så kobler vi inn analysens fundamentalteorem for å beregne integralet ved hjelp av en antiderivert. Vi skal se flere eksempler på denne arbeidsmåten i senere seksjoner.

La oss også ta med et annet eksempel på bruken av analysens fundamentalteorem.

8.3.7 Eksempel

Vi skal finne den deriverte til $G(x) = \int_0^{\cos x} e^{t^2} dt$. Det første man gjerne tenker på, er å regne ut det ubestemte integralet, sette inn grensene, og så derivere svaret. I dette tilfellet er denne fremgangsmåten umulig siden vi ikke greier å finne en antiderivert til e^{t^2} (og selv om vi kunne finne en antiderivert, ville metoden vært tungvinn). Det neste vi kanskje tenker på, er at det er synd den øvre grensen er $\cos x$ og ikke x , for i så fall kunne vi ha brukt analysens fundamentalteorem til å si at siden integrasjon og derivasjon er motsatte regningsarter, ville vi få integranden tilbake når vi deriverte integralet. Denne observasjonen er faktisk halvveis til målet – alt vi trenger er en liten vri:

La oss først definere funksjonen F ved $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. Ifølge analysens fundamentalteorem er da $F'(x) = e^{x^2}$. Så observerer vi at $G(x) = F(\cos x)$. Vi kan nå bruke kjerneregelen til å derivere G :

$$G'(x) = F'(\cos x)(\cos x)' = e^{\cos^2 x}(-\sin x) = -e^{\cos^2 x} \sin x.$$

Helt til slutt i denne seksjonen er det kanskje på sin plass å diskutere hvorfor analysens fundamentalteorem er så viktig. Hvorfor kunne vi ikke rett og slett ha definert integralet til å være den antideriverte, og ha sluppet alle disse bevisene? Det er flere gode

grunner. Den viktigste er kanskje at det er ideen om integralet som grenseverdien av en sum som er viktig når man skal løse praktiske problemer ved hjelp av integrasjon – det er denne ideen som gjør at man kan omforme et fysisk eller teknologisk problem til en integrasjonsoppgave. Den andre grunnen er at det er ideen om tilnærming ved hjelp av trappfunksjoner (eller andre klasser av enkle funksjoner) som ligger bak alle generaliseringer av integralbegrepet til funksjoner av flere variable eller enda mer kompliserte funksjoner. Forstår man ikke denne ideen i det relativt enkle tilfellet vi ser på her, har man ingen mulighet til å forstå disse generaliseringene. Den tredje grunnen er mer teoretisk. Dersom vi hadde definert integralet som en antiderivert, hadde vi ikke visst hvilke funksjoner som var integrerbare – det finnes nemlig mange funksjoner som er integrerbare (slik vi har definert begrepet), men som ikke kan integreres i den forstand at vi kan skrive ned en formel for den antideriverte (et eksempel er e^{-x^2}). Spesielt i teoretisk arbeid ville det ha vært plagsomt ikke å kunne snakke om integralet til en funksjon før man faktisk hadde integrert den.

Hva blir så konklusjonen på dette avsnittet? At man bør tenke på integralet på to forskjellige måter: Når det gjelder den teoretiske definisjonen og de praktiske anvendelsene bør man tenke på integralet som en grense av trappesummer, men når det gjelder utregningen av integraler, er det mye mer effektivt å tenke på antiderivasjon. Analysens fundamentalteorem sier at disse to tenkemåtene stemmer overens.

La meg legge til at det er vanlig å bevise analysens fundamentalteorem på en annen måte enn det vi har gjort her. Beviset ovenfor unngår begrepet «uniform kontinuitet» som ofte faller vanskelig på dette nivået (er du nysgjerrig, finner du en kort innføring i begrepet i oppgavene 15 og 16). Jeg lærte i sin tid beviset av Henrik Martens (se [12]).

Oppgaver i seksjon 8.3

1. Løs integralene ved å finne antideriverte til de gitte funksjonene:

a) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

b) $\int_0^2 2x^3 \, dx$

c) $\int_0^1 e^{-x} \, dx$

d) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\int_1^e \frac{dx}{x}$

f) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

g) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$

h) $\int_1^9 (\sqrt{x})^3 \, dx$

2. Løs integralene ved å finne de antideriverte til de gitte funksjonene:

a) $\int_{-1}^1 \cosh x \, dx$

b) $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx$

c) $\int_{-1}^3 \sinh 3x \, dx$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sinh x + \cos 3x) \, dx$

3. Finn verdien til integralene:

a) $\int_0^{2\pi/3} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \, dx$

b) $\int_0^2 e^{3x+2} \, dx$

c) $\int_1^4 \frac{1}{2x+1} \, dx$

d) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+4x^2}$

e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

f) $\int_2^3 \left(\sinh 5x + \frac{2}{x-1} \right) \, dx$

g) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{e^{7x}} \right) \, dx$

4. Finn verdien til integralene:

a) $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) \, dx$

b) $\int_0^1 \frac{4x}{1+x^2} \, dx$

c) $\int_0^1 x^2 e^{x^3} \, dx$

d) $\int_0^{\pi} \cos x e^{\sin x} \, dx$

e) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x \, dx$

5. Finn den deriverte til funksjonene:

$$\text{a) } f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\text{b) } f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\text{c) } f(x) = \int_1^x \arctan t^2 dt$$

6. a) Anta at f er kontinuert og at g er deriverbar. Vis at den deriverte til

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\text{er } G'(x) = f(g(x))g'(x).$$

b) Beregn de deriverte til funksjonene:

$$\text{(i) } \int_0^{\sin x} te^{-t} dt \quad \text{(ii) } \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \quad \text{(iii) } \int_{\sin x}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

7. Finn grenseverdiene:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x e^{1/t} dt}{x^2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt}{\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}} dt}$$

8. (IH) Et areal er begrenset av grafen til funksjonen $f(x) = e^{-x^2}$, x -aksen og de to rette linjene $x = a$ og $x = 3a$, der $a > 0$. Forklar hvorfor arealet er gitt ved

$$g(a) = \int_a^{3a} e^{-x^2} dx,$$

og bestem den verdien av a som gjør flaten størst mulig.

9. Anta at f er kontinuert. Vis at det finnes en $c \in (a, b)$ slik at

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Dette kalles ofte *middelverdisetningen for integraler*.

10. (NTNU) La $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon og anta at

$$\sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\} < 1.$$

Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)^n dx = 0.$$

11. a) (UiO) La funksjonen h være definert ved

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Vis at h er kontinuerlig for $x = 0$.

b) Funksjonen f er definert for alle x ved $f(x) = \int_0^x h(t) dt$. Vis at f er strengt voksende på \mathbb{R} .

c) Bruk for eksempel middelverdisetningen til å vise at $\arctan x > \frac{x}{1+x^2}$ for $x > 0$ og $\arctan x < \frac{x}{1+x^2}$ for $x < 0$. Bruk dette til å avgjøre hvor f er konkav og hvor f er konveks.

d) Da f er strengt voksende, har f en invers funksjon g . Finn definisjonsmengden til g og finn $g'(0)$.

12. (UiO) La funksjonen φ være definert for alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ved $\varphi(x) = -\int_0^x \ln \cos t dt$.

a) Vis at $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

b) Finn de deriverte φ' og φ'' .

c) Bestem intervallene hvor φ er voksende, avtagende, konveks og konkav.

d) Finn grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)/x^3$.

e) Vis ved derivasjon at

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - x \ln 2$$

er oppfylt for alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

f) Vis at $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \varphi(x) = (\pi/2) \ln 2$, og skisser grafen til φ .

13. a) (UiO) La g være en positiv, monotont voksende, kontinuerlig funksjon på $[0, \infty)$. Definer

$$h(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

Vis at h er positiv og voksende.

b) Vis at $h(x) \leq g(x)$ for alle $x \in [0, 1]$.

c) Definer følgen $\{a_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ved:

$$\begin{aligned} a_1(x) &= g(x) \\ a_2(x) &= \int_0^x g(t) dt \\ &\dots\dots\dots \\ a_n(x) &= \int_0^x a_{n-1}(t) dt. \end{aligned}$$

Vis at følgen $\{a_n(x)\}_{n=1}^\infty$ konvergerer for hver fast $x \in [0, 1]$.

14. (UiO) Anta at $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig, at $g(x) \geq 0$ for alle x , og at det finnes en $c \in [a, b]$ slik at $g(c) > 0$. Vis at

$$\int_a^b g(x) dx > 0.$$

Er dette nødvendigvis sant hvis g ikke er kontinuerlig?

15. (UiO) La f være en kontinuerlig funksjon definert på \mathbb{R} . La

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{hvis } x \neq 0 \\ f(0) & \text{hvis } x = 0. \end{cases}$$

- a) Vis at g er kontinuerlig.
- b) Anta i tillegg at f er begrenset. Vis at g er begrenset.

16. (UiO) I denne oppgaven skal vi studere hvordan tallene $a_n = \sum_{k=1}^n k e^{(k/n)^2}$ oppfører seg når n vokser. En rask forundersøkelse (som du ikke skal gjøre) tyder på at det kan være enklere å undersøke følgen $\{a_n/n^2\}$ når n vokser.

a) Finn en funksjon f slik at a_n/n^2 kan oppfattes som øvre trappesum til integralet

$$\int_0^1 f(x) dx,$$

med partisjonen $\Pi_n = \{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$, og finn den tilsvarende nedre trappesummen.

b) Regn ut $\int_0^1 f(x) dx$ ved hjelp av analysens fundamentalteorem, og bruk resultatet til å vise at

$$\frac{n^2(e-1)}{2} < a_n < \frac{n^2(e-1)}{2} + ne.$$

17. I denne oppgaven skal vi vise at dersom $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er begrenset, så er funksjonene $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ og $H(x) = \int_x^a f(t) dt$ kontinuerlige

- a) Anta at $|f(x)| \leq M$ for alle $x \in [a, b]$. Vis at for alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ er $|G(x_1) - G(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ og $|H(x_1) - H(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$. (Hint: Bruk setning 8.3.1 og definisjonen av øvre-/nedreintegral).
- b) Bruk a) og definisjonen av kontinuitet til å vise at G og H er kontinuerlige på $[a, b]$.

18. (UiO) I denne oppgaven er $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funksjonen definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{for } x \neq 1 \\ 1 & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

- a) Vis at f er kontinuerlig.
- b) Finn den deriverte til f for $x \neq 1$. Vis at f er deriverbar i $x = 1$ og finn $f'(1)$.
- c) I resten av oppgaven er $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funksjonen definert ved

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

der f er som ovenfor. Finn $F'(x)$ og vis at F er strengt voksende.

- d) Finn $F''(x)$ og vis at F er konkav.

19. (UiO) La $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon der $0 < a < b$, og la

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Vis at det finnes $c \in (a, b)$ slik at

$$\int_a^b f(x) dx = cf(c)$$

(Hint: Bruk middelverdisetningen på funksjonen $F(x) = \frac{1}{x} \int_a^x f(t) dt$.)

20. (UiO) I denne oppgaven er $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ to kontinuerlige funksjoner, og vi antar i tillegg at $g(x) > 0$ for alle $x \in [0, \infty)$. Vis at dersom funksjonen

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

er strengt voksende, så er også funksjonen

$$H(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \quad x > 0$$

strengt voksende. (Hint: Sett $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ og $G(x) = \int_0^x g(t) dt$, og finn først $H'(x)$ uttrykt ved $F(x)$, $G(x)$, $f(x)$ og $g(x)$. Du kan få bruk for Cauchys middelverdisetning fra seksjon 6.3.)

8.4 Det ubestemte integralet

Analysens fundamentalteorem forteller oss at det er viktig å kunne derivere «baklengs» – det vil si å kunne finne de antideriverte til en gitt funksjon. Når vi skal gjøre dette i praksis, er det greit å ha et symbol for antiderivasjon. Siden formålet med antiderivasjon er å løse integraler, velger vi et symbol og en terminologi som minner oss om dette:

8.4.1 Definisjon

Vi definerer det *ubestemte integralet*

$$\int f(x) dx$$

til å være den generelle antideriverte til f . Siden to antideriverte er like opp til en konstant, betyr det at $\int f(x) dx$ er lik en spesiell antiderivert pluss en vilkårlig konstant. Legg merke til at det ubestemte integralet $\int f(x) dx$ bare er definert når f har en antiderivert.

8.4.2 Eksempel

Siden $-\cos x$ er en spesiell antiderivert til $\sin x$, blir

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

der C er en vilkårlig konstant. ■

I denne seksjonen skal vi se på de grunnleggende egenskapene til det ubestemte integralet. Nesten alt vi skal si, er repetisjon fra skolematematikken, og behersker du integrasjon godt fra før av, kan du sikkert nøye deg med en rask gjennomlesning (men sørg for at du får med deg det du trenger om de «nye» funksjonene \arcsin , \arctan , \sinh , \cosh osv.).

En av de store fordelene ved analysens fundamentalteorem er at vi øyeblikkelig kan løse en stor klasse integrasjonsproblemer. Leser vi formlene for de deriverte til

våre grunnleggende funksjoner baklengs, får vi en liste over ubestemte integraler:

$$\int a \, dx = ax + C \quad (a \text{ er en konstant})$$

$$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \text{ er en konstant, } a \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C.$$

Disse integralene er så vanlige at man bør huske dem – og det gjør man jo automatisk hvis man husker de deriverte til funksjonene på høyresiden. Har du lest seksjon *7.7, kjenner du også integralene

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arcosh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

Vi har også noen generelle regneregler som er nyttige når vi skal regne ut mer sammensatte integraler:

8.4.3 Setning

Anta at f og g er kontinuerlige funksjoner og at a er en konstant. Da gjelder

$$(i) \int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$(ii) \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(iii) \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$(iv) \text{ Dersom } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ og } a \neq 0, \text{ s\aa er } \int f(ax) dx = \frac{F(ax)}{a} + C.$$

Bevis: Disse regnereglene følger direkte fra regnereglene for derivasjon. Vi viser (ii) som et eksempel: Dersom F og G er antideriverte av henholdsvis f og g , s\aa er

$$D[F(x) + G(x)] = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Dette viser at $F(x) + G(x)$ er en antiderivert til $f(x) + g(x)$, og f\u00f8lgelig er

$$\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + G(x) + C = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

akkurat som vi skulle vise. ■

La oss ta med et eksempel som viser hvordan disse reglene brukes i praksis.

8.4.4 Eksempel

Finn $\int [4e^{3x} - 5 \cos(2x)] dx$.

Ved \aa bruke (iii) og (i) ser vi f\u00f8rst at:

$$\begin{aligned} \int [4e^{3x} - 5 \cos(2x)] dx &= \int 4e^{3x} dx - \int 5 \cos(2x) dx \\ &= 4 \int e^{3x} dx - 5 \int \cos(2x) dx. \end{aligned}$$

Deretter bruker vi (iv):

$$\begin{aligned} \int e^{3x} dx &= \frac{e^{3x}}{3} + C && \text{(her er } f(x) = e^x \text{ og } a = 3) \\ \int \cos(2x) dx &= \frac{\sin(2x)}{2} + C && \text{(her er } f(x) = \cos x \text{ og } a = 2). \end{aligned}$$

Ialt har vi dermed

$$\int [4e^{3x} - 5 \cos(2x)] dx = \frac{4}{3}e^{3x} - \frac{5}{2} \sin(2x) + C.$$

(Vi kan slå sammen de to C 'ene til én siden summen av to konstanter er en ny konstant.) ■

Fra den videregående skolen kjenner du også noen mer avanserte teknikker for å løse integraler – *substitusjon* (skifte av variabel), *delvis integrasjon* og *delbrøkoppdeling*. Vi skal komme tilbake til disse teknikkene i neste kapittel, men la oss allikevel nevne en spesielt enkel versjon av substitusjon som vi skal få bruk for i eksemplene senere i dette kapitlet:

8.4.5 Setning

Dersom g er deriverbar, f er kontinuerlig og F er en antiderivert av f , så er

$$\int f[g(x)]g'(x) dx = F[g(x)] + C.$$

Bevis: Deriverer vi $F[g(x)]$, får vi ved kjerneregelen

$$D\{F[g(x)]\} = F'[g(x)]g'(x) = f[g(x)]g'(x).$$

Altså er $F[g(x)]$ en antiderivert av $f[g(x)]g'(x)$, og setningen følger. ■

Kommentar: Du husker sikkert hvordan vi bruker denne setningen i praksis. Vi setter $u = g(x)$ og beregner $du = g'(x) dx$. Dermed har vi

$$\int f[g(x)]g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F[g(x)] + C.$$

8.4.6 Eksempel

Beregn $\int \sin^4 x \cos x dx$.

Vi setter $u = \sin x$ og får $du = \cos x dx$. Innsatt i integralet gir dette

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

(kontroller svaret ved å derivere høyresiden). ■

Oppgaver i seksjon 8.4

1. Løs de ubestemte integralene:

a) $\int \frac{dx}{x+3}$

b) $\int (7x + 3x^{1/2} - \cos x) dx$

c) $\int \frac{dx}{1+2x^2}$

d) $\int \left(8e^{7x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

e) $\int \frac{4}{\sqrt{7-x^2}} dx$

2. Løs de ubestemte integralene:

a) $\int \frac{42}{\sin^2(7x)} dx$

b) $\int xe^{-x^2} dx$

c) $\int e^x \cos(e^x) dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x})}$

e) $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$

3. Løs de ubestemte integralene:

a) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$

b) $\int \sin 2x \frac{e^{\cos^2 x}}{e^{\sin^2 x}} dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

d) $\int \frac{7x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

4. Løs de ubestemte integralene (denne oppgaven forutsetter at du kjenner de hyperbolske og omvendt hyperbolske funksjonene i seksjon *7.7):

a) $\int \cosh(2x) dx$

b) $\int \frac{16}{\sqrt{4+x^2}} dx$

c) $\int \frac{1-3x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

5. (UiO) Alt vi vet om funksjonen $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ er

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \text{for alle } x, y \in (0, \infty), \quad (*)$$

$$f \text{ er deriverbar i } x = 1 \text{ med } f'(1) = k \quad (**)$$

Vår oppgave er å finne ut mer om f .

- a) Vis at $f(1) = 0$.
- b) Vis at $f(x+h) = f(x) + f\left(1 + \frac{h}{x}\right)$. Bruk dette til å vise at $f'(x) = \frac{k}{x}$.
- c) Vis at $f(x) = k \ln x$.

6. (UO) I denne oppgaven er $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ en funksjon slik at

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Vis at $f(0) = 1$.
- b) I resten av oppgaven antar vi at f er deriverbar i 0 med $f'(0) = k$. Vis at f er deriverbar i ethvert punkt $x \in \mathbb{R}$ med $f'(x) = kf(x)$.
- c) Begrunn at

$$kx = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln f(x)$$

og bruk dette til å vise at $f(x) = e^{kx}$

8.5 Riemann-summer

I seksjon 8.2 definerte vi integralet som en felles grense av øvre og nedre trappesummer. Denne måten å definere integralet på går tilbake til den franske matematikeren Gaston Darboux (1842–1917), og integralet vi får på denne måten kalles stundom *Darboux-integralet* for å skille det fra andre varianter. I denne seksjonen skal vi se på et alternativt definisjonsforslag som skyldes den tyske matematikeren Bernhard Riemann (1826–1866). Selv om Darboux' og Riemanns definisjoner ser forskjellige ut, viser det seg at de leder frem til nøyaktig det samme integralbegrepet. Fordelen med å kjenne begge definisjonene er at de egner seg til litt forskjellige formål – Darboux' definisjon har et klart geometrisk innhold og leder til et enkelt bevis for analysens fundamentalteorem, mens Riemanns definisjon er mer fleksibel og lettere å anvende i mange problemer av teoretisk og praktisk art.

For å presentere Riemanns idé trenger vi først noen definisjoner. Gitt en partisjon $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, lar vi $U = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ være en mengde slik at $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ for alle i . Vi kaller U et *utvalg* for partisjonen Π .

8.5.1 Definisjon

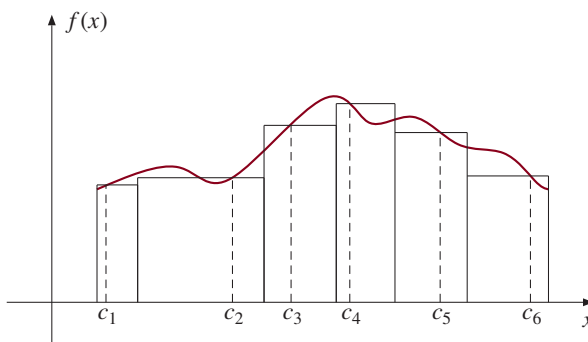
Gitt en begrenset funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, en partisjon $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ av $[a, b]$ og et utvalg $U = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ definerer vi *Riemann-summen*

$$R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

I likhet med øvre og nedre trappesummer kan Riemann-summer tolkes som arealet til en samling rektangler; se figur 8.5.1. Legg merke til at siden $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, så vil Riemann-summen alltid ligge mellom nedre og øvre trappesum:

$$N(\Pi) \leq R(\Pi, U) \leq \emptyset(\Pi).$$

Vi har allerede støtt på eksempler på Riemann-summer i korollar 8.2.4 der vi så på de to valgene $c_i = x_{i-1}$ og $c_i = x_i$.



Figur 8.5.1.

Med *maskevidden* $|\Pi|$ til en partisjon $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ skal vi mene lengden til det lengste av delintervallene $[x_{i-1}, x_i]$; altså

$$|\Pi| = \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Vi har nå nådd frem til Riemanns definisjon. Ideen er at når maskevidden går mot null, må alle Riemann-summer nærme seg en felles grenseverdi, og denne grenseverdien er verdien til integralet:

8.5.2 Definisjon

En begrenset funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er *Riemann-integrerbar* dersom det finnes et tall α slik at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(\Pi_n, U_n) = \alpha$$

for alle følger $\{\Pi_n, U_n\}$ av partisjoner og utvalg slik at $|\Pi_n| \rightarrow 0$. Denne felles grenseverdien α kalles *Riemann-integralet* til f over $[a, b]$.

Vi kan nå formulere teoremet som sier at Darboux' og Riemanns definisjoner bare er to måter å uttrykke det samme på. Beviset er ganske kronglete, men til glede(?) for spesielt interesserte, tar vi det med til slutt i denne seksjonen.

8.5.3 Teorem

Darboux- og Riemann-integralet er det samme; en begrenset funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er Darboux-integrerbar hvis og bare hvis den er Riemann-integrerbar, og verdien av de to integralene er alltid den samme.

Dette resultatet kan se svært teoretisk ut, men det har en konsekvens som er av stor praktisk betydning når vi skal bruke integralregning til å beregne forskjellige størrelser:

8.5.4 Korollar

Anta at $\{\Pi_n, U_n\}$ er en følge av partisjoner og utvalg slik at $|\Pi_n| \rightarrow 0$. Da er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(\Pi_n, U_n) = \int_a^b f(x) dx$$

eller med andre ord

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N_n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) dx$$

(her er N_n antall delintervaller i partisjonen Π_n).

Korollaret forteller oss at dersom vi kan skrive en størrelse som en grense av Riemann-summer, så er denne størrelsen lik integralet. I neste seksjon skal vi se flere eksempler på hvordan dette kan brukes i praktiske beregninger.

En mer teoretisk grunn til at ekvivalensen ovenfor er nyttig, er at Riemanns definisjon ofte er enklere å bruke når man skal bevise generelle egenskaper ved integralet. Her er et enkelt eksempel:

8.5.5 Setning

Anta at $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er to integrerbare funksjoner, og at k er et reelt tall. Da gjelder:

(i) Funksjonen kf er integrerbar, og

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

(ii) Funksjonene $f + g$ og $f - g$ er integrerbare, og

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

og

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Bevis: (i) Anta at $\{\Pi_n, U_n\}$ er en følge av partisjoner og utvalg slik at $|\Pi_n| \rightarrow 0$. Det er nok å vise at Riemann-summene

$$R(\Pi_n, U_n) = \sum_{i=1}^{N_n} kf(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

til funksjonen $kf(x)$ konvergerer mot $k \int_a^b f(x) dx$ når $n \rightarrow \infty$ (hvorfor?). Men det er lett:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} R(\Pi_n, U_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N_n} kf(c_i)(x_i - x_{i-1}) = k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N_n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= k \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

hvor vi har brukt at Riemann-summene $\sum_{i=1}^{N_n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ til funksjonen f konvergerer mot $\int_a^b f(x) dx$.

(ii) Vi nøyer oss med å vise addisjonsdelen siden argumentet for subtraksjonsdelen er helt likt. Det er nok å vise at Riemann-summene

$$R(\Pi_n, U_n) = \sum_{i=1}^{N_n} [f(c_i) + g(c_i)](x_i - x_{i-1})$$

til funksjonen $f+g$ konvergerer mot $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. Siden Riemann-summene $\sum_{i=1}^{N_n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ og $\sum_{i=1}^{N_n} g(c_i)(x_i - x_{i-1})$ til funksjonene f og g konvergerer mot henholdsvis $\int_a^b f(x) dx$ og $\int_a^b g(x) dx$, er dette bare en enkel utregning:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} R(\Pi_n, U_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N_n} (f(c_i) + g(c_i))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N_n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N_n} g(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

■

I neste seksjon skal vi møte eksempler som viser at Riemanns definisjon også kan være nyttig i praktisk bruk av integraler.

*Ekvivalens av Riemanns og Darboux' definisjoner

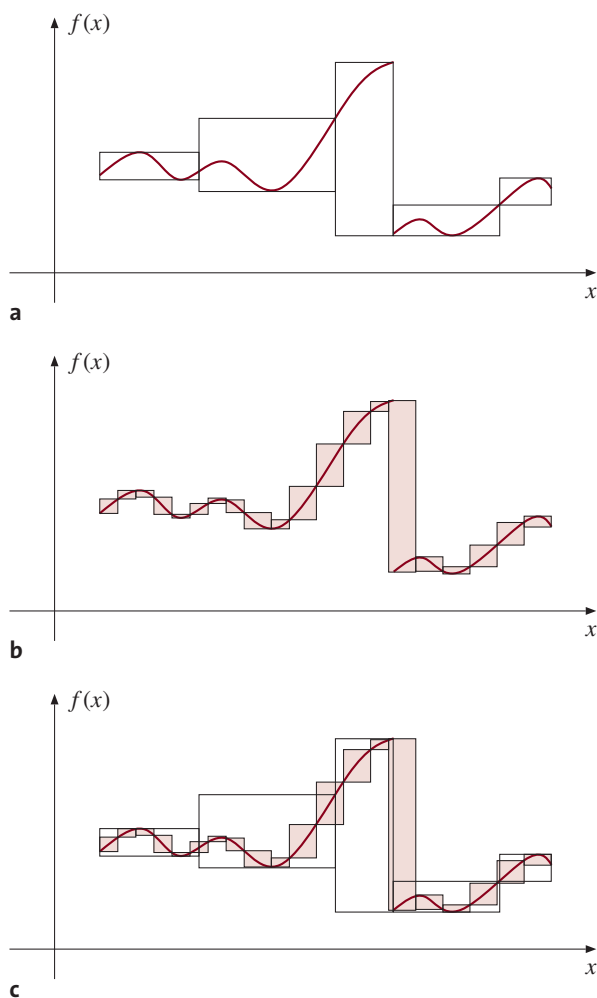
Vi har lovet å bevise at Darboux' og Riemanns definisjoner virkelig er sammenfallende. Beviset er kronglete og gir ikke informasjon som vi vil ha nytte av andre steder i boken. Har du ikke spesiell interesse av å se hvordan tingene henger sammen, kan du hoppe over beviset med god samvittighet. For å unngå eventuelle misforståelser, vil vi i argumentene nedenfor kalle en funksjon *Darboux-integrerbar* dersom den er integrerbar i henhold til definisjon 8.2.1.

Vi begynner med følgende spørsmål: Dersom f er en Darboux-integrerbar funksjon, vet vi at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en partisjon Π slik at $\mathcal{O}(\Pi) - N(\Pi) < \epsilon$. Betyr dette at $\mathcal{O}(\Pi) - N(\Pi) < \epsilon$ for *alle* partisjoner med tilstrekkelig liten maskevidde? Vårt første lemma viser at svaret er ja.

8.5.6 Lemma

Anta at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er en Darboux-integrerbar funksjon. Gitt $\epsilon > 0$, finnes det en $\delta > 0$ slik at $\emptyset(\Pi) - N(\Pi) < \epsilon$ for alle partisjoner Π med $|\Pi| < \delta$.

Bevis: Siden f er Darboux-integrerbar, vet vi at det finnes en partisjon $\Lambda = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_k\}$ slik at $\emptyset(\Lambda) - N(\Lambda) < \epsilon/2$. La $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$, og velg $\delta = \frac{\epsilon}{4Mk}$, der k er antall delintervaller i partisjonen Λ . Vi skal vise at dersom $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ er en partisjon med vidde $|\Pi| < \delta$, så er $\emptyset(\Pi) - N(\Pi) < \epsilon$.



Figur 8.5.2.

Vi har forsøkt å illustrere ideen i beviset i figur 8.5.2. I a) har vi markert arealet som utgjør differansen mellom øvre trappesum $\emptyset(\Lambda)$ og nedre trappesum $N(\Lambda)$ for den opprinnelige partisjonen Λ . I b) har vi gjort det samme for den nye partisjonen Π , og

i c) har vi lagt de to bildene oppå hverandre. Observer at nesten alle boksene fra b) faller innenfor en av boksene fra a) – de eneste unntakene er der hvor en boks fra a) overlapper *to* av boksene i b). Siden det totale arealet i a) er mindre enn $\epsilon/2$, er det klart at arealet i b) ikke kan være så mye større. Vår oppgave er å vise at med vårt valg av δ , må dette arealet faktisk være mindre enn ϵ .

La oss kalle de delintervallene i Π som overlapper med to (eller flere) delintervaller i Λ for *ytre* delintervaller. Av ytre intervaller kan det høyst være k (antall delintervaller i den opprinnelige partisjonen Λ), og for hver av disse er

$$(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 2M\delta = 2M \cdot \frac{\epsilon}{4Mk} = \frac{\epsilon}{2k},$$

der vi har brukt at siden $-M \leq m_i \leq M_i \leq M$, så må $(M_i - m_i) \leq 2M$ (som vanlig er M_i og m_i henholdsvis supremum og infimum av funksjonen over intervallet $[x_{i-1}, x_i]$). Summerer vi opp bidragene fra alle de ytre delintervallene, får vi dermed

$$\sum_{\substack{\text{ytre} \\ \text{intervaller}}} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq k \cdot \left(\frac{\epsilon}{2k}\right) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Fra før av vet vi at om vi summerer opp de indre intervallene, får vi

$$\sum_{\substack{\text{indre} \\ \text{intervaller}}} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \mathcal{O}(\Lambda) - N(\Lambda) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ialt har vi altså

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\Pi) - N(\Pi) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{\substack{\text{ytre} \\ \text{intervaller}}} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{\substack{\text{indre} \\ \text{intervaller}}} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

og beviset er ferdig. ■

Som en umiddelbar følge av lemmaet ovenfor, har vi:

8.5.7 Korollar

Anta at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er Darboux-integrerbar og at $\{\Pi_n\}$ er en følge av partisjoner av $[a, b]$ slik at $|\Pi_n| \rightarrow 0$. Da vil både de øvre og nedre trappesummene konvergere mot Darboux-integralet; altså

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\Pi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} N(\Pi_n) = \int_a^b f(x) dx.$$

Bevis: Fra lemmaet vet vi at $\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathcal{O}(\Pi_n) - N(\Pi_n)] = 0$, og siden

$$N(\Pi_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \mathcal{O}(\Pi_n)$$

følger korollaret. ■

Bevis for teorem 8.5.3: Anta først at f er Darboux-integrerbar. Siden

$$N(\Pi_n) \leq R(\Pi_n, U_n) \leq \mathcal{O}(\Pi_n)$$

og korollaret forteller oss at både høyre- og venstresiden går mot $\int_a^b f(x) dx$, må også $R(\Pi_n, U_n)$ gjøre det. Følgelig er f Riemann-integrerbar med Riemann-integral lik $\int_a^b f(x) dx$.

Anta nå at f er Riemann-integrerbar med Riemann-integral α ; det vil si at $R(\Pi_n, U_n) \rightarrow \alpha$ når $|\Pi_n| \rightarrow 0$. Vi må vise at f er Darboux-integrerbar med $\int_a^b f(x) dx = \alpha$. La Π_n være partisjoner slik at $|\Pi_n| \rightarrow 0$, og velg utvalgene U_n slik at for hver i er $M_i - f(c_i) < 1/n$ (som vanlig er M_i supremum til f over intervallet $[x_{i-1}, x_i]$). Da er

$$\mathcal{O}(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{N_n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{N_n} \left(f(c_i) + \frac{1}{n} \right) (x_i - x_{i-1}) = R(\Pi_n, U_n) + \frac{b-a}{n}.$$

På den annen side er $R(\Pi_n, U_n) \leq \mathcal{O}(\Pi_n)$, så til sammen har vi

$$R(\Pi_n, U_n) \leq \mathcal{O}(\Pi_n) \leq R(\Pi_n, U_n) + \frac{b-a}{n}.$$

Siden $R(\Pi_n, U_n) \rightarrow \alpha$, medfører dette at $\mathcal{O}(\Pi_n) \rightarrow \alpha$. På helt tilsvarende måte kan vi vise at $N(\Pi_n) \rightarrow \alpha$, og dermed får vi at f er Darboux-integrerbar med $\int_a^b f(x) dx = \alpha$. ■

Oppgaver i seksjon 8.5

1. Finn Riemann-summene knyttet til de gitte funksjonene, partisjonene og utvalgene:

a) $f(x) = x^2$, $\Pi = \{1, 3/2, 2, 5/2, 3\}$, $U = \{5/4, 7/4, 9/4, 11/4\}$

b) $f(x) = \sin x$, $\Pi = \{0, \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6, \pi\}$, $U = \{0, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 3\pi/4, \pi\}$

c) $f(x) = \arctan x$, $\Pi = \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$, $U = \{0, \sqrt{3}/3, 1, \sqrt{3}\}$.

2. La $f(x) = x$ og la $\Pi_n = \{0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, der $x_n = a$. Velg utvalget U_n slik at $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Beregn Riemann-summen $R(\Pi_n, U_n)$ og vis at

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

3. La $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuertlig funksjon, og la $\Pi = \{a, x_1, x_2, \dots, b\}$ være en partisjon av $[a, b]$. Vis at det finnes et utvalg U slik at

$$R(\Pi, U) = \int_a^b f(x) dx.$$

(Hint: La $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ og observer at

$$\int_a^b F(x) dx = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Bruk middelverdisetningen.)

4. Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i} \right) = \frac{2}{3}$$

ved å gjenkjenne venstresiden som en Riemann-sum for integralet $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$.

5. Finn grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \right).$$

6. Finn grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right)$$

8.6 Anvendelser av integralet

I denne seksjonen skal vi se på noen av de vanligste anvendelsene av integrasjon. Vi starter med arealberegninger, og siden dette burde være velkjent stoff både fra skolematematikken og fra diskusjonen tidligere i dette kapitlet, nøyer vi oss med å rekapitulere hovedtrekkene.

Arealberegninger

Arealet under en graf Dersom $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er en integrerbar funksjon slik at $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$, så er *arealet* avgrenset av grafen til f , x -aksen og de to lodrette linjene $x = a$ og $x = b$ gitt ved

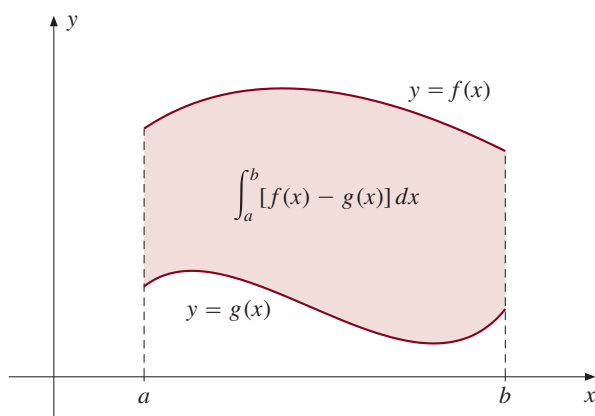
$$A = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Dersom $f(x) \leq 0$ for alle $x \in [a, b]$, så er arealet isteden

$$A = - \int_a^b f(x) \, dx.$$

Arealet avgrenset av grafene til to integrerbare funksjoner $f(x) \geq g(x)$ og de to lodrette linjene $x = a$ og $x = b$ (se figur 8.6.1) er gitt ved:

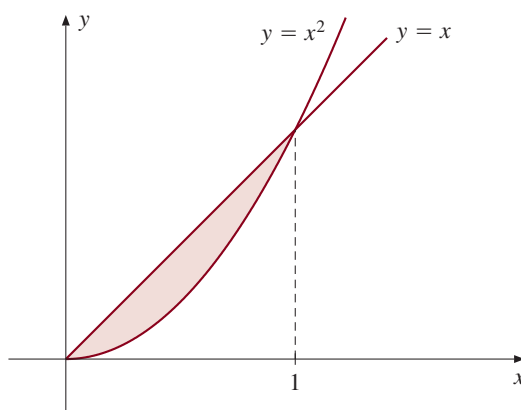
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx.$$



Figur 8.6.1.

8.6.1 Eksempel

Finn arealet til det endelige området som er avgrenset av grafene til $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$.



Figur 8.6.2.

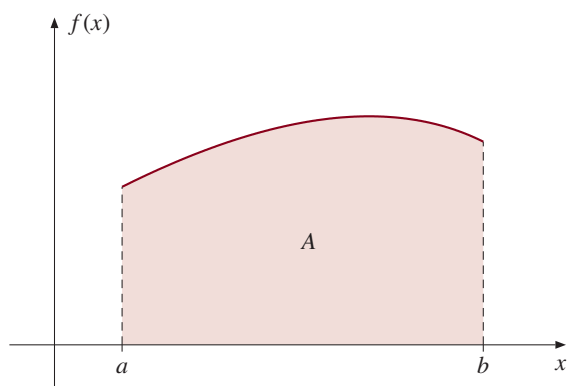
Figur 8.6.2 viser situasjonen. Et enkelt regnestykke forteller oss at kurvene skjærer hverandre når $x = 0$ og $x = 1$. Dermed får vi

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

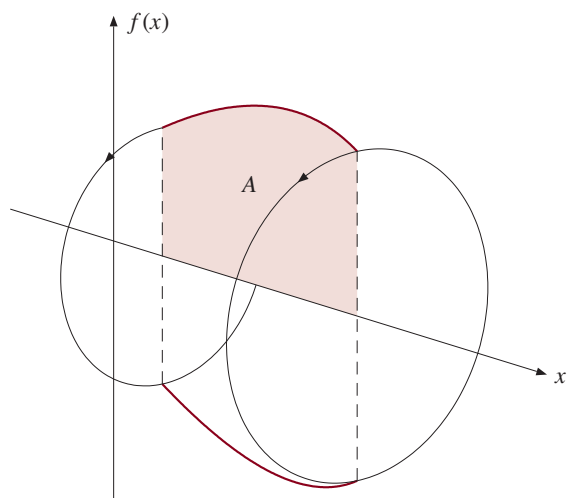
■

Omdreingslegeme om x -aksen

La oss gå over til å se på volumer. Vi starter med en positiv funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ og området A under grafen til f (se figur 8.6.3).



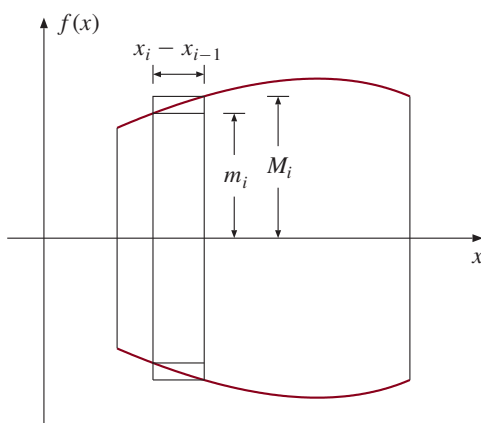
Figur 8.6.3.



Figur 8.6.4.

Vi roterer nå dette området rundt x -aksen (tenk deg at x -aksen er et grillspyd som dreies rundt slik at området A følger med). Det volumet som A gjennomløper (se figur 8.6.4), kalles et *omdreiningslegeme*. For å beregne volumet til dette legemet, kutter vi det opp i tynne skiver ved hjelp av plan normalt på x -aksen (slik vi ville kutte opp en agurk eller saltpølse).

Den i -te skiven ligger mellom x_{i-1} og x_i . Den inneholder en sylinder med radius m_i og er inneholdt i en sylinder med radius M_i (disse sylindrene står på høykant som balanserende kronestykker, se figur 8.6.5). Volumet til skiven ligger derfor mellom volumet $\pi m_i^2(x_i - x_{i-1})$ til den lille sylindren, og volumet $\pi M_i^2(x_i - x_{i-1})$ til den store.



Figur 8.6.5.

Det totale volumet er dermed avgrenset av

$$\sum_{i=1}^n \pi m_i^2 (x_i - x_{i-1}) \leq V \leq \sum_{i=1}^n \pi M_i^2 (x_i - x_{i-1}).$$

Nå ser vi at de to summene er trappesummer til funksjonen $\pi f(x)^2$. Det betyr at vi kan få begge summene så nær $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$ som vi måtte ønske, og følgelig er

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

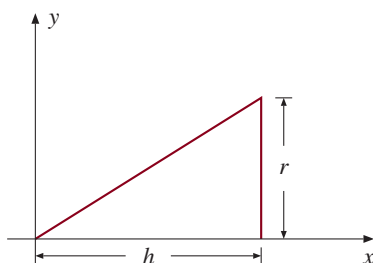
Vi har dermed vist:

Volum til omdreiningslegeme Volumet som fremkommer når grafen til en positiv, kontinuerlig funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dreies om x -aksen, er

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

8.6.2 Eksempel

La oss bruke denne formelen til å beregne volumet til en kjegle med høyde lik h og radius (i grunnflaten) lik r .



Figur 8.6.6.

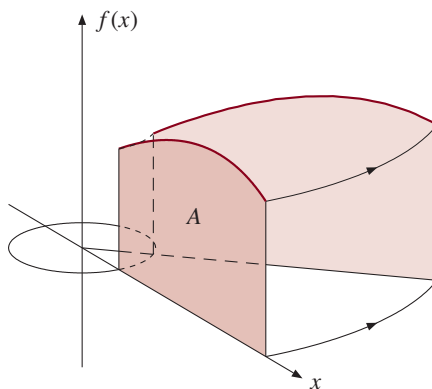
En slik kjegle fremkommer om vi roterer trekanten i figur 8.6.6 om x -aksen. Siden skrålinjen på figuren har ligning $y = \frac{r}{h}x$, får vi

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{rx}{h} \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Dette stemmer med det svaret vi fikk i seksjon 8.1. ■

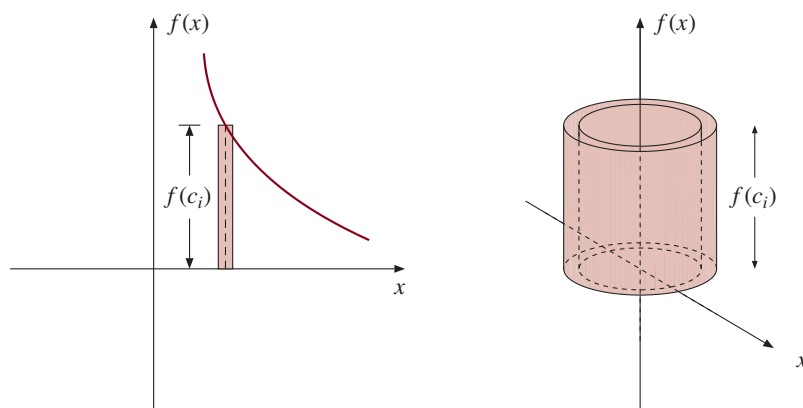
Omdreiningslegeme om y -aksen

Dersom $a > 0$ kan vi også få frem et annet omdreiningslegeme ved å dreie på området under grafen til $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – vi kan nemlig dreie om y -aksen istedenfor om x -aksen (se figur 8.6.7). For å finne volumet til dette omdreiningslegemet deler vi først $[a, b]$ opp i n delintervaller $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, og ser på den delen av omdreiningslegemet som svarer til det i -te intervallet $[x_{i-1}, x_i]$.



Figur 8.6.7.

Lar vi $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ være midtpunktet i $[x_{i-1}, x_i]$, ser vi at denne delen av omdreiningslegemet omtrent faller sammen med det sylinderskallet vi får om vi isteden dreier rektangelet med samme grunnlinje, men høyde $f(c_i)$ om y -aksen (se figur 8.6.8).



Figur 8.6.8.

Hva er så volumet til dette sylinderskallet? Siden det er differansen mellom to sylindre, den ene med høyde $f(c_i)$ og radius x_i , og den andre med høyde $f(c_i)$ og radius x_{i-1} , så er volumet gitt ved

$$V_i = \pi f(c_i)x_i^2 - \pi f(c_i)x_{i-1}^2.$$

(husk at volumet til en sylinder er $\pi r^2 h$.) Faktoriserer vi og bruker at $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, får vi

$$\begin{aligned} V_i &= \pi f(c_i)x_i^2 - \pi f(c_i)x_{i-1}^2 = \pi f(c_i)(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= 2\pi c_i f(c_i)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Vi kan nå gå tilbake til omdreiningslegemet vårt. Det totale volumet må være tilnærmet lik

$$\sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n 2\pi c_i f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

med en tilnærming som blir bedre og bedre dess finere partisjonen blir. Vi ser at $\sum_{i=1}^n 2\pi c_i f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ er en Riemann-sum for integralet $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$, og følgelig konvergerer summen mot integralet når oppdelingen blir finere. Altså må volumet til omdreiningslegemet være lik integralet:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Volum til omdreiningslegeme Anta at $0 \leq a < b$ og at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er en positiv, kontinuerlig funksjon. Volumet som fremkommer når vi dreier området under funksjonsgrafen om y -aksen er gitt ved

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Bemerkning

Legg merke til at uten betingelsen $a \geq 0$, er ikke volumet veldefinert – de to arealene på hver side av y -aksen vil kutte ut ulike og overlappende volumer når de dreies

rundt. Legg også merke til at vi i dette eksemplet har vært litt slappere med utledningen enn tidligere; istedenfor å klemme volumet vårt mellom to følgende av tilnærmende volumer, har vi nøyd oss med én tilnærmende følge. Det hadde ikke vært noe stort kunststykke å omformulere regningene slik at vi også nå fikk en dobbelt tilnærming av den typen som grekerne var så glade i, men det er ikke poenget her – når vi bruker integralregning for praktiske formål, er hovedsaken raskt og effektivt å komme frem til en summeformel som vi ser konvergerer mot et integral. Hva slags forenklinger vi gjør underveis, er ikke så farlig så lenge vi kan overbevise oss om at de får mindre og mindre betydning jo finere partisjonen blir. Til daglig ville nok de fleste matematikere og fysikere ha brukt følgende grovkornede variant av argumentet ovenfor for å utlede formelen i 8.6: Klipper vi opp og retter ut det i -te skallet (se figur 8.6.9), får vi et rektangulært legeme med grunnlinje $2\pi x_i$, høyde $f(x_i)$ og tykkelse $(x_i - x_{i-1})$ når vi ser bort fra ubetydelige avvik i kantene. Volumet til skallet er derfor tilnærmet lik

$$2\pi x_i f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

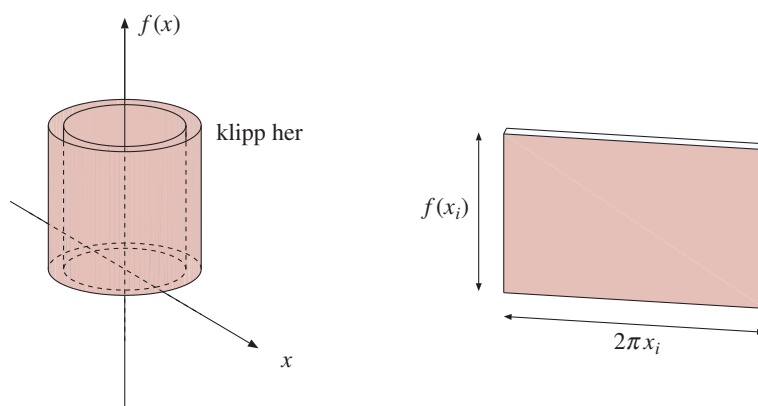
og det totale volumet blir

$$V \approx \sum_{i=1}^n 2\pi x_i f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

med bedre og bedre tilnærmelse dess finere partisjonen er. Siden summen er en Riemann-sum til integralet $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$, følger det at

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Det er argumenter av denne typen du vil finne i de fleste sammenhenger hvor integralbegrepet anvendes, og du må etter hvert skaffe deg en følelse for hvilke størrelser og effekter du trygt kan neglisjere i slike regninger.

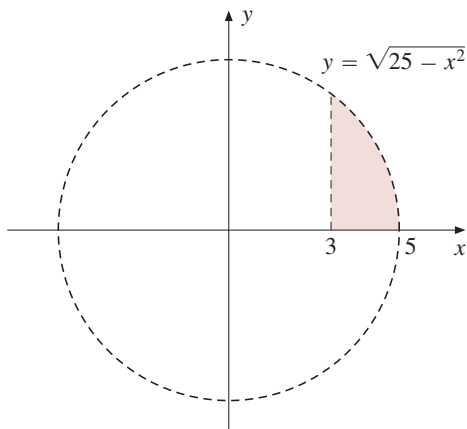


Figur 8.6.9.

La oss se på bruken av formelen i 8.6:

8.6.3 Eksempel

En kule har radius 5 cm. Vi borer et hull gjennom kulen med radius 3 cm slik at hullet går rett gjennom sentrum i kulen. Beregn volumet av det som er igjen av kulen.



Figur 8.6.10.

Figur 8.6.10 er utgangspunktet for løsningen. Dersom vi dreier det skraverte området om y -aksen, får vi nøyaktig halvparten av den utborede kulen vi er på jakt etter. Siden funksjonsgrafen er gitt ved

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

(husk at formelen for en sirkel med sentrum i origo og radius 5 er $x^2 + y^2 = 25$), er volumet til den utborede halvkulen $V = \int_3^5 2\pi x \sqrt{25 - x^2} dx$.

Hvordan skal vi få løst dette integralet? Ser vi at den deriverte til $25 - x^2$ er $-2x$, er det naturlig å innføre den nye variabelen $u = 25 - x^2$ (husk setning 8.4.5). Da er $du = -2x dx$, så

$$\begin{aligned} \int 2\pi x \sqrt{25 - x^2} dx &= \int -\pi \sqrt{u} du = -\pi \int \sqrt{u} du \\ &= -\pi \int u^{1/2} du = -\frac{2\pi}{3} u^{3/2} + C \\ &= -\frac{2\pi}{3} (25 - x^2)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} V &= \int_3^5 2\pi x \sqrt{25 - x^2} dx = \left[-\frac{2\pi}{3} (25 - x^2)^{3/2} \right]_3^5 = 0 + \frac{2\pi}{3} (25 - 3^2)^{3/2} \\ &= \frac{128\pi}{3}. \end{aligned}$$

Volumet til *hele* kulen etter at den er blitt boret ut, er det dobbelte av dette, altså $256\pi/3 \text{ cm}^3$. ■

Bemerkning

Du kan også løse denne oppgaven ved å rotere en passende funksjonsgraf om x -aksen. Det gir helt andre regninger (lengre, men enklere – prøv selv!).

Buelengde

Det neste vi skal forsøke å beregne er lengden til en funksjonsgraf – hvor langt er det fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$ dersom vi bare har lov til å flytte oss langs grafen? Vi begynner med svaret.

8.6.4 Lengden til en graf Anta at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon med kontinuerlig derivert. Da er lengden av grafen til f gitt ved

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

8.6.5 Eksempel

Beregn lengden på grafen til $y = x^{3/2}$ fra $x = 0$ til $x = 1$.

Siden $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, får vi

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx.$$

Setter vi $u = 1 + \frac{9}{4}x$, blir $du = \frac{9}{4} dx$, så

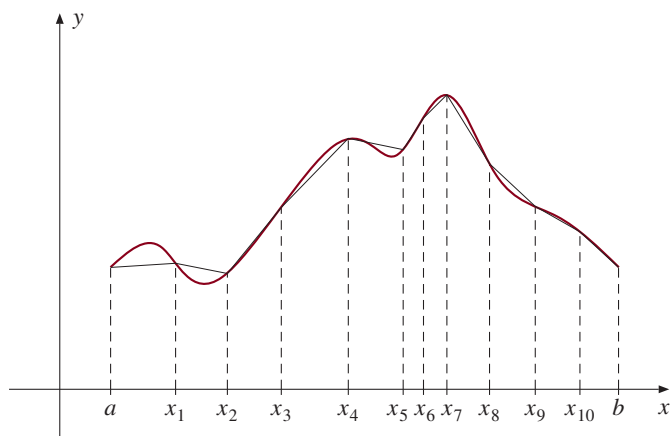
$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx &= \frac{4}{9} \int \sqrt{u} du = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{8}{27} u^{3/2} + C \\ &= \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Setter vi inn grensene, får vi

$$L = \left[\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} (1)^{3/2} = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}.$$



Før vi utleder formelen i 8.6.4, må vi bli enige om hva vi mener med lengden til en graf. Selv om dette er et teoretisk spørsmål, er det lurt å angripe det fra en praktisk synsvinkel. Hvis du bare hadde en linjal til rådighet, hvordan ville du måle deg frem til en tilnærmet verdi for lengden?



Figur 8.6.11.

Figur 8.6.11 viser en måte å gjøre det på; vi deler opp intervallet $[a, b]$ i punkter

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

måler hvert av de rette linjestykkene fra $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ til $(x_i, f(x_i))$, og legger sammen for å få den samlede lengden til den brudne stien. Dess finere vi gjør oppdelingen, dess nærmere burde vi komme lengden til grafen. Legg merke til at siden den rette linjen alltid gir den korteste veien mellom to punkter, så vil alltid tilnærmelsene våre være mindre enn den sanne verdien. Det er derfor naturlig å definere lengden til grafen til å være den minste øvre skranken til alle slike tilnærmelser.

La oss gjøre dette enda litt mer presist. Gitt en partisjon $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ av $[a, b]$, la $\lambda(\Pi)$ være lengden til den brudne stien gitt av Π .

8.6.6 Definisjon

Anta at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon. Da er lengden L av grafen til f definert ved

$$L = \sup\{\lambda(\Pi) : \Pi \text{ er en partisjon av } [a, b]\}.$$

Det kan godt tenkes at $L = \infty$ (det vil si at et supremum ikke finnes) – det vil typisk være tilfelle for de ikke-deriverbare funksjonene vi diskuterte i kapittel 5.

La oss nå anta at f er en deriverbar funksjon med kontinuerlig derivert, og se om vi kan utlede formelen i 8.6.4. Vi observerer først at avstanden fra $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ til $(x_i, f(x_i))$ er

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

Det betyr at

$$\lambda(\Pi) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

Tar vi faktoren $(x_i - x_{i-1})$ utenfor rottegnet, får vi

$$\lambda(\Pi) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^2} (x_i - x_{i-1}).$$

Ifølge middelverdisetningen finnes det et tall $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ slik at

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, ser vi at

$$\lambda(\Pi) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(c_i)^2} (x_i - x_{i-1}).$$

Men denne summen kjenner vi igjen – den er en Riemann-sum for integralet $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$. Det betyr at når maskevidden går mot null, vil $\lambda(\Pi)$ nærme seg dette integralet, og fra dette følger det at

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

akkurat som vi skulle vise (tenk gjennom hva som inngår i den siste overgangen).

Kraft og arbeid

Den siste anvendelsen vi skal se på i denne seksjonen kommer fra fysikk og handler om sammenhengen mellom kraft og arbeid. Dersom vi bruker en konstant kraft K over en avstand s , vet vi at vi utfører et arbeid $A = K \cdot s$ («arbeid er lik kraft ganger vei»). Men hva skjer dersom kraften varierer? Anta at vi skal flytte en gjenstand fra a til b . Vi bryter ned strekningen $[a, b]$ i småintervaller $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ som er så små at kraften er omtrent konstant over hvert delintervall. Det totale arbeidet blir da tilnærmet lik

$$\sum_{i=1}^n K(s_i) \Delta s_i$$

som er en Riemann-sum for integralet $\int_a^b K(s) ds$. Lar vi oppdelingen bli finere og finere, konvergerer dette uttrykket mot integralet

$$\int_a^b K(s) ds.$$

8.6.7 Sammenheng mellom kraft og arbeid Det arbeidet som en kraft $K(s)$ utfører over en strekning $[a, b]$ er gitt ved

$$A = \int_a^b K(s) ds.$$

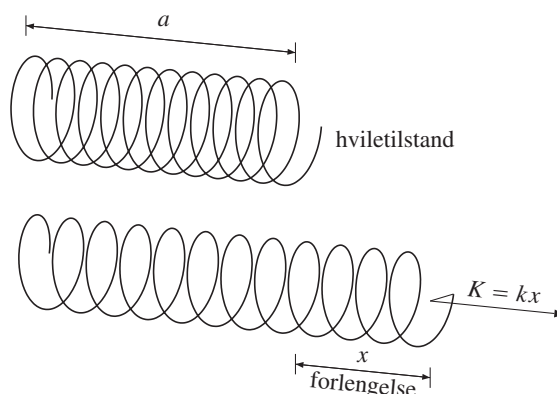
8.6.8 Eksempel

Ifølge Hookes lov er kraften som trengs for å trekke ut en fjær til enhver tid proporsjonal med forlengelsen av fjæren (se figur 8.6.12). Hvor stort arbeid gjør vi når vi trekker ut en fjær fra hviletilstand til en forlengelse b ?

Siden kraften er proporsjonal med forlengelsen, finnes det en konstant k slik at

$$K(x) = kx,$$

der x er forlengelsen til fjæren, og K er kraften vi drar med (konstanten k kalles *fjærkonstanten* og vil variere fra fjær til fjær).



Figur 8.6.12.

Arbeidet blir dermed

$$A = \int_0^b kx \, dx = \left[\frac{k}{2} x^2 \right]_0^b = \frac{k}{2} b^2.$$

■

8.6.9 Eksempel

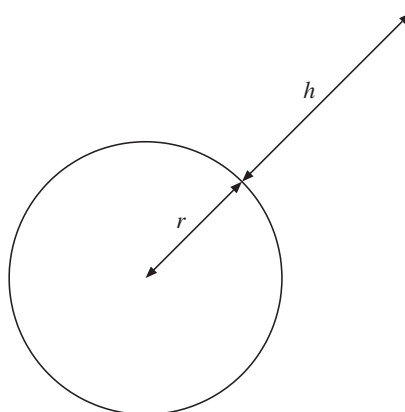
Gravitasjonskraften fra jorden på et legeme som befinner seg i en avstand x fra jordens sentrum, er

$$K = \frac{\gamma Mm}{x^2}$$

der γ er gravitasjonskonstanten, M er jordens masse og m er legemets masse (i tall er $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$, $M = 5.977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). Hvor mye arbeid utfører gravitasjonskraften på et legeme som føres fra jordoverflaten og opp til en høyde h ?

La r være jordradien. Når legemet har høyde h , er avstanden til jordens sentrum $r + h$ (se figur 8.6.13). Arbeidet blir dermed

$$A = \int_r^{r+h} K(x) \, dx = \int_r^{r+h} \frac{\gamma Mm}{x^2} \, dx = \left[-\frac{\gamma Mm}{x} \right]_r^{r+h} = \frac{\gamma Mm}{r} - \frac{\gamma Mm}{r+h}.$$



Figur 8.6.13.

Lar vi h gå mot uendelig, ser vi at $A \rightarrow \gamma Mm/r$. Dette er energien vi må gi en rakett med masse m for at den skal unnslippe jordens gravitasjonsfelt. ■

Oppgaver i seksjon 8.6

1. Finn arealet av området avgrenset av de oppgitte kurvene.

- $y = x^4$, x -aksen og linjen $x = 1$
- $y = \sqrt{x}$, x -aksen og linjene $x = 1$ og $x = 2$
- $y = \sin x$, x -aksen og linjene $x = -\pi/2$, $x = -\pi/4$
- $y = e^x$, $y = ex$ og y -aksen
- $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, x -aksen, y -aksen og $x = \sqrt{3}/2$
- $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = x/2$ og y -aksen
- $y = 2x^2$, $y = x^2$ og $y = \frac{1}{x}$
- $y = xe^{x^2}$, $x = -1$ og x -aksen

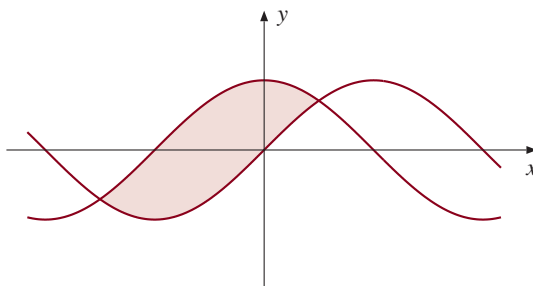
2. Finn arealet av området avgrenset av de oppgitte kurvene.

a) $y = \sinh x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

b) $y = \cosh 4x$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 1$, $y = 0$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$

3. Figuren viser et område avgrenset av kurvene $y = \sin x$ og $y = \cos x$.



Finn arealet.

4. Finn arealet avgrenset av y -aksen og kurvene $y = \cos x$ og $y = \tan x$.

5. Finn volumet til omdreingslegemet som fremkommer når grafen dreies om x -aksen.

a) $y = \sqrt{x}$ mellom $x = 0$ og $x = 2$

b) $y = x^2$ mellom $x = 1$ og $x = 4$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$

d) $y = \frac{1}{\sin x}$ mellom $x = \pi/6$ og $x = \pi/3$

e) $y = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ mellom $x = 0$ og $x = 3$

f) $y = e^x$ mellom $x = -1$ og $x = 1$

g) $y = \tan x$ mellom $x = -\pi/4$ og $x = \pi/4$

h) $y = e^x + e^{-x}$ mellom $x = -2$ og $x = 2$

6. Finn volumet til omdreingslegemet som fremkommer når grafen dreies rundt x -aksen.

a) $y = \sqrt{\sinh x}$ mellom $x = 0$ og $x = 2$

b) $y = \frac{1}{\cosh x}$ mellom $x = -1$ og $x = 1$

c) $y = \coth x$ mellom $x = 2$ og $x = 10$.

7. Finn volumet til omdreiningslegemet som fremkommer når grafen dreies om y -aksen.

a) $y = x^2$ mellom $x = 0$ og $x = 3$

b) $y = \sqrt{x}$ mellom $x = 1$ og $x = 4$

c) $y = \frac{1}{1+x^2}$ mellom $x = 0$ og $x = 2$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ mellom $x = 0$ og $x = 2$

e) $y = \sin(x^2)$ mellom $x = 0$ og $x = \sqrt{\pi}$

f) $y = e^{-x^2}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$

g) $y = \frac{1}{1+x^4}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$

8. Finn volumet til omdreiningslegemet som fremkommer når grafen dreies rundt y -aksen.

a) $y = \cosh(x^2)$ mellom $x = 0$ og $x = \sqrt{2}$

b) $y = x \sinh(x^3)$ mellom $x = 1$ og $x = 3$.

9. a) Området avgrenset av grafene $y = x$ og $y = x^2$ dreies om x -aksen. Hva blir volumet?

b) Hva blir volumet om vi isteden dreier om y -aksen?

10. Finn volumet til en kjegle med radius r og høyde h ved å dreie en passende graf om y -aksen.

11. Finn buelengden til funksjonsgrafen:

a) $y = 3x + 4$ fra $x = 0$ til $x = 3$

b) $y = \cosh x$ fra $x = 1$ til $x = 2$

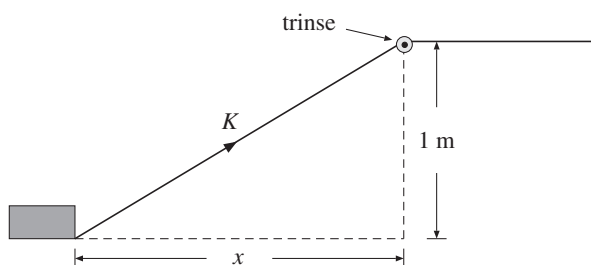
c) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln x$ fra $x = 1$ til $x = e$

d) $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\sqrt{x}}{2}$ fra $x = 1$ til $x = 4$.

12. En fjær med fjærkonstant $k = 10N/m$ trekkes ut 10 cm. Hvor stort er arbeidet?

13. For å strekke en fjær 5 cm må vi utføre et arbeid på $2N$. Hvor stor er fjærkonstanten k ?

14. En kloss dras bortover gulvet ved hjelp av et tau som går gjennom en trinse 1 m over bakken (se figur). Kraften K fra tauet på klossen er konstant lik $10N$, men det er bare den horisontale komponenten av kraften som utfører arbeid.



Forklar hvorfor det arbeidet som må til for å flytte klossen fra punktet $x = 10$ til punktet $x = 2$ er gitt ved

$$A = \int_2^{10} \frac{10x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

og beregn dette integralet.

15. (UiO) Gjennom en kule med radius 1 bores et sylindrisk hull med radius $a < 1$ og med akse gjennom kulens sentrum. Finn volumet av den gjenværende delen av kulen.

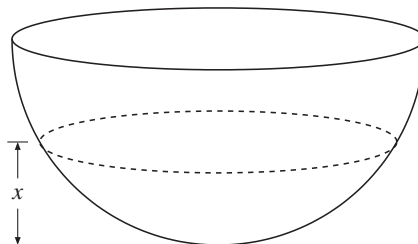
16. (IH) Et kurvestykke er gitt ved $y = x^2\sqrt{1-x^4}$, $0 \leq x \leq 1$. La F være flatestykket avgrenset av kurven, x -aksen og linjen $x = 1$, og beregn volumet til omdreiningslegemet vi får ved å dreie F om y -aksen.

17. (NTNU) La M være mengden som er begrenset av parabelbuen $y = 9 - x^2$ og linjen $y = 5$. Finn volumet av det legemet som fremkommer når M roterer om x -aksen.

18. (UiB) La F være området som begrenses av grafen til $f(x) = x|x - 1|$, den positive x -aksen og linjen $x = 2$.

- Finn arealet til F .
- Finn volumet til det omdreiningslegemet som fremkommer når F roteres om y -aksen.

19. (NTNU) En vanntank har form som en halvkule med radius 5 m.



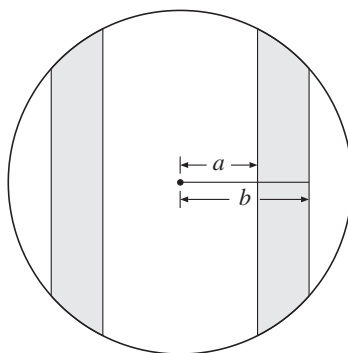
- Finn en formel for volumet av vannet i tanken når vannet står x meter over bunnen.
- Hvor høyt står vannet over bunnen når tanken er halvfull? Bruk Newtons metode, og gi svaret med 2 desimaler.

20. (UiB) La F være flatestykket avgrenset av x -aksen, y -aksen og grafen til funksjonen

$$g(x) = b\sqrt{1 - (x/a)^2}, \quad 0 \leq x \leq a, \text{ der } a \text{ og } b \text{ er positive konstanter.}$$

- Finn volumet V_1 av legemet som fremkommer når F roterer om x -aksen.
- Finn volumet V_2 av legemet som fremkommer når F roterer om y -aksen.
- Hvilke krav må stilles til konstantene a og b for at volumene V_1 og V_2 skal bli like? Hva slags rotasjonslegeme har du da?

21. (UiB) Et legeme er laget av en kule med radius R slik: Først dreier en ut en sylinder med radius b og med akse gjennom kulesenteret. Langs sylinderaksen borer en så et hull med radius a . Dette blir et rørlignende legeme med veggtykkelse $b - a$, der endene på rørstubben er en del av kuleoverflaten (se figuren). Regn ut volumet av legemet uttrykt ved a , b og R .



- (UiB) La f være en funksjon som er to ganger deriverbar på intervallet I . Anta at f'' har nøyaktig ett nullpunkt i I . Vis at da kan f høyst ha tre nullpunkter i I .
 - La nå $a > 0$ og la $f(x) = e^{ax} - x^2$. Finn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Vis at f har et negativt nullpunkt. Hvor mange positive nullpunkter kan f ha? Begrunn svaret.
 - La nå $g(x) = 2^x - x^2$. Begrunn hvorfor $x = 2$ og $x = 4$ er de eneste positive nullpunktene til g .
 - La A være den delen av planet i første kvadrant som begrenses av $y = x^2$ og $y = 2^x$. Beregn arealet av A . Beregn volumet av det rotasjonslegemet som fremkommer ved å dreie A om x -aksen.
- (NTNU) Hva blir volumet av figuren som fremkommer når $y = x^2$, $0 \leq y \leq h$, roteres om y -aksen.
 - Figuren i a) er en tank som fylles med vann med konstant hastighet $2 \text{ m}^3/\text{s}$. Hvor raskt øker vannhøyden når den er 1 m?

24. (NTNU) Et oksehorn kan beskrives ved å trekke kurven $y = x^2/8$ for, $0 \leq x \leq 8$, og så tegne sirkler vinkelrett på x -aksen slik at sentrene er på kurven og radius i sirkelen med sentrum i $(x, x^2/8)$ er $r = 1 - (x^2/64)$. Finn volumet av oksehornet.

25. (NTNU) La f være funksjonen gitt ved

$$y = f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}, \quad x \geq 0.$$

- Bestem eventuelle nullpunkter. Bestem videre de intervaller der $f(x)$ vokser og der $f(x)$ avtar. Finn eventuelle lokale eller globale maksima og minima. Skisser grafen.
- Finn buelengden av grafen mellom $x = 0$ og $x = 1$.

26. (UiO) La a være et tall mellom 0 og 5. Området avgrenset av x -aksen, y -aksen, grafen til funksjonen $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ og linjen $x = a$ dreies om x -aksen.

- Finn volumet til omdreiningslegemet uttrykt ved a .
- En kuleformet tank med radius 5 meter tømmes for vann. Når vanddybden i tanken er 2 meter, tømmes tanken med en fart på 0.5 kubikkmeter i minuttet. Hvor fort avtar vanddybden ved dette tidspunktet?

27. (UiO)

- Regn ut

$$I_p = \int_0^{32} (32 - u)^2 u^p du$$

når p er et positivt tall.

- En forskningsgruppe forsøker å finne frem til en funksjon f som gir en enkel, men realistisk beskrivelse av fødselshyppigheten blant kvinner i ulike aldre. Tolkningen av funksjonen er at

$$\int_a^b f(x) dx$$

er det gjennomsnittlige antall barn en kvinne får fra hun er a år til hun er b år. Etter litt eksperimentering bestemmer forskningsgruppen seg for å forsøke med en funksjon av formen

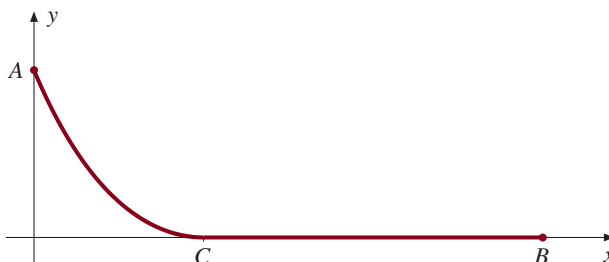
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } x < 16 \\ c(x - 16)^m(48 - x)^n & \text{når } 16 \leq x \leq 48 \\ 0 & \text{når } x > 48 \end{cases}$$

der c, m, n er positive tall, $m, n > 1$. Fødselshyppigheten skal være størst når kvinnene er 28 år. Vis at for å få til dette, må vi velge $m = \frac{3}{5}n$.

- I resten av oppgaven setter vi $m = 2, n = \frac{10}{3}$. Regn ut $\int_{16}^{48} (x - 16)^2(48 - x)^{10/3} dx$. Hvordan må vi velge konstanten c for å fange opp at en kvinne i gjennomsnitt føder 1.86 barn?

d) Hva er gjennomsnittsalderen for en fødende kvinne ifølge modellen?

28. (NTNU) En 350 m lang kabel er festet i toppen av et 100 m høyt tårn (punkt A på figuren) og i et punkt B på bakken, 300 m fra foten av tårnet.



Kabelen henger fritt i luften mellom A og et punkt C på bakken mellom B og foten av tårnet. I et koordinatsystem med origo i foten av tårnet kan den delen av kabelen som henger fritt, beskrives av ligningen

$$y = b \left[\cosh \left(\frac{x}{b} - a \right) - 1 \right], \quad 0 \leq x \leq ab,$$

der a og b er positive konstanter og punktet C har koordinater $(ab, 0)$.

a) Finn lengden av kabelen fra A til C uttrykt ved a og b og vis at

$$\sinh a - a = \frac{1}{2}(\cosh a - 1).$$

b) Finn en tilnærmet verdi for a ved to iterasjoner med Newtons metode. Bruk startverdi 1,6 og angi resultatet av 1. og 2. iterasjon med fire desimaler. Hvor langt fra foten av tårnet er punktet C ?

29. En partikkel beveger seg langs en rett linje med konstant akselerasjon a . Ved tiden $t = 0$ er farten v_0 . Vis at farten ved tid t er $v = v_0 + at$. Vis også at den tilbakelagte strekningen i løpet av tiden t er $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$.

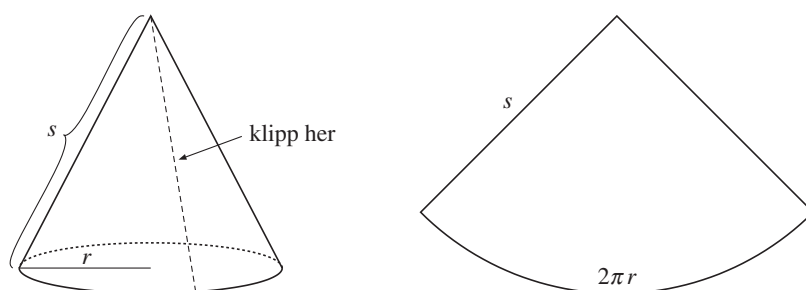
30. En 2 m lang stang er laget av et stoff med varierende tetthet. x meter fra den ene enden av stangen er tettheten $4x^2$ kg/m. Finn stangens masse.

31. En sirkelformet skive med radius 15 cm er laget av et stoff med varierende tetthet. I en avstand av x cm fra sentrum i skiven er tettheten $\frac{225 - x^2}{100}$ g/cm². Finn massen til skiven.

32. En kule med radius 1 meter er laget av et stoff med varierende tetthet. x m fra sentrum er tettheten $10x^2$ kg/m³. Finn kulens masse.

33. I denne oppgaven skal vi finne en formel for arealet til en omdreiningsflate.

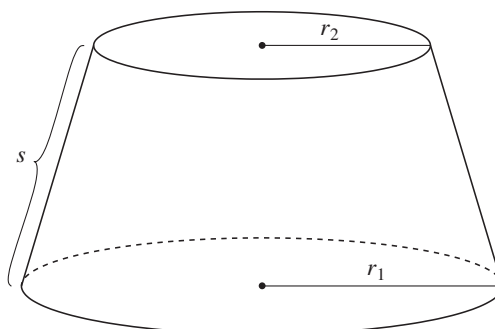
a) Vis at arealet til sideflaten i en kjegle med radius r og sidekant s er $A = \pi r s$. (Hint: Klipp opp kjegleflaten og brett den ut slik at du får en sirkelsektor.)



- b) Vis at arealet av sideflaten til en avkuttet kjegle er

$$A = \pi s(r_1 + r_2)$$

der s er sidekanten og r_1 og r_2 er de to radiene.



- c) La (x_1, y_1) og (x_2, y_2) være to punkter i planet med positive y -koordinater, og la l være linjestykket som forbinder de to punktene. La S være omdreiningsflaten som fremkommer når vi dreier l om x -aksen. Vis at arealet til S er

$$A = 2\pi y^* \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

der $y^* = (y_1 + y_2)/2$, og der $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ er differansene i henholdsvis x - og y -retning.

- d) La $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en positiv funksjon, og la $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ være en partisjon av $[a, b]$. La $y_i = f(x_i)$, og sett $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. La S_f være flaten som fremkommer når vi roterer grafen til f om x -aksen, og forklar hvorfor

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi y_i^* \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \quad (*)$$

der $y_i^* = \frac{y_{i+1} + y_i}{2}$, er en god tilnærming til arealet av S_f .

- e) Forklar hvorfor (*) er nesten en Riemann-sum for integralet

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} dx,$$

og konkluder med at

$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

er en rimelig definisjon av arealet til S_f .

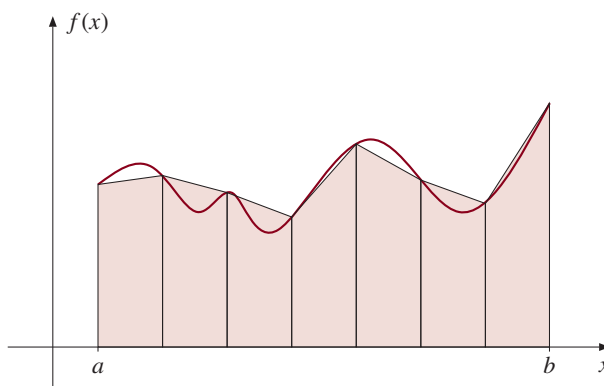
- f) Vis at arealet til en kuleoverflate er $4\pi r^2$. Vis også at dersom du kutter opp en kuleformet appelsin i like tykke skiver, så vil alle skivene ha like mye skall.

*8.7 Numerisk integrasjon

Noen ganger kan vi ikke å løse et bestemt integral på vanlig måte. Kanskje greier vi ikke å finne en antiderivert til det gitte funksjonsuttrykket, eller kanskje er vi ikke gitt noe funksjonsuttrykk i det hele tatt, men kjenner funksjonen bare som en graf eller som en tabell. I slike tilfeller kan vi finne tilnærmede verdier for integralet ved hjelp av numeriske metoder. I denne seksjonen skal vi kort se på de to enkleste og vanligste av disse metodene.

Trapesmetoden

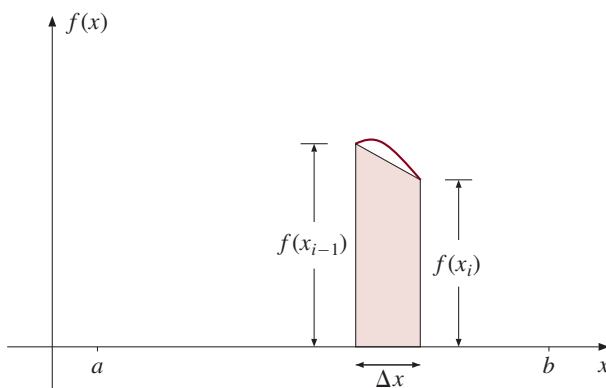
Figur 8.7.1 viser ideen bak *trapesmetoden*. Vi har delt inn integrasjonsintervallet $[a, b]$ i n like store delintervaller. Mellom delepunktene erstatter vi funksjonsgrafen med rette linjestykker, og regner så ut arealet under disse linjestykkene istedenfor arealet under funksjonsgrafen. Er oppdelingen fin nok og funksjonsgrafen rimelig glatt, gir denne metoden en god tilnærming til den riktige integralverdien.



Figur 8.7.1.

La oss se på hvilket regnestykke vi må utføre når vi bruker trapesmetoden. Området over det i -te delintervallet (se figur 8.7.2) er et trapes (på høykant) med areal

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \Delta x$$



Figur 8.7.2.

der $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Summerer vi disse verdiene, får vi

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \Delta x = \frac{\Delta x}{2} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

der vi har benyttet at alle delepunktene x_i unntatt det første x_0 og det siste x_n hører med til to delintervaller. Vi oppsummerer:

8.7.1 Trapesmetoden Den tilnærmede verdien til integralet $\int_a^b f(x) dx$ beregnet etter trapesmetoden, er

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

8.7.2 Eksempel

I et eksperiment har vi forsøkt å bestemme verdiene til en funksjon f . Eksperimentresultatene er gitt i følgende tabell:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
y	5.28	5.43	5.59	5.75	5.93	6.10	6.29	6.50	6.72	6.95	7.10

Vi er nå interessert i å regne ut arealet under grafen til denne funksjonen. Bruker vi trapesformelen, får vi

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &\approx 0.05(5.28 + 7.10 + 2 \cdot 5.43 + 2 \cdot 5.59 + 2 \cdot 5.75 \\ &\quad + 2 \cdot 5.93 + 2 \cdot 6.10 + 2 \cdot 6.29 + 2 \cdot 6.50 + 2 \cdot 6.72 + 2 \cdot 6.95) \\ &= 6.145 \approx 6.15 \end{aligned}$$

som en tilnærmet verdi for dette arealet. ■

Simpsons metode

Når vi bruker trapesregelen, tilnærmer vi funksjonsgrafen over hvert delintervall med en rett linje. Dette betyr at vi ikke tar noe som helst hensyn til hvordan funksjonsgrafen krummer. Vi skal nå se på en litt mer avansert metode som også forsøker å ta hensyn til krumningen.

Denne fremgangsmåten kalles *Simpsons metode* etter den engelske matematikeren Thomas Simpson (1710–1761), og det er ofte den som brukes når lommeregnere eller datamaskiner løser et integral numerisk.

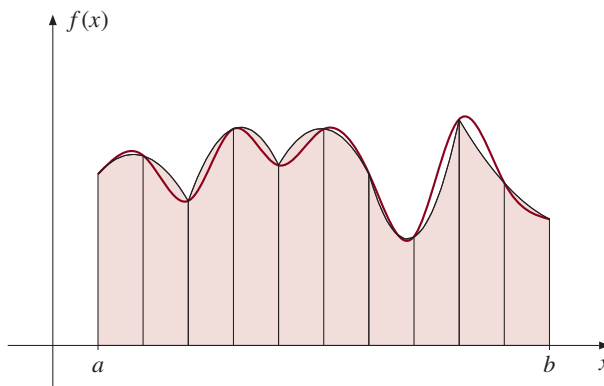
Når vi skal bruke Simpsons metode, deler vi alltid integrasjonsintervallet $[a, b]$ inn i et odde antall delepunkter

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

med samme innbyrdes avstand

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{2n}.$$

Istedenfor å tilnærme funksjonsgrafen med rette linjer som vi gjorde i trapesregelen, bruker vi nå parabelbuer. Vi finner først parabelbuen som går gjennom de tre punktene $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$ (se figur 8.7.3). Deretter finner vi parabelbuen gjennom punktene $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ og $(x_4, f(x_4))$. Fortsetter vi på denne måten, får vi en tilnærming av funksjonsgrafen som består av en sekvens av parabelbuer (figur 8.7.3).



Figur 8.7.3.

Arealet under denne tilnærmede funksjonsgrafen viser seg å være (se nedenfor)

$$A = \frac{\Delta x}{3} \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + \cdots + 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})].$$

Dette er formelen vi bruker når vi beregner integraler ved hjelp av Simpsons metode.

8.7.3 Simpsons metode Den tilnærmede verdien til integralet $\int_a^b f(x) dx$ beregnet etter Simpsons metode, er

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + \cdots + 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})].$$

8.7.4 Eksempel

Bruker vi Simpsons metode på dataene i eksempel 8.7.2, får vi

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &\approx \frac{0.1}{3} \cdot (5.28 + 4 \cdot 5.43 + 2 \cdot 5.59 + 4 \cdot 5.75 + 2 \cdot 5.93 \\ &\quad + 4 \cdot 6.10 + 2 \cdot 6.29 + 4 \cdot 6.50 + 2 \cdot 6.72 + 4 \cdot 6.95 + 7.10) \\ &= 6.145333 \dots \approx 6.15. \end{aligned}$$

I dette tilfellet er altså svaret så godt som identisk med det vi fikk da vi brukte trapesmetoden, men er funksjonen mer uregelmessig, kan forskjellene bli større. Som regel er det Simpsons formel som gir den beste tilnæringsverdien. ■

Utleddningen av Simpsons formel følger de samme hovedtrinnene som utleddningen av trapesformelen. Det første vi må gjøre er å finne et uttrykk for arealet under parabelgrafene som går gjennom tre gitte punkter $(x_i - \Delta x, y_{i-1})$, (x_i, y_i) og $(x_i + \Delta x, y_{i+1})$. En slik parabel er på formen

$$y = a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + c$$

der a , b og c er konstanter (du er sikkert mer vant til å skrive parabler på formen $y = Ax^2 + Bx + C$, men formen vi har valgt er mer hensiktsmessig for vårt problem). Siden parabellen skal passere gjennom punktet (x_i, y_i) , må $c = y_i$. Altså er

$$y = a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + y_i.$$

Setter vi også inn koordinatene til de to andre punktene, får vi

$$\begin{aligned} y_{i-1} &= a(-\Delta x)^2 + b(-\Delta x) + y_i = a(\Delta x)^2 - b\Delta x + y_i \\ y_{i+1} &= a(\Delta x)^2 + b\Delta x + y_i. \end{aligned}$$

Legger vi sammen de to siste ligningene, får vi

$$y_{i-1} + y_{i+1} = 2a(\Delta x)^2 + 2y_i$$

som gir

$$a = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{2(\Delta x)^2}.$$

Ved å trekke de to ligningene fra hverandre isteden, kan vi også finne et uttrykk for b , men som vi nå skal se, trenger vi ikke denne verdien. Det vi er på jakt etter er nemlig

integralet av parabellen fra $x_i - \Delta x$ til $x_i + \Delta x$, det vil si

$$\begin{aligned} \int_{x_i - \Delta x}^{x_i + \Delta x} [a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + y_i] dx \\ = \left[\frac{a(x - x_i)^3}{3} + \frac{b(x - x_i)^2}{2} + y_i x \right]_{x_i - \Delta x}^{x_i + \Delta x} &= \frac{2a(\Delta x)^3}{3} + 0 + 2y_i \Delta x \\ &= \frac{2a(\Delta x)^3}{3} + 2y_i \Delta x. \end{aligned}$$

Konstanten b faller altså ut av dette uttrykket, og setter vi inn verdien vi nettopp fant for a , ser vi at

$$\begin{aligned} \int_{x_i - \Delta x}^{x_i + \Delta x} [a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + y_i] dx &= \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{3(\Delta x)^2} (\Delta x)^3 + 2y_i \Delta x \\ &= \frac{y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}}{3} \Delta x. \end{aligned}$$

Denne formelen er nøkkelen til Simpsons metode. Benytter vi den på hvert av intervallene $[x_0, x_2], [x_2, x_4], [x_4, x_6], \dots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$, ser vi at det totale arealet under den tilnærmede grafen er

$$\begin{aligned} \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3} \Delta x + \frac{y_2 + 4y_3 + y_4}{3} \Delta x + \frac{y_4 + 4y_5 + y_6}{3} \Delta x + \dots \\ + \frac{y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}}{3} \Delta x = \frac{\Delta x}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 \\ + 2y_6 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \end{aligned}$$

som er Simpsons formel (legg merke til at hvert av endepunktene $y_2, y_4, y_6, \dots, y_{2n-2}$ er med i to delintervaller og at disse punktene dermed blir talt opp to ganger hver).

Feilestimater

La oss slutte med et naturlig spørsmål: Hvor stor feil gjør vi når vi beregner et integral numerisk ved hjelp av trapesmetoden eller Simpsons formel istedenfor å regne det ut eksakt? Det viser seg at dersom funksjonen f har en kontinuerlig annenderivert, så er feilen ved trapesmetoden lik

$$\frac{(b - a)^3 \cdot f''(c)}{12n^2}$$

for en eller annen c i intervallet $[a, b]$. For Simpsons formel er feilen lik

$$\frac{(b - a)^5 \cdot f^{(4)}(c)}{2880n^4}$$

for en $c \in [a, b]$, forutsatt at f har en kontinuerlig fjerdederivert. Legg merke til at dette betyr at Simpsons formel (selv for $n = 1$) gir det eksakt riktige svaret ved integrasjon av polynomer av tredje og lavere grad (dette er en smule overraskende siden metoden baserer seg på approksimasjon med annengradspolynomer).

Vi skal ikke bevise de to feilestimatene her (du finner et bevis for feilestimatet for trapesformelen i oppgave 12 i denne seksjonen), men tar med et typisk eksempel på bruken. Flere eksempler finnes i oppgavene.

8.7.5 Eksempel

Vi ønsker å estimere integralet

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

ved hjelp av Simpsons metode, og vi vil gjerne være sikre på at nøyaktigheten er bedre enn 10^{-3} . Hvor fin bør vi gjøre oppdelingen?

Ifølge feilestimatet ovenfor, er feilen vi gjør mindre enn

$$\frac{M}{2880n^4}$$

der M er maksimumsverdien til den fjerdederiverte til $f(x) = e^{-x^2}$ på intervallet $[0, 1]$. Regner vi ut, ser vi at den fjerdederiverte er

$$f^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}.$$

Foretar vi et grovt overslag, ser vi at for $x \in [0, 1]$, så er

$$|f^{(4)}(x)| \leq (16 - 0 + 12) \cdot 1 = 28$$

som betyr at feilen vi gjør når vi bruker Simpsons formel er mindre enn

$$\frac{28}{2880n^4}.$$

Vi ønsker at feilen skal være mindre enn 10^{-3} , så vi må undersøke når

$$\frac{28}{2880n^4} < 10^{-3}$$

det vil si

$$\frac{28\,000}{2880} < n^4.$$

Tar vi fjerderoten, får vi

$$n > 1.76$$

som betyr at vi får god nok nøyaktighet ved å velge $n = 2$. Dette betyr at $\Delta x = \frac{1}{2n} = \frac{1}{4}$, og Simpsons formel gir dermed

$$\frac{(1/4)}{3}(e^{-0} + 4e^{-1/16} + 2e^{-1/4} + 4e^{-9/16} + e^{-1}) \approx 0.7469.$$



Legg merke til at vi underveis i disse regningene har foretatt et grovt overslag; vi kunne sikkert ha funnet en atskillig mindre ekstremalverdi for den fjerdederiverte ved å bruke våre vanlige drøftingsmetoder. Spørsmålet er bare om dette ville ha lønt seg – som oftest er det raskere å bruke Simpsons formel med flere ledd enn nødvendig, enn å foreta de finregningene som skal til for å redusere antall ledd.

Oppgaver i seksjon 8.7

1. Bruk trapesmetoden til å finne en tilnærmet verdi for integralet. Bruk den oppgitte verdien for n , og sammenlign med det eksakte svaret.

a) $\int_0^1 x^2 dx, \quad n = 5$

b) $\int_0^4 \sqrt{x} dx, \quad n = 8$

c) $\int_0^\pi \cos x dx, \quad n = 6$

2. Finn en tilnærmet verdi for integralet ved hjelp av Simpsons metode. Bruk den oppgitte verdien for n , og sammenlign med det eksakte svaret.

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x}, \quad n = 3$

b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x dx, \quad n = 3$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad n = 4$

3. (IH) Beregn tilnærmet integralet $\int_0^\pi \sqrt{\sin x} dx$ ved å bruke Simpsons formel med $n = 2$.

4. (IH) Beregn $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{1+x} dx$ ved hjelp av Simpsons formel med $n = 2$.

5. (IH) Finn en tilnærmet verdi av integralet $\int_1^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ ved hjelp av Simpsons formel. Del integrasjonsområdet i seks delintervaller.

6. (NTNU) Bruk Simpsons metode med $n = 2$ for tilnærmet beregning av

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - x + 1}.$$

7. (NTNU) Bruk Simpsons metode til å beregne $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ med en nøyaktighet bedre enn 10^{-4} . Forklar hvordan du vet at den ønskede nøyaktigheten er oppnådd.

8. Bruk Simpsons metode til å beregne $\int_2^3 \frac{\sin x}{x} dx$ med nøyaktighet bedre enn 10^{-4} . Forklar hvordan du vet at den ønskede nøyaktigheten er oppnådd.

9. a) Forklar hvorfor feilestimatet for Simpsons regel forteller oss at metoden gir eksakt riktig svar når vi bruker den på et polynom av grad 3 eller lavere.

b) Kan du vise dette uten å bruke feilestimatet?

10. Finn ut hvordan du kan bruke lommeregneren din eller et dataprogram du bruker til å løse integraler numerisk.

11. (UiO) Du skal bruke trapesformelen til å beregne en tilnærmet verdi for integralet $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. Hvor mange delintervaller n må du bruke for å være sikker på at feilen er mindre enn 10^{-10} ?

12. I denne oppgaven skal vi vise en versjon av feilestimatet for trapesmetoden. Oppgaven forutsetter at du kjenner metoden for delvis integrasjon (se seksjon 9.1). Gjennom hele oppgaven antar vi at $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er to ganger deriverbar, og at $|f''(x)| \leq M$ for alle $x \in [a, b]$. Målet er å vise at

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{M}{12n^2} (b-a)^3 \quad (*)$$

der T_n er resultatet vi får når vi bruker trapesmetoden med n delintervaller.

a) Anta at $c, d \in [a, b]$, $c < d$. Vis at

$$\frac{1}{2}[f(d) + f(c)](d-c) - \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \phi(x)f''(x) dx$$

der $\phi(x) = -\frac{1}{2}(x-c)(x-d)$. (Hint: Bruk delvis integrasjon på det siste integralet.)

b) Tolk $\frac{1}{2}[f(d) + f(c)](d-c)$ som arealet til et trapes.

c) La $\Pi = \{a, x_1, \dots, x_{n-1}, b\}$ være partisjonen som deler $[a, b]$ inn i n like lange delintervaller. Vis at

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x)f''(x) dx \right|$$

der $\phi_i(x) = -\frac{1}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1})$.

d) Vis at

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x) dx = \frac{1}{12} \left(\frac{b-a}{n} \right)^3.$$

(Hint: Det lønner seg å bruke delvis integrasjon.)

e) Forklar hvorfor

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x)f''(x) dx \right| \leq \frac{M}{12} \left(\frac{b-a}{n} \right)^3$$

og bruk dette til å vise (*).

8.8 Historisk epistel: Fra arealberegning til integrasjon

I don't know what I may seem to the world, but, as to myself, I seem to have been only as a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.

— Isaac Newton (1642–1727)

Alle manglekanter kan deles opp i trekkanter. Kan man beregne arealet til en vilkårlig trekant, kan man derfor i prinsippet beregne arealet til alle manglekanter. På tilsvarende måte kan man beregne volumet til mange romlegemer ved å dele dem opp i enklere deler. I alle de gamle kulturene der matematiske skrifter er bevart, finner vi areal- og volumberegninger av denne typen.

Vanskeligere blir det når områdene er avgrenset av krumme kurver eller flater. I Rhind-papyrusen fra ca. 1650 f. Kr. finner vi en formel for sirkelarealet som tilsvarer en π -verdi på $256/81$ (≈ 3.1609). Lignende formler kjenner vi også fra andre tidlige kulturer, men ser vi bort fra sirkelen, er det ikke mange resultater å finne. Det er hos grekerne vi ser det første systematiske forsøket på å definere og beregne generelle arealer og volumer. Med sin utfyllingsmetode la Eudoxos (ca. 400– ca. 350 f. Kr.) det teoretiske grunnlaget for disse beregningene, men den store mesteren til å bruke metoden i praksis var utvilsomt Arkimedes (287–212 f. Kr.). Han beregnet blant annet arealet til ellipser, parabelsegmenter, spiraler og kuleoverflater, og han fant volumet til ellipsoider og paraboloider (rotasjonslegemene vi får ved å dreie ellipser og parabler om deres akser). Ved å beregne arealet til innskrevne og omskrevne 96-kanter, fant han at $223/71 \leq \pi \leq 22/7$.

Arkimedes er en av alle tiders største matematikere og den fremste vi kjenner fra oldtiden. Noen av hans verker er gått tapt, men nok er bevart til at vi kan danne oss et klart bilde av hans produksjon. Et av hovedverkene, *Metoden*, ble gjenfunnet i Jerusalem i 1899 og gir et enestående bilde av hvordan Arkimedes resonnerer for å komme frem til sine resultater. Arkimedes arbeidet på mange felt, og i tillegg til sine areal- og volumberegninger er han spesielt kjent for Arkimedes' lov som forteller hvor mye et legeme letner når det senkes ned i en væske. I et lengre arbeid (*Sandregneren*) beregner han tilsynelatende hvor mange sandkorn som trengs for å fylle opp universet, men den egentlige hensikten er å konstruere et tallsystem som gjør det mulig å regne med så store tall. Arkimedes' praktiske begavelse var like stor som hans teoretiske; han konstruerte en vannpumpe (Arkimedes' skrue) som har vært i bruk opp til våre dager, intrikate taljesystemer som gjorde at han kunne flytte store skip på egen hånd, og forsvarsvåpen som drev seiersvante romerske soldater til fortvilelse.

Av Arkimedes' liv kjenner vi bare bruddstykker. Han var født i Syrakus på Sicilia og har etter all sannsynlighet studert en tid i Alexandria før han vendte tilbake til hjembyen der kong Hieron ble hans venn og beskytter. Syrakus var grunnlagt som en gresk koloni og førte på Arkimedes' tid en inneklemt tilværelse mellom to stormakter – romerne hadde begynt sine erobringstokter på det italienske fastlandet, og i Nord-Afrika vokste den fönikiske kolonien Karthago til et politisk sentrum for hele det vestlige

Middelhavet. De to stormaktene tørnet sammen i tre blodige kriger (punerkrigene), og den andre av disse krigene skulle bli Arkimedes' skjebne.

Kong Hieron var en trofast alliert av romerne, men da han døde i 216 f. Kr. hadde krigen nådd et kritisk stadium. Karthagos hærfører Hannibal ledet sine tropper over Alpene og ned i Nord-Italia, og i slaget ved Cannae knuste han den romerske hæren. For de nye lederne i Syrakus ble fristelsen for stor, og de gikk med i krigen på Karthagos side. Det viste seg raskt at dette skrittet var overilt – uten forsterkninger hjemmefra hadde ikke Hannibal utstyr og mannskaper til å utnytte seieren, og romerne kom seg så pass på fote at de kunne utruste en ekspedisjon mot Sicilia ledet av konsulen Marcellus. Det er fra den greske historikeren Plutarks (ca. 45– ca. 125 e. Kr.) biografi av Marcellus at vi har mesteparten av våre opplysninger om Arkimedes.

På mange måter ble beleiringen av Syrakus en duell mellom Marcellus' hærfører-kunst og Arkimedes' ingeniørkunst. Her er utdrag av Plutarks beretning.

«Da romerne først angrep til lands og til vanns ble syrakuserne tause av skrekk og trodde at ingen ting kunne motstå angrepet fra så mektige styrker. Men så brakte Arkimedes frem sine maskiner og sendte kraftige salver mot den romerske hæren, store stener som landet på målet med fryktelig bulder og fart. Det var ingen beskyttelse mot dette artilleriet, soldatene ble slått over ende i svermer og det ble uorden i rekkene. Samtidig ble store bjelker firt ut over de romerske skipene, og noen av skipene ble senket av store vekter som ble sluppet ovenfra, mens andre ble grepet i baugen av klør eller nebb av jern og løftet opp av motvekter til de stod loddrett på akterstevnen. . . . Ofte kunne man se det fryktelige synet av et skip som ble heist opp til det var klar av vannet, hvirvlet rundt til alle mann var falt overbord i forskjellige retninger, og til slutt knust mot murene. . . . Til slutt var romerne så oppbrakte at bare de så en tauende eller en bjelkestump på toppen av murene, ropte de : «Pass opp, Arkimedes sikter på oss med en av maskinene sine!», og så snudde de ryggen til og løp.»

Romerne ga opp å ta Syrakus med storm, og bestemte seg isteden for å sulte byen ut gjennom en langvarig beleiring. De erobret de omliggende landområdene og greide omsider å ta seg inn i byen ved hjelp av forrædere. Til tross for at Marcellus hadde gitt streng ordre om at Arkimedes skulle spares, ble han drept av en romersk soldat. Plutark gir tre forskjellige versjoner av det som skjedde. Her er de to første:

«Som skjebnen ville ha det, var filosofen alene, opptatt med å fullføre noen beregninger ved hjelp av en figur, og hans øyne og tanker var så oppslukte av problemet at han var fullstendig uvitende om at romerne hadde brutt gjennom forsvaret og at byen var erobret. Plutselig kom en soldat bort til ham og befalte ham å bli med til Marcellus. Arkimedes nektet å bevege seg før han hadde fullført beviset, og soldaten ble rasende, dro sverdet og drepte ham. En annen beretning sier at romeren kom bort til ham med sverdet trukket og truet med å drepe ham der og da, og at da Arkimedes så ham, ba han ham vente et øyeblikk så han ikke måtte forlate teoremet ufullstendig og uten bevis, men soldaten hørte ikke på ham og drepte ham med det samme.»

Arkimedes var en perfektjonist, og hans arbeider har en elegance og logisk presisjon som ingen andre kunne oppvise. I Europa skulle det gå nesten to tusen år før det ble

gjort vesentlige fremskritt i areal- og volumberegninger, men i mellomtiden ble det gjort interessante fremstøt i andre kulturer, spesielt i beregningen av π . I India angir Aryabhata verdien 3.1416 i 499 e. Kr., og i Kina finner Tsu Chung-chih (430–501) den bemerkelsesverdige ulikheten

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

Han oppgir også brøken $355/113$ (≈ 3.1415929) som en god tilnærmede for praktisk bruk. Tsu Chung-chih's rekord skulle bli stående til al-Kashi fant den tilnærmede verdien

$$2\pi \approx 6.2831853071795865$$

på begynnelsen av 1400-tallet. Viktigere bidrag fra arabisk matematikk er likevel Ibn al-Haythams (965–1039) summasjonsformler for $\sum_{i=1}^n i^k$ (disse summene dukker opp når man forsøker å finne arealet under kurven $y = x^k$), og hans beregning av volumet som fremkommer når man roterer en parabel om en linje normalt på aksene.

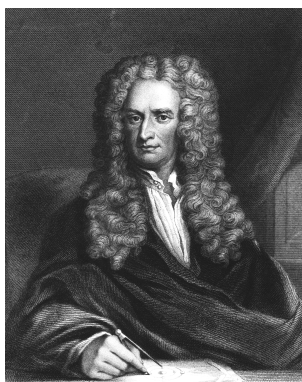
Virkelig vind i seilene fikk areal- og volumberegningene først på 1600-tallet da europeiske matematikere ga opp Arkimedes' strenge metoder og tillot seg å tenke mer intuitivt. Matematikere som Johannes Kepler (1571–1630) og Bonaventura Cavalieri (1598–1647) forstilte seg at arealene og volumene de skulle beregne, var bygget opp av uendelig tynne striper eller flak som de manipulerte på ulike sett. Denne fremgangsmåten ga dem større fleksibilitet i beregningene, men den inneholdt også farer som de ikke alltid var klar over.

Fremveksten av den analytiske geometrien gjorde at man plutselig hadde mange flere kurver og områder å studere enn før, og interessen for arealberegninger grep om seg. Mange av tidens ledende matematikere arbeidet med å finne arealet under kurvene $y = x^k$ – hva svaret skulle være, var det ingen tvil om, men diskusjonen gikk om hvilke metoder som var gyldige. Mange av de matematikerne som arbeidet med arealberegninger, arbeidet også med tangentberegninger innenfor analytisk geometri, og flere av dem begynte å ane at det måtte finnes en sammenheng. Både hos Fermat, engelskmannen Isaac Barrow (1630–1677) og skotten James Gregory (1638–1675) finner vi setninger som godt kan oppfattes som tidlige formuleringer av analysens fundamentalteorem. Men uansett hva de måtte ha oppdaget, var det ingen av disse matematikerne som så hvilke muligheter som lå gjemt i resultatene. Fordi de var de eneste som så disse mulighetene og som utviklet de redskapene som var nødvendige for å utnytte dem, er det rimelig å regne Isaac Newton (1642–1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) som oppdagerne av sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon, og dermed som grunnleggerne av den moderne matematiske analysen. Det var en oppdagelse som på noen tiår fullstendig skulle forvandle både matematikken og naturvitenskapene.

Newton ble født i Woolsthorpe i Lincolnshire. Hans forfedre hadde gjennom generasjoner arbeidet seg opp fra fattige bønder til velstående jordeiere, men lærdommen var det så som så med, og Newtons far kunne neppe skrive sitt eget navn. Litt bedre stod det til på morsiden – broren til Hannah Ayscough hadde studert i Cambridge og senere blitt sogneprest slik lærde folk gjerne ble på den tiden. Faren døde tre måneder før lille Isaac ble født, og selv var han så svakelig at ingen trodde han ville overleve. Da han var tre år, giftet moren seg på nytt, og Isaac ble overlatt til hennes foreldre. Vi får la amatørpsykologene gruble over hva denne atskillelsen kan ha betydd, men Newton viste hele livet en påfallende uvilje mot å knytte seg nært til andre personer.

I 1661 dro Newton til Cambridge for å studere. I hans dager var det lite som minnet om det elite-universitetet Cambridge har vært til andre tider – pensum var noen foreldede tekster fra middelalderen, og både studenter og lærere var mer opptatt av å leve behagelig enn å fremme lærdommens sak. For Newton var ikke dette bare en ulempe – han visste hva han var interessert i, og siden pensum ikke var noe å bry seg om, hadde han tid og anledning til å lese det han ville. Han fikk tak i skriftene til Viète, Descartes og Wallis og satte i gang. I løpet av kort tid hadde han mestret samtidens vitenskap og begynt med sine egne undersøkelser.

Senere skulle Newton se tilbake på denne perioden som sin «prime age for invention». I løpet av noen få år la han grunnlaget ikke bare for sin integral- og differensialregning, men også for sin optikk og sin mekanikk. Det var ensomme og arbeidsomme år – han hadde knapt en omgangsvenn i Cambridge, og han var så opptatt av sine studier at han ofte glemte å spise. I en periode var universitetet stengt på grunn av pest, men Newton dro hjem til Woolsthorpe og fortsatte sine studier der.



Figur 8.8.1. Isaac Newton

Fra 1666 til 1671 skrev Newton tre manuskripter som kom til å sirkulere blant britiske matematikere. I disse manuskriptene beskriver han sine resultater om uendelige rekker og om derivasjon og integrasjon. Manuskriptene ble aldri trykt – dels fordi Newton på denne tiden var mer interessert i å gjøre nye oppdagelser enn å finpusse sine gamle, og dels fordi han var så var for kritikk at han stadig trakk sine manuskripter tilbake.

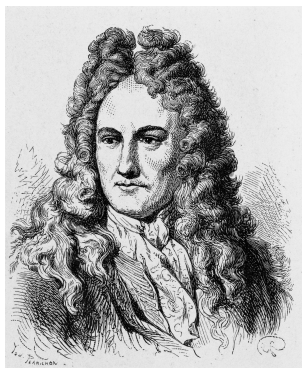
I 1670-årene var Newton mest opptatt av teologi og alkymi, men i begynnelsen av 1680-årene blomstret hans interesse for fysikk opp igjen. Det er i denne perioden han oppdager den universelle gravitasjonsloven og skriver sitt hovedverk *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Arbeidet med denne boken var en voldsom kraftanstrengelse, og i årene som følger vender Newton seg bort fra vitenskapen – han blir innvalgt i parlamentet, og i 1696 sier han opp sitt professorat i Cambridge for å bli leder for Den kongelige mynt i London. I 1703 lar han seg velge til president for Royal Society (vitenskapsakademiet) som han leder med fast hånd til sin død i 1727, men selv om dette vervet førte til at han omsider sammenfattet sine undersøkelser i optikk (*Opticks*, 1704), drev han ikke lenger systematisk forskning.

Ut ifra Cambridge-årene er det lett å tenke seg Newton som en ensom og verdensfjern teoretiker som brukte all sin tid på vitenskapelige sysler. I virkeligheten var han en mann som mestret alt han interesserte seg for – allerede i gutteårene vakte han

opsikt med sine mekaniske konstruksjoner, og som eksperimentalfysiker lagde han sitt utstyr selv. Som leder for Den kongelige mynt viste han ikke bare administrative evner, men også en god nese for å avsløre falskmyntnere. Etter at Newton flyttet til London, kom hans niese, Catherine Barton, for å bo hos ham. Hun var vakker, vis og vittig og det naturlige samlingspunktet i ethvert selskap. Man skulle ikke tro at hun var en naturlig husfelle for en gammel eneboer og nevrotisk kranglefant, men de to ser ut til å ha kommet godt ut av det med hverandre. Kanskje var det under hennes innflytelse at Newton i sine siste år deltok aktivt i selskapslivet og ofte inviterte middagsgjester?

Mer enn noen annen er Newton blitt oppfattet som den moderne vitenskapens far. Han er en overgangsfigur mellom to tidsaldre, og på mange måter tilhører han vel så mye den gamle tiden han vokste opp i, som den nye han var med å skape. Han brukte like mye krefter på å studere alkymiens mystiske skrifter som han brukte på matematikk og fysikk, og han var like brennende opptatt av teologi som av naturvitenskap. Uten at noen visste det, var verdens ledende vitenskapsmann en religiøs kjetter – han forkastet læren om den treenige gud, og mente at Bibelen og kirkefedrene var blitt systematisk forfalsket etter kirkemøtet i Nikaia i 325 (der treenighetsdoktrinen ble vedtatt ved avstemning). I hans fortolkning av Johannes' åpenbaring spiller Augustin og andre kirkefedre uvante og lite flatterende roller. Hadde hemmeligheten om hans kjetterske overbevisning kommet ut, ville Newton blitt avsatt og arrestert. Det må ha vært vanskelig for en mann som hadde brukt livet på å avdekke universets fysiske hemmeligheter, å tie med en oppdagelse han anså som enda mer betydningsfull.

Newton skulle komme til å angre bittert at han aldri publiserte sine tidlige arbeider om integral- og differensialregning. Det førte til at han ble innblandet i en bitter strid med en annen intellektuell gigant.



Figur 8.8.2. Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz ble født i Leipzig der faren var professor i filosofi. Han ble student 15 år gammel, men da han forsøkte å avlegge doktorgraden i 20-årsalderen, ble han avvist av universitetet i hjembyen og måtte ta graden i Nürnberg isteden. Leibniz' første store prosjekt var et symbolspråk som skulle fange opp alle aspekter av logisk og vitenskapelig tankegang. Dette prosjektet kunne naturligvis ikke gjennomføres, men det har vært en inspirasjonskilde for fremveksten av matematisk logikk i vårt århundre. Senere ble Leibniz interessert i konstruksjonen av regnemaskiner, og også

på dette området har hans tanker hatt stor innflytelse selv om de på hans egen tid ikke kunne gjennomføres fullt ut på grunn av tekniske problemer.

Under et studieopphold i Jena i 1663 hadde Leibniz blitt interessert i matematikk og naturvitenskap – to områder der han hadde liten utdannelse. Da han kom til Paris i 1672 som utsending for kurfyrsten av Mainz, oppsøkte han det vitenskapelige miljøet og frem for alt Christiaan Huygens (1629–1695) som var allment anerkjent som tidens ledende vitenskapsmann etter Newton. Huygens ga ham noen problemer å arbeide med, og Leibniz avanserte raskt fra læregutt til en av tidens ledende matematikere. I årene som fulgte arbeidet Leibniz med uendelige rekker og med det som skulle bli hans versjon av differensial- og integralregningen. Han publiserte sine resultater i to artikler i 1682 og 1684, og selv om Newton hadde kjent til lignende resultater i femten år, var dette første gang de ble offentliggjort.

For Leibniz var matematikk bare én av mange interesser, han var også filosof, politiker, diplomat, jurist, historiker og språkforsker. Han fikk aldri tid til å skrive noen av de store, sammenfattende verkene han planla, og det vi vet om hans tanker, er satt sammen fra kortere artikler og over 15 000 brev. De spenner fra det dypsindige til det kuriøse – i et av dem prøver han å overbevise Ludvig XIV om at han absolutt bør starte et felttog mot Egypt. Et livslangt prosjekt var å gjenforene den katolske og den protestantiske kirken. Til tross for at han aldri fikk gitt en samlet fremstilling av sine tanker, må Leibniz regnes som en av de mest innflytelsesrike tenkerne i nyere tid.

Leibniz' og Newtons siste år ble formørket av en meningsløs strid om hvem som egentlig hadde æren for de nye, banebrytende oppdagelsene. Engelske matematikere anklaget Leibniz for plagiat fordi han under et opphold i London i 1676 hadde sett noen av de manuskriptene som Newton sirkulerte, og matematikere på kontinentet anklaget Newton for plagiat siden han aldri publiserte noe om emnet før lenge etter Leibniz' artikler. I ettertid er det klart at både Newton og Leibniz uavhengig av hverandre kom frem til de samme resultatene, men på hver sin måte og fra hver sin angrepsvinkel. Dessverre førte striden til en varig splittelse i det internasjonale matematikkmiljøet, noe som særlig gikk ut over engelske matematikere.

Et av de få minneverdige utslagene av krangelen kom i 1697 da Johann Bernoulli (1667–1748) utfordret matematikkverdenen med følgende problem: En partikkel sklir friksjonsfritt fra et punkt A til et lavere liggende punkt B i et vertikalt plan. Hvilken bane skal den følge mellom disse to punktene for å bruke kortest mulig tid? Bernoulli hadde selv funnet løsningen (som ikke er en rett linje!), men han regnet med at Newton – som i hans øyne hadde stjålet sine metoder fra Leibniz – ikke ville være i stand til å løse problemet. Newton hadde på denne tiden trukket seg tilbake fra vitenskapen, men da han mottok problemet etter en lang arbeidsdag ved Den kongelige mynt, satte han seg ned og løste det i løpet av tolv timer. Han sendte inn løsningen anonymt, men Bernoulli hadde ingen problemer med å kjenne igjen forfatteren av *Principia* – «man kjenner løven på klørne», skal ha vært hans resignerte kommentar.

Men hva var det egentlig Newton og Leibniz oppdaget? Det er upresist å si at de oppdaget analysens fundamentalteorem slik vi har formulert det i seksjon 8.3 – de hadde nemlig ingen definisjon av det bestemte integralet og heller ingen definisjon av integrerbare funksjoner. Det de isteden oppdaget var at dersom de hadde to funksjoner $F(x)$ og $f(x)$, og $f(x)$ var den deriverte til $F(x)$, så var arealet under grafen til $f(x)$ gitt av $F(x)$. Siden den deriverte til $x^{n+1}/(n+1)$ er x^n , måtte altså arealet under grafen til x^n være gitt av $x^{n+1}/(n+1)$. Heller ikke areal hadde de en streng definisjon av, men de tok det som en intuitivt gitt størrelse med intuitivt opplagte egenskaper.

Med et slikt utgangspunkt er det naturlig å tenke på integrasjon først og fremst som antiderivasjon, og det var slik teorien ble fremstilt på 1700-tallet.

En av ulempene med denne fremstillingen er at man strengt tatt ikke kan snakke om integralet til en funksjon før man har funnet en antiderivert. Siden datidens matematikere snart dumpet borti funksjoner som e^{-x^2} og $1/\sqrt{1-x^4}$ som de ikke maktet å antiderivere, hadde de et logisk problem – de visste egentlig ikke om integralene til disse funksjonene eksisterte. De løste problemet dels ved å tenke på disse integralene som arealfunksjoner, og dels ved å løse dem ved hjelp av potensrekker (vi skal se på slike rekker i kapittel 12). Siden de hverken hadde en skikkelig definisjon av areal eller en god forståelse for når en potensrekke fremstiller en funksjon, var det store huller i teorien. Arkimedes ville nok ha frydet seg over regnekraften i den nye integralregningen, men han ville samtidig ha gremmet seg over mangelen på et logisk fundament.

Det er først i Cauchys revolusjonerende forelesninger ved École Polytechnique i 1820-årene at vi finner integralet definert som en grense av trappesummer. Ved hjelp av denne definisjonen er Cauchy istand til å formulere generelle resultater om integraler og integrerbare funksjoner, og han viser blant annet at enhver kontinuerlig funksjon er integrerbar (det er riktignok et hull i beviset hans). På samme tid gjorde fremveksten av Fourier-analysen det naturlig å studere mer uregelmessige funksjoner enn før, og det viste seg raskt at Cauchys teori ikke var tilstrekkelig fleksibel for denne utviklingen. I 1854 konstruerte imidlertid Bernhard Riemann (1826–1866) en modifikasjon av Cauchys teori som var tilstrekkelig til å løse en del av disse problemene. Det er Riemanns integralbegrep du finner i dette kapitlet, selv om vi har fulgt en litt annen fremstillingsmåte som først ble presentert av Gaston Darboux i 1875.

Riemanns integralbegrep er tilstrekkelig når vi skal integrere de funksjonene vi treffer i denne boken, men det viste seg raskt at det var utilstrekkelig for mer teoretiske formål. Etter en lang og vanskelig prosess der mange av de ledende matematikerne på 1800-tallet deltok, fant franskmannen Henri Lebesgue (1875–1941) i 1902 frem til en generalisering av Riemanns definisjon. Én av fordelene ved Lebesgues definisjon er at flere funksjoner blir integrerbare (for eksempel er den ikke-integrerbare funksjonen i eksempel 8.2.2 integrerbar i Lebesgues forstand og har integral 0), en annen fordel er at grensen til en begrenset følge av integrerbare funksjoner selv er integrerbar. (Prøv å finne en følge av Riemann-integrerbare funksjoner som konvergerer til den ikke-integrerbare funksjonen i 8.2.2.) Lebesgues definisjon er basert på en grundig analyse av hvilke delmengder av planet man kan tilskrive et areal (og hvilke delmengder av tallinjen man kan tilskrive en «lengde»), og på mange måter ligger den nærmere Eudoxos og Arkimedes enn mange av de mellomliggende teoriene.

Det aller største fortrinnet til Lebesgues teori er kanskje at den kan generaliseres til sammenhenger som har svært lite med integrasjon på tallinjen å gjøre. Denne generaliseringen ble blant annet utnyttet av den russiske matematikeren Andrej Nikolajevitsj Kolmogorov (1903–1987) da han i 1933 la det matematiske grunnlaget for den moderne sannsynlighetsteorien. Det er en lang vei fra Eudoxos' utfyllingsmetode til Kolmogorovs abstrakte definisjon av sannsynlighetsrom, men grunnideene er forbausende like.

Ønsker du å lese mer om denne utviklingen, gir bøkene til Edwards [6] og Aaboe [17] interessante innblikk i Arkimedes' tankeverden. Er du interessert i π , finner du en kortfattet historie i Øksendals hefte [16], og en atskillig lengre i Beckmanns bok [2]. Kirfels artikkel [11] beskriver en enkel metode som gir svært gode tilnærmelser til π

med forbausende lite arbeid. Edwards [6] og Boyer [4] gir gode innføringer i den eksplisjonsartede utviklingen som integrasjonsteorien gjennomgikk på 1600- og 1700-tallet, og du vil også finne systematiske fremstillinger i generelle matematikkhistorier som Katz [10] og Boyer og Merzbach [5]. Den beste Newton-biografien er skrevet av Westfall [14] ([15] er en kortere utgave som hopper over en del av matematikken), og det er også bryet verdt å ta en titt på artikkelsamlingen [7]. Aiton [1] har skrevet en beretning om hele Leibniz' karriere, mens [9] konsentrerer seg om hans viktige år i Paris. Hawkins' bok [8] gir en glimrende beskrivelse av utviklingen som ledet til Lebesgues integrasjonsteori, men fremstillingen er avansert og krever atskillige forkunnskaper. Bédos' artikkel [3] gir en morsom innføring i noen av de paradoksale problemene man støter på i denne teorien, og i første kapittel av boken til Reed og Aarnes [13] finner du en skisse av Kolmogorovs formalisme for sannsynlighetsregningen.

Litteratur

- [1] Aiton, Eric: *Leibniz, A Biography*, Adam Hilger, Bristol, 1985.
- [2] Beckmann, Peter: *A History of π* , St. Martin's Press, New York, 1971.
- [3] Bédos, Erik: «Kvadratiske tanker om sirkelen. Om puslespill og arealbegrepet», *NORMAT* 42, 25–36, 1994.
- [4] Boyer, C.B.: *The History of the Calculus*, Dover Books, New York, 1959.
- [5] Boyer, C.B. og U. Merzbach: *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1989.
- [6] Edwards, C.H.: *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [7] Fauvel, John et al.: *Let Newton Be!*, Oxford University Press, Oxford, 1988.
- [8] Hawkins, Thomas: *Lebesgue's Theory of Integration*, Second Edition, Chelsea, New York, 1975.
- [9] Hofmann, Joseph E.: *Leibniz in Paris, 1672–1676*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
- [10] Katz, Victor J.: *A History of Mathematics*, HarperCollins, New York, 1993.
- [11] Kirfel, Christoph: «Geometrisk anskueliggjøring av en AGM-algoritme til å approksimere π », *NORMAT* 43, 1995, 49–54.
- [12] Martens, Henrik H.: «Integrabilitet uten uniform kontinuitet», *NORMAT* 18, 1970, 45–46.
- [13] Reed, Jon og Johan Aarnes: *Matematikk i vår tid*, Universitetsforlaget, Oslo, 1967.
- [14] Westfall, Richard: *Never at Rest*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [15] Westfall, Richard: *The Life of Isaac Newton*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

- [16] Øksendal, Bernt: *Tall og tallsystem*. Temahefte i matematikk 1, Gyldendal, Oslo, 1991.
- [17] Aaboe, Asger: *Episoder fra matematikkens historie*, Munksgaard, København, 1966.

9

Integrasjonsteknikk

Derivasjon er et håndverk,
integrasjon er en kunst!

— Viggo Brun (1885–1978)

Analysens fundamentalteorem forteller oss at vi kan løse integraler ved å antiderivere. Dette er greit nok når vi ønsker å integrere e^x eller $\cos x$, men hvordan finner vi anti-deriverte til mer kompliserte funksjoner som $x \arcsin x$ eller $x^2/(1+x^2)^2$? Her nytter det ikke å stirre på papiret til en antiderivert viser seg – vi må ha metoder som forteller oss hvordan vi kan redusere kompliserte integraler til enklere. Fra videregående skole kjenner du noen slike metoder; delvis integrasjon, substitusjon (skifte av variabel) og delbrøkoppspalting. Det er de samme grunnleggende teknikkene vi skal arbeide med i dette kapitlet, men vi skal lære å bruke dem på atskillig vanskeligere integraler.

Selv om derivasjon og integrasjon er motsatte regningsarter, er det en vesentlig forskjell på dem. Derivasjon er i prinsippet uproblematisk – holder vi bare tungen rett i munnen, kan vi derivere et hvilket som helst funksjonsuttrykk, uansett hvor komplisert, ved å følge derivasjonsreglene slavisk. Annerledes er det med integrasjon – her finnes det ingen regler som automatisk leder til målet; man må ta de reglene man har og kombinere dem med innsikt, fantasi og nysgjerrighet for å nå frem til svaret. Selv ekspertene kan ikke regne med å løse en vanskelig integrasjonsoppgave på første forsøk – de må prøve seg frem, eksperimentere og kombinere litt, før de finner den rette veien. Det er dette Viggo Brun sikter til når han kaller integrasjon en kunst, og derivasjon et håndverk.

Noen studenter føler seg snytt når de oppdager at det ikke finnes et sett med regler de kan bruke til å løse en hvilken som helst integrasjonsoppgave. «Dette er ikke matematikk,» sier de. «I skikkelig matematikk er det alltid regler for hva vi skal gjøre.» Men da har de misforstått – matematikk er problemløsning og ikke en samling løste problemer. Matematiske teknikker er verktøy du kan bruke for å løse matematiske problemer, men du må selv finne ut hvordan du skal bruke verktøyet i hvert enkelt tilfelle. Selvfølgelig finnes det gode råd du kan ta med deg, men de er ofte av typen «I slike situasjoner lønner det seg ofte å . . . » og ikke «Her gjør du først A og så B .» Som i all annen matematikk er *intuisjon* et nøkkelord i integralregning, men intuisjon er ikke noe annet enn et nettverk av teknikker, tommelfingerregler og konkrete erfaringer opparbeidet gjennom iherdig trening. Intuisjon er ikke noe man er født med, men noe man utvikler ved stadig å prøve seg på nye oppgaver og reflektere over hvilke løsningsforsøk som virker og hvilke som ikke gjør det. (At noen opparbeider intuisjon raskere og bedre enn andre, er en annen sak.)

I dette kapitlet skal vi se på noen av de teknikkene og tommelfingerreglene man har mest bruk for når man skal løse integraler.

9.1 Delvis integrasjon

Anta at u og v er kontinuerlige funksjoner med kontinuerlige deriverte u' og v' . Da sier formelen for *delvis integrasjon* at

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx. \quad (1)$$

Denne formelen er lett å utlede. Vi observerer først at $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ ifølge produktregelen for derivasjon. Integrerer vi begge sider av denne ligningen, får vi

$$\int [u(x)v(x)]' dx = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx.$$

Ifølge analysens fundamentalteorem er

$$\int [u(x)v(x)]' dx = u(x)v(x) + C,$$

og setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, ser vi at

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx.$$

(Vi slår integrasjonskonstanten C sammen med integrasjonskonstantene i integralene på høyresiden.) Flytter vi om på leddene, får vi (1).

Første gang man ser den, kan formelen for delvis integrasjon virke temmelig unyttig – hva tjener vi egentlig på å erstatte integralet $\int u(x)v'(x) dx$ med $\int u'(x)v(x) dx$? Ganske mye, viser det seg, for de rette integralene. La oss begynne med et enkelt, men typisk eksempel.

9.1.1 Eksempel

Beregn $\int xe^x dx$.

Vi bruker delvis integrasjon med $u = x$ og $v' = e^x$. Da blir $u' = 1$ og $v = e^x$, og ifølge (1) har vi

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Vi ser poenget; for å komme fra $\int u(x)v'(x) dx$ til $\int u'(x)v(x) dx$, må vi derivere $u(x) = x$ og integrere $v'(x) = e^x$. Derivasjon gjør u enklere, mens integrasjonen ikke kompliserer v' . Den totale effekten er dermed en forenkling av integralet. ■

Vi tar et eksempel til i samme gate.

9.1.2 Eksempel

Beregn $\int x^2 \cos x \, dx$.

Vi setter $u(x) = x^2$ og $v'(x) = \cos x$. Da blir $u'(x) = 2x$ og $v(x) = \sin x$. Altså har vi

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx.$$

Dette løser ikke integralet, men det reduserer i hvert fall eksponenten fra 2 til 1. Vi fortsetter på samme måte ved å delvis integrere $\int 2x \sin x \, dx$. Denne gang setter vi $u = 2x$ og $v' = \sin x$. Dermed er $u' = 2$, $v = -\cos x$, og

$$\begin{aligned} \int 2x \sin x \, dx &= -2x \cos x + \int 2 \cos x \, dx \\ &= -2x \cos x + 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

Kombinerer vi dette med formelen ovenfor, får vi

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

At vi må delvis integrere mer enn én gang for å nå frem til svaret, er svært vanlig. ■

I begge eksemplene ovenfor brukte vi delvis integrasjon til å redusere graden til en potensfunksjon. Andre funksjoner det ofte lønner seg å bruke delvis integrasjon på er \ln og \arctan (og delvis arcsin) fordi de deriverte til disse funksjonene er enklere enn funksjonene selv. La oss se på et par typiske eksempler.

9.1.3 Eksempel

Finn $\int \ln x \, dx$.

Ideen er å bruke delvis integrasjon med $u = \ln x$ for å bli kvitt logaritmen. Men hva skal v' være? Vi bruker et triks som er nyttig fra tid til annen – skriver $\ln x$ som $\ln x \cdot 1$ og lar $v' = 1$. Da blir $u' = 1/x$, $v = x$, og vi får

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - x + C.$$

■

9.1.4 Eksempel

Finn $\int x \arctan x \, dx$.

Vi setter $u = \arctan x$ for å bli kvitt arcustangens. Dermed må $v' = x$, og vi får $u' = \frac{1}{1+x^2}$ og $v = \frac{1}{2}x^2$. Delvis integrasjon gir

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx.$$

Det nye integralet ser avgjort enklere ut enn det opprinnelige, men det er ikke opplagt hvordan vi skal løse det. Vi skal behandle slike integraler systematisk senere i dette

kapitlet, men her bruker vi et knep som ofte er nyttig. Adderer og subtraherer vi 1 i telleren, ser vi at

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C \\ &= \frac{1}{2}(1+x^2) \arctan x - \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

■

Hittil har vi brukt delvis integrasjon på eksempler hvor den ene faktoren har blitt enklere etter derivasjon. Men det hender at metoden fungerer også når begge faktorene beholder sin kompleksitet. Her er et typisk eksempel.

9.1.5 Eksempel

Beregn $\int e^x \sin x dx$.

Vi bruker delvis integrasjon med $u = e^x$ og $v' = \sin x$:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Dette hjelper oss ikke så langt, ser det ut til; det nye integralet er nøyaktig like vanskelig som det opprinnelige. Delvis integrerer vi en gang til med $u = e^x$ og $v' = \cos x$, skjer det imidlertid noe interessant. Vi får

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

som innsatt i formelen ovenfor, gir

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx. \quad (2)$$

Dette er en ligning med $\int e^x \sin x dx$ som ukjent, og løser vi den, får vi

$$\int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x.$$

Dermed er integralet løst. ■

Bemerkning

Vi har mistet en integrasjonskonstant C i regningen ovenfor – det fulle svaret er

$$\int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C.$$

Men hvor er C 'en blitt borte? Jo, den forsvant da vi løste (2) – de to integralene i denne ligningen er nemlig to generelle antideriverte til $e^x \sin x$ og vil derfor normalt skille seg med en konstant. Tar vi denne konstanten med når vi løser ligningen, får vi det fullstendige svaret.

La oss til slutt i dette avsnittet gå tilbake til et integral som ligner det vi startet med i eksempel 9.1.1. Vi ønsker å beregne

$$\int x^6 e^x dx.$$

Ideen burde være klar; vi reduserer graden til første faktor ved delvis integrasjon. Det eneste problemet er praktisk – for å nå frem til det endelige svaret må vi utføre nesten samme delvis integrasjon seks ganger, og det er ingen fornøyelse. Finnes det ikke en mer behagelig metode?

Jo, det gjør det, om vi først er villige til å generalisere problemet en smule. Vi tar for oss integralet

$$I_n = \int x^n e^x dx$$

der n er et naturlig tall. Delvis integrerer vi med $u = x^n$ og $v' = e^x$, får vi

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - \int nx^{n-1} e^x dx.$$

Skrevet på en annen måte

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}. \quad (3)$$

En slik formel kaller vi en *rekursjonsformel*. Den forteller oss hvordan vi kan beregne et integral i følgen vår ved hjelp av et enklere integral fra samme følge.

Vi ser at det integralet vi startet med er I_6 . For å regne oss frem til det, starter vi nedenfra. Ved direkte utregning har vi

$$I_0 = \int x^0 e^x dx = \int e^x dx = e^x + C.$$

Nå overtar (3). Med $n = 1$, får vi

$$I_1 = x^1 e^x - 1I_0 = x e^x - e^x + C.$$

Med $n = 2$, får vi tilsvarende

$$I_2 = x^2 e^x - 2I_1 = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

Vi fortsetter på samme måte og får

$$I_3 = x^3 e^x - 3I_2 = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C$$

$$I_4 = x^4 e^x - 4I_3 = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24e^x + C$$

$$I_5 = x^5 e^x - 5I_4 = x^5 e^x - 5x^4 e^x + 20x^3 e^x - 60x^2 e^x$$

$$+ 120x e^x - 120e^x + C$$

$$I_6 = x^6 e^x - 6I_5 = x^6 e^x - 6x^5 e^x + 30x^4 e^x - 120x^3 e^x$$

$$+ 360x^2 e^x - 720x e^x + 720e^x + C$$

som er svaret. Ikke så veldig festlig kanskje, men atskillig bedre enn å delvis integrere seks ganger!

Ser man nøyere etter, finner man et mønster i formlene ovenfor, nemlig

$$\begin{aligned} I_n &= e^x [x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} \\ &\quad + \cdots + (-1)^k n(n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1} n!x + (-1)^n n!] + C \\ &= e^x \left(x^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k n(n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k} \right) + C. \end{aligned}$$

Kan du bevise denne formelen ved hjelp av (3) og induksjon?

Oppgaver i seksjon 9.1

1. Løs integralene.

- a) $\int x \sin x \, dx$
- b) $\int x \ln x \, dx$
- c) $\int x e^{-x} \, dx$
- d) $\int x^2 e^x \, dx$
- e) $\int \arctan x \, dx$
- f) $\int \arcsin x \, dx$
- g) $\int (x^2 + x) \sin x \, dx$
- h) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

2. Løs integralene.

- a) $\int x \cosh x \, dx$
- b) $\int x^2 \sinh x \, dx$
- c) $\int (x^2 + 2x) \cosh x \, dx$
- d) $\int \operatorname{artanh} x \, dx$

3. Løs integralene. (*Vink til b*): Sett $u = \sin x$, $v' = \sin x$)

a) $\int e^{-x} \cos x \, dx$

b) $\int \sin^2 x \, dx$

c) $\int \cos^2 x \, dx$

4. Løs integralene.

a) $\int e^x \sinh x \, dx$

b) $\int e^{-x} \cosh x \, dx$

c) $\int \cosh^2 x \, dx$

5. (UiO) Finn $\int \frac{\ln(x^2)}{x^2} \, dx$.

6. (UiO) Finn $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$.

7. (UiO) Finn $\int x^5 \ln x \, dx$.

8. (UiO) Finn $\int z^2 e^{-3z} \, dz$.

9. Finn $\int \sin(\ln x) \, dx$.

10. Finn $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx$.

11. (UiO) Finn $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} \, dx$.

12. Finn $\int \sqrt{x} \arctan \sqrt{x} \, dx$.

13. Finn $\int x \tan^2 x \, dx$.

14. (UiO) Finn volumet til det omdreiningslegemet som fremkommer når grafen til $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, dreies om y -aksen.

15. (UiO) Finn volumet til det omdreiningslegemet som fremkommer når grafen til $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 2$, dreies om x -aksen.

16. (UiB) Grafen til $f(x) = x \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, roteres om x -aksen. Finn volumet til omdreiningslegemet.

17. (UiO) Drei kurven $y = \ln(x)/x$, $1 \leq x \leq t$, om x -aksen. Finn volumet V_t til omdreingslegemet. Nærmer V_t seg en grense når $t \rightarrow \infty$?

18. a) (UiO) Vis at

$$\int_0^x e^{at} \cos bt \, dt = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) - \frac{a}{a^2 + b^2}$$

for alle reelle tall $a, b \neq 0$.

b) Bruk formelen i a) til å beregne

$$\int_0^x e^{at} \cos^2 t \, dt.$$

19. La $I_n = \int (\ln x)^n dx$. Vis at

$$I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}.$$

Beregn I_3 .

20. La $I_n = \int x^n \sin x \, dx$ og $J_n = \int x^n \cos x \, dx$.

a) Vis at $I_n = -x^n \cos x + nJ_{n-1}$ og $J_n = x^n \sin x - nI_{n-1}$.

b) Bruk formelene ovenfor til å vise at

$$I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)I_{n-2}$$

$$J_n = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)J_{n-2}.$$

c) Finn $\int x^3 \sin x \, dx$ og $\int x^4 \cos x \, dx$.

21. (UiB) Finn $\int x e^{-x^2} dx$ og bruk delvis integrasjon til å vise at

$$\int x^n e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} + \frac{n-1}{2} \int x^{n-2} e^{-x^2} dx.$$

Bruk formelen til å bestemme integralet

$$\int x^5 e^{-x^2} dx.$$

22. La $I_n = \int \sin^n x \, dx$.

a) Vis at $I_n = I_{n-2} - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$.

b) Vis at $\int \sin^{n-2} x \cos x \, dx = \frac{\sin^{n-1} x}{n-1} + C$.

c) Vis at $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x$.

d) Beregn $\int \sin^6 x \, dx$.

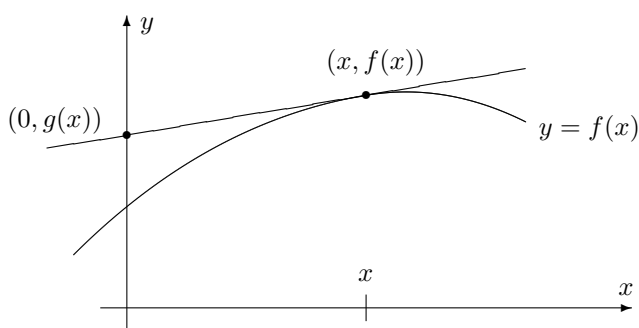
e) Finn en tilsvarende rekursjonsformel for $J_n = \int \cos^n x \, dx$.

23. (UiO) La $I_n = \int_0^1 \arcsin^n x \, dx$.

- Beregn I_0 og I_1 .
- Vis at $I_n = (\pi/2)^n - n(n-1)I_{n-2}$.
- Beregn I_3 .

24. (UiO) Vis at $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$. Finn $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

25. (UiO) I denne oppgaven tenker vi oss at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en funksjon med kontinuerlig annenderivert. På figuren har vi tegnet inn tangenten til f i et punkt $(x, f(x))$. Vi lar $g(x)$ være y -koordinaten til det punktet der tangenten skjærer y -aksen.



- Vis at $g(x) = f(x) - xf'(x)$. Vis også at dersom f er konkav, så er $g(0)$ den minste verdien til g , og at dersom f er konveks, så er $g(0)$ den største verdien til g .
- Vis at

$$\int_0^a g(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx - af(a)$$

for alle $a \in \mathbb{R}$. (Denne formelen ble oppdaget av Leibniz og var en av de tidligste formene for delvis integrasjon. Den kalles gjerne *Leibniz' transmutasjons-teorem*.)

9.2 Substitusjon

Den neste integrasjonsteknikken vi skal se på, er *skifte av variabel*, eller *substitusjon* som den også kalles. Vi har allerede vært borti en enkel versjon av denne teknikken i seksjon 8.4 der vi viste (setning 8.4.5):

9.2.1 Setning

Dersom g er deriverbar, f er kontinuerlig, og F er en antiderivert til f , så er

$$\int f[g(x)]g'(x) \, dx = F[g(x)] + C.$$

Gjenkall også huskeregelen vi hadde for bruk av denne setningen: Vi setter $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$, og får

$$\int f[g(x)]g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F[g(x)] + C.$$

Denne huskeregelen er naturlig siden $du/dx = g'(x)$ (dette er bare to forskjellige navn på den samme størrelsen).

I praksis er det en stor ulempe med setning 9.2.1 – den kan bare brukes når den deriverte $g'(x)$ av den nye variabelen $u = g(x)$ er en faktor i integranden. Ofte har vi lyst til å skifte variabel uten å ha en slik faktor, og da kan setningen tilsynelatende ikke hjelpe oss. La oss se på et eksempel.

9.2.2 Eksempel

Beregn $I = \int \frac{1}{\sqrt{x} + 1} dx$.

Vi har lyst til å sette $u = g(x) = \sqrt{x} + 1$, men mangler faktoren $g'(x)$ som vi trenger for å bruke setning 9.2.1. La oss regne videre allikevel. Løser vi ligningen $u = \sqrt{x} + 1$ for x , får vi

$$x = (u - 1)^2,$$

og deriverer vi med hensyn på u , gir dette

$$\frac{dx}{du} = 2(u - 1).$$

Vi skriver dette som $dx = 2(u - 1) du$, og setter inn i integralet:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x} + 1} dx = \int \frac{1}{u} 2(u - 1) du = \int \left(2 - \frac{2}{u}\right) du.$$

Dette integralet kan vi løse;

$$I = \int \left(2 - \frac{2}{u}\right) du = 2u - 2 \ln |u| + C = 2(\sqrt{x} + 1) - 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C.$$

Deriverer vi, ser vi at vi har funnet en antiderivert til $\frac{1}{\sqrt{x} + 1}$, og oppgaven er altså løst. ■

Dette ser bra ut, men det er et problem – noen av regningene ovenfor er totalt meningsløse! Riktignok er det sant at $dx/du = 2(u - 1)$, men dx/du er ikke en brøk, og vi kan ikke skrive denne formelen som $dx = 2(u - 1) du$. Heller ikke kan vi sette inn for dx i integralet $\int 1/(\sqrt{x} + 1) dx$ – dx er nemlig ikke en faktor i integranden, men bare en merkelapp som forteller oss at x er integrasjonsvariabelen. Vi trenger et resultat som forsikrer oss at regningene ovenfor gir riktig resultat selv om enkeltrinnene er meningsløse.

9.2.3 Setning

Anta at f er kontinuerlig og at g er deriverbar og strengt monoton. La h være den omvendte funksjonen til g , og anta at $h'(x)$ er kontinuerlig. Da er

$$\int f[g(x)] dx = \int f(u)h'(u) du \Big|_{u=g(x)}$$

der $\int f(u)h'(u) du \Big|_{u=g(x)}$ er funksjonen vi får ved først å integrere $f(u)h'(u)$ og så erstatte u med $g(x)$.

Før vi beviser setningen, kan det være greit å sjekke at den virkelig rettferdiggjør prosedyren vi brukte i eksempel 9.2.2. Anta at vi ønsker å integrere $\int f[g(x)] dx$ ved å innføre $u = g(x)$ som ny variabel. Løser vi ligningen $u = g(x)$ med hensyn på x , får vi $x = h(u)$ (husk at h er den omvendte funksjonen til g). Deriverer vi med hensyn på u , får vi

$$\frac{dx}{du} = h'(u).$$

Akkurat som i eksempel 9.2.2, skriver vi dette som $dx = h'(u) du$ og setter inn i integralet:

$$\int f[g(x)] dx = \int f(u)h'(u) du.$$

Løser vi det siste integralet og setter deretter $u = g(x)$, får vi

$$\int f(u)h'(u) du \Big|_{u=g(x)}.$$

Ifølge setning 9.2.3 er dette det riktige svaret.

Dette argumentet viser at regneprosedyren i eksempel 9.2.2 alltid gir riktig svar til slutt, selv om noen av trinnene underveis er meningsløse. Det finnes mange slike regneprosedyrer i matematikken, og matematikerne kaller dem gjerne *formelle regninger* siden de fungerer på formelnivå uten å ha noen dypere mening. Slike formelle regneprosedyrer er nyttige fordi de ofte lar oss organisere regnestykkene på en enklere og mer oversiktlig måte.

Før vi ser på flere eksempler, burde vi kanskje sjekke at setning 9.2.3 virkelig holder:

Bevis for setning 9.2.3 Vi skal bruke et knep som fører oss tilbake til setning 9.2.1. Siden h er den omvendte funksjonen til g , er

$$h'[g(x)] = \frac{1}{g'(x)}$$

ifølge teorem 7.4.6. Dette kan også skrives

$$h'[g(x)]g'(x) = 1,$$

og følgelig er

$$\int f[g(x)] dx = \int f[g(x)]h'[g(x)]g'(x) dx.$$

Nå har vi fått inn den magiske faktoren $g'(x)$, og kan bruke setning 9.2.1 med $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$:

$$\int f[g(x)]h'[g(x)]g'(x) dx = \int f(u)h'(u) du.$$

Løser vi dette integralet og setter $u = g(x)$, får vi $\int f(u)h'(u) du|_{u=g(x)}$. Altså er

$$\int f[g(x)] dx = \int f(u)h'(u) du|_{u=g(x)}$$

og beviset er fullført. ■

La oss se på et eksempel til:

9.2.4 Eksempel

Beregn integralet $I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$.

Vi prøver $u = \sqrt[3]{x}$ og får $x = u^3$ og $dx = 3u^2 du$. Dette gir

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \int \frac{u}{u+1} \cdot 3u^2 du = 3 \int \frac{u^3}{u+1} du.$$

For å komme videre, forenkler vi integranden ved polynomdivisjon: Vi får

$$\begin{array}{r} u^3 : u + 1 = u^2 - u + 1 \\ -(u^3 + u^2) \\ \hline -u^2 \\ -(-u^2 - u) \\ \hline u \\ -(u + 1) \\ \hline -1 \end{array}$$

som viser at

$$\frac{u^3}{u+1} = u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}.$$

Setter vi dette inn i integralet, får vi

$$\begin{aligned} I &= 3 \int \frac{u^3}{u+1} du = 3 \int \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= u^3 - \frac{3}{2}u^2 + 3u - 3 \ln|u+1| + C \\ &= x - \frac{3}{2}x^{2/3} + 3x^{1/3} - 3 \ln|\sqrt[3]{x}+1| + C. \end{aligned}$$

■

Bemerkning

Integralet ovenfor kan også løses ved å sette $u = \sqrt[3]{x} + 1$. Da slipper man polynomdivisjonen, men resten av regningene blir mer omstendelige. Prøv selv!

Ofte må vi kombinere substitusjon med en annen integrasjonsteknikk for å komme frem til svaret.

9.2.5 Eksempel

Finn $I = \int \sin \sqrt{x} dx$.

Vi setter $z = \sqrt{x}$ for å kvitte oss med kvadratroten (grunnen til at vi kaller den nye variabelen z og ikke u vil bli klar etter hvert). Da er $x = z^2$ og $dx = 2z dz$, som gir

$$I = \int \sin \sqrt{x} dx = \int \sin z \cdot 2z dz = 2 \int z \sin z dz.$$

Vi gjenkjenner det siste integralet – det er av den typen vi kan løse ved delvis integrasjon om vi setter $u = z$ og $v' = \sin z$ (nå ser vi hvorfor det er lurt å kalle den nye variabelen noe annet enn u ; vi slipper å bruke samme symbol i to betydninger). Siden $u' = 1$ og $v = -\cos z$, gir dette

$$\int z \sin z dz = -z \cos z + \int 1 \cos z dz = -z \cos z + \sin z + C.$$

Vi samler trådene og får

$$\begin{aligned} I &= \int \sin \sqrt{x} dx = 2 \int z \sin z dz = -2z \cos z + 2 \sin z + C \\ &= -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$



Dette eksemplet viser hvor viktig det er å ha et arsenal av integraler man kan løse ved hjelp av standardmetodene. Vet man at $\int z \sin z dz$ kan løses ved delvis integrasjon, er oppgaven essensielt sett over etter substitusjonen $z = \sqrt{x}$. Vet man det ikke, risikerer man å kaste bort tiden på å lete etter en annen substitusjon. Det neste eksemplet er i samme gate, men inneholder et par ingredienser til.

9.2.6 Eksempel

Beregn $I = \int x \arcsin x dx$.

Vi prøver $z = \arcsin x$ for å bli kvitt arcussinus. Da er $x = \sin z$ og $dx = \cos z dz$, og følgelig er

$$I = \int x \arcsin x dx = \int \sin z \cdot z \cdot \cos z dz = \int z \sin z \cos z dz.$$

Planen er den samme som tidligere; vi delvis integrerer med $u = z$ og $v' = \sin z \cos z$. Regningene blir enklere dersom vi observerer at $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, og at vi derfor

har $v' = \frac{1}{2} \sin 2z$. Vi får $u' = 1$ og $v = -\frac{1}{4} \cos 2z$, og følgelig er

$$\begin{aligned} I &= \int z \cdot \frac{1}{2} \sin 2z \, dz = -\frac{1}{4} z \cos 2z + \frac{1}{4} \int \cos 2z \, dz \\ &= -\frac{1}{4} z \cos 2z + \frac{1}{8} \sin 2z + C. \end{aligned}$$

Det gjenstår å få variabelen x tilbake i svaret. Vi vet at $z = \arcsin x$ og $x = \sin z$, men hva gjør vi med $\cos 2z$ og $\sin 2z$? Bruker vi formlene for cosinus og sinus til den dobbelte vinkel, ser vi at

$$\begin{aligned} \cos 2z &= 1 - 2 \sin^2 z = 1 - 2x^2 \\ \sin 2z &= 2 \sin z \cos z = 2 \sin z \sqrt{1 - \sin^2 z} = 2x \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, får vi det endelige svaret

$$I = \int x \arcsin x \, dx = -\frac{1}{4}(1 - 2x^2) \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2} + C.$$

Dette eksemplet viser noe av styrken i teknikkene våre – det er utenkelig at vi skulle komme frem til svaret ovenfor ved å tippe på en antiderivert til $x \arcsin x$. ■

Hittil har vi bare beregnet ubestemte integraler ved hjelp av variabelskifte, men det er også naturlig å spørre om hva vi kan gjøre med bestemte integraler

$$\int_a^b f[g(x)] \, dx.$$

Det er to måter å gå frem på; enten løser man først det ubestemte integralet $\int f[g(x)] \, dx$ slik vi har vist ovenfor, og setter deretter inn grensene a og b , eller så benytter man følgende resultat.

9.2.7 Setning

Anta at f er kontinuert og at g er deriverbar og strengt monoton på intervallet $[a, b]$. La h være den omvendte funksjonen til g og anta at h' er kontinuert. Da er

$$\int_a^b f[g(x)] \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)h'(u) \, du.$$

Bemerkning

Legg merke til at vi har skiftet grenser på integralet – når $x = a$, er $u = g(a)$, og når $x = b$, er $u = g(b)$.

Bevis for setning 9.2.3. La H være en antiderivert til $f(u)h'(u)$. Fra setning 9.2.3 vet vi at

$$\int f[g(x)] \, dx = \int f(u)h'(u) \, du \Big|_{u=g(x)} = H[g(x)] + C$$

og følgelig er

$$\int_a^b f[g(x)] dx = H[g(b)] - H[g(a)].$$

På den annen side er

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)h'(u) du = H[g(b)] - H[g(a)]$$

siden H er en antiderivert til $f(u)h'(u)$. ■

9.2.8 Eksempel

Beregn $\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Vi setter $u = \sqrt{x}$ og får $x = u^2$ og $dx = 2u du$. De nye grensene blir $\sqrt{\pi^2/4} = \pi/2$ og $\sqrt{\pi^2} = \pi$. Dermed er

$$\begin{aligned} \int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos u}{u} \cdot 2u du = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos u du \\ &= 2 \left[\sin u \right]_{\pi/2}^{\pi} = 2 \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -2. \end{aligned}$$

■

Bemerkning

Både i setning 9.2.3 og 9.2.7 er det en betingelse vi hittil ikke har lagt særlig vekt på – nemlig at kjernefunksjonen $u = g(x)$ skal være strengt monoton. Det hender ikke så sjelden at vi har behov for å substituere ikke-monotone funksjoner som $u = x^2$ og $u = \cos x$. Vi må da innskrenke oss til et intervall I hvor u er strengt monoton. I slike tilfeller kan vi selvfølgelig ikke garantere at svaret er riktig (eller gir mening) utenfor I , men det skjer ofte allikevel. Er du i tvil, kan du alltid derivere svaret for å se om du får integranden tilbake.

Oppgaver i seksjon 9.2

1. Løs de ubestemte integralene.

a) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx$

d) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$

e) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

f) $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$

g) $\int \cos(\ln x) dx$

h) $\int \arcsin \sqrt{x} dx$

2. Løs de ubestemte integralene.

a) $\int \cosh \sqrt{x} dx$

b) $\int x^3 \sinh(x^2) dx$

c) $\int \cosh(\sqrt[3]{x} + 1) dx$

3. Løs de bestemte integralene.

a) $\int_0^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx$

b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

c) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} + 1}{1 - \sqrt{x}} dx$

d) $\int_0^3 \arctan \sqrt{x} dx$

4. Løs integralet $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ ved å substituere $x = 2 \sin u$.

5. Løs integralet $\int \sqrt{9 + x^2} dx$ ved å substituere $x = 3 \sinh u$.

6. Løs integralet $\int \sqrt{x^2 - 3} dx$ ved å substituere $x = \sqrt{3} \cosh u$.

7. (UiO) Løs integralet $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

8. (NTNU) Løs integralet $\int_1^8 x^{-1/3} (x^{2/3} - 1)^{1/2} dx$.

9. (UiO) Finn $\int_0^1 e^{\arcsin x} dx$.
10. (UiB) Finn $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.
11. (UiO) Finn $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$.
12. (UiO) Beregn $\int_0^1 2^{3x} dx$.
13. (UiO) Beregn $\int \frac{x dx}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}$.
14. (UiO) Beregn $\int 2^{\sqrt{x}} dx$.
15. (IH) Beregn $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}} dx$.
16. (NTNU) Beregn $\int \frac{y^3+y}{\sqrt{1+y^2}} dy$.
17. (UiB) Beregn $\int x^3 \sqrt{ax^2+b} dx$ der $a, b > 0$ er to reelle tall.
18. (UiO) Beregn $\int \sin x \cos x \ln(\sin x) dx$.
19. (UiO) Beregn $\int (\arcsin x)^3 dx$.
20. (UiB) Løs integralet $\int_0^{1/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ ved å substituere $u = \tan x$ ($a, b \neq 0$).
21. (UiO) Løs integralet $\int \frac{dx}{a^2 + \cos^2 x}$ ($a \neq 0$) ved hjelp av substitusjonen $u = \tan x$.
22. Grafen til $y = \sin x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$, roteres om y -aksen. Finn volumet til omdreingslegemet.
23. Grafen til $y = \arcsin x$, $0 \leq x \leq 1$, dreies om x -aksen. Finn volumet til omdreingslegemet.
24. A er området i første kvadrant avgrenset av x -aksen, linjen $x = 1$ og grafen til funksjonen $f(x) = \arcsin x$. Finn volumet til det legemet som fremkommer når A dreies om y -aksen.
25. (UiO) I denne oppgaven er $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ for $n = 0, 1, 2, \dots$
- a) Beregn I_0 og I_1 .

b) Vis at $\tan^{n+2} x = \tan^n x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)$ og bruk dette til å vise at

$$I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$$

c) Vis ved induksjon at

$$I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) \right]$$

for $n = 1, 2, \dots$

d) Forklar hvorfor $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx = 0$ og bruk dette til å vise at

$$\ln 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$$

26. a) (UiO) Utfør integrasjonene

$$\int \cot x \, dx \quad \text{og} \quad \int \cot^2 x \, dx.$$

b) For hvert helt tall $n \geq 0$, sett

$$I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^n x \, dx.$$

Vis at for $n \geq 2$ gjelder

$$I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}.$$

Beregn I_4 og I_5 .

c) Vis at følgen $\{I_n\}$ er avtagende. (Vink: Hvis $f(x) \leq g(x)$ for alle x i $[a, b]$, så er $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$). Hvorfor medfører dette at $\{I_n\}$ er konvergent? Finn $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

27. (UiO) Sett $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx$ for $n = 1, 2, 3, \dots$

a) Vis at vi kan skrive

$$a_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} \, dt$$

og at ulikheten $|a_{n+1}| < |a_n|$ holder.

b) Bruk ulikhetene

$$\frac{\sin t}{(n+1)\pi} < \frac{\sin t}{n\pi + t} \leq \frac{1}{n\pi + t} \quad \text{for } 0 < t < \pi$$

til å vise

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{n+1} < |a_n| < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}.$$

c) Forklar hvorfor følgen $\{a_n\}$ konvergerer og finn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

28. a) (UiO) La f være en funksjon som er kontinuerlig og strengt monoton på et intervall $[a, b]$, og la g være den omvendte funksjonen. Anta at f også er deriverbar på (a, b) . Vis at

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(t) dt = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx.$$

Kan du finne en geometrisk tolkning av denne formelen?

b) Bruk formelen i a) til å beregne

$$\int_0^1 \arcsin \sqrt{t} dt.$$

29. I denne oppgaven skal vi se på en måte å innføre logaritme- og eksponentialfunksjonen på. Du har derfor ikke lov til å bruke det du vet om disse funksjonene fra før av.

a) Vi definerer en funksjon $L : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Forklar hvorfor L er en veldefinert, kontinuerlig og strengt voksende funksjon.

b) Vis at $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$ for alle $x, y > 0$. (Vink: Skriv

$$L(x \cdot y) = \int_1^{x \cdot y} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{x \cdot y} \frac{dt}{t}$$

og skift variabel i det siste integralet.)

- c) Vis at $L(x^\alpha) = \alpha L(x)$ for $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$.
- d) Vis at $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = -\infty$.
- e) Vis at L har en omvendt funksjon E . Forklar hvorfor E er kontinuerlig, strengt voksende og definert på hele \mathbb{R} .
- f) Vis at $E'(x) = E(x)$.
- g) Vis at $E(x + y) = E(x) \cdot E(y)$.
- h) La $e = E(1)$. Vis at $E(\alpha) = e^\alpha$ for alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

9.3 Delbrøkoppspalting

Delbrøkoppspalting er en metode for å løse integraler av typen

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

der $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer. I videregående skole har du lært å løse slike integraler når $Q(x)$ er et annengradspolynom som kan skrives som et produkt av to førstegrads-polynomer. I dette kapitlet skal vi se på mer kompliserte tilfeller, men for å få et felles utgangspunkt, begynner vi med et eksempel på det du allerede kjenner.

9.3.1 Eksempel

Vi skal integrere $\int \frac{3x+4}{x^2+x-6} dx$. Det er slett ikke opplagt hvordan dette kan gjøres, men faktorerer vi nevneren $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ og skriver

$$\frac{3x + 4}{x^2 + x - 6} = \frac{3x + 4}{(x - 2)(x + 3)},$$

får vi kanskje en idé: Er det mulig å skrive $\frac{3x+4}{(x-2)(x+3)}$ som en sum av enklere brøker

$$\frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3}$$

der A og B er konstanter? (Hvis du synes dette ser rart ut, så observer at hvis du setter brøkene $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$ på felles brøkstrek, får du et uttrykk av samme type som $\frac{3x+4}{(x-2)(x+3)}$.) Siden brøkene $\frac{A}{x-2}$ og $\frac{B}{x+3}$ er lette å integrere (vi får henholdsvis $A \ln|x-2|$ og $B \ln|x+3|$), vil dette løse problemet vårt. Spørsmålet er altså om det finnes tall A og B slik at

$$\frac{3x + 4}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3}.$$

Hvis vi ganger med fellesnevneren $(x - 2)(x + 3)$ på begge sider av likhetstegnet, får vi

$$3x + 4 = A(x + 3) + B(x - 2) = (A + B)x + 3A - 2B.$$

Sammenligner vi koeffisientene foran hvert ledd på venstre og høyre side (glem uttrykket i midten), ser vi at disse uttrykkene er like for alle x dersom $3 = A + B$ og $4 = 3A - 2B$. Løser vi disse ligningene, får vi $A = 2$ og $B = 1$. Dette betyr at

$$\frac{3x + 4}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x + 3}$$

(du kan kontrollere ved å sette høyresiden på felles brøkstrek.) Dermed har vi

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 4}{x^2 + x - 6} dx &= \int \frac{3x + 4}{(x - 2)(x + 3)} dx \\ &= \int \frac{2}{x - 2} dx + \int \frac{1}{x + 3} dx \\ &= 2 \ln|x - 2| + \ln|x + 3| + C, \end{aligned}$$

og oppgaven er løst. ■

Eksempelet ovenfor viser grunnideen i delbrøkkoppstilling; vi integrerer et komplisert brøkkuttrykk ved å dele det opp i enklere brøker («delbrøker») som kan integreres hver for seg. Det er imidlertid mange ting eksempelet ikke gir svar på, f.eks. hva som skjer dersom annengradspolynomet i nevneren ikke kan faktoriseres i (reelle) førstegradsfaktorer. For å beskrive delbrøkkoppstilling i sin mest generelle form, kan det være greit å ta utgangspunkt i begrepet «rasjonal funksjon».

En *rasjonal funksjon* er en funksjon på formen

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

der P og Q er polynomer. Dersom graden til P er større enn eller lik graden til Q , kan vi dele $P(x)$ på $Q(x)$ (polynomdivisjon), og få R over på formen

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

der P_1 og P_2 er polynomer, og graden til P_2 er mindre enn graden til Q . På grunn av denne reduksjonen skal vi konsentrere oss om rasjonale funksjoner der graden til telleren er mindre enn graden til nevneren.

9.3.2 Eksempel

Gjennomfør prosedyren ovenfor med

$$R(x) = \frac{4x^4 + 8x^3 - 4x + 2}{x^3 + 2x + 1}.$$

Ved polynomdivisjon har vi

$$\begin{array}{r} 4x^4 + 8x^3 - 4x + 2 : x^3 + 2x + 1 = 4x + 8 \\ -(4x^4 + 8x^2 + 4x) \\ \hline 8x^3 - 8x^2 - 8x + 2 \\ -(8x^3 + 16x + 8) \\ \hline -8x^2 - 24x - 6. \end{array}$$

$$\text{Altså er } R(x) = 4x + 8 + \frac{-8x^2 - 24x - 6}{x^3 + 2x + 1}. \quad \blacksquare$$

Vi skal nå se hvordan vi kan spalte rasjonale funksjoner der telleren har lavere grad enn nevneren, i enklere «delbrøker».

La oss begynne med å ta en tur tilbake til seksjon 3.5 der vi viste (setning 3.5.6) at ethvert reelt polynom $Q(x)$ kan skrives som et produkt

$$Q(x) = c_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)(x^2 + a_1x + b_1) \dots (x^2 + a_kx + b_k)$$

av *reelle* første- og annengrads polynomer. Slår vi sammen de faktorene som er like, får vi et uttrykk med *multiplisiteter*

$$Q(x) = c_n(x - r_1)^{n_1} \dots (x - r_p)^{n_p}(x^2 + a_1x + b_1)^{m_1} \dots (x^2 + a_qx + b_q)^{m_q}.$$

Som allerede nevnt, er poenget med delbrøkkoppspalting er at vi kan skrive den kompliserte brøken $P(x)/Q(x)$ som en sum av enklere brøker. Hvordan disse enklere brøkene ser ut, bestemmes av faktorene $(x-r_1)^{n_1}, \dots, (x^2+a_qx+b_q)^{m_q}$ i oppspaltingen av $Q(x)$. Grafisk ser delbrøkkoppspaltingen slik ut:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{\dots + \dots + \dots}_{\text{ledd bestemt av } (x-r_1)^{n_1}} + \underbrace{\dots + \dots + \dots}_{\text{ledd bestemt av } (x-r_2)^{n_2}} + \dots + \underbrace{\dots + \dots + \dots}_{\text{ledd bestemt av } (x-r_p)^{n_p}} \\ + \underbrace{\dots + \dots + \dots}_{\text{ledd bestemt av } (x^2+a_1x+b)^{m_1}} + \dots + \underbrace{\dots + \dots + \dots}_{\text{ledd bestemt av } (x^2+a_qx+b_q)^{m_q}}.$$

Leddene bestemt av en faktor $(x-r_i)^{n_i}$ har formen

$$\frac{C_1}{x-r_i} + \frac{C_2}{(x-r_i)^2} + \dots + \frac{C_{n_i}}{(x-r_i)^{n_i}}$$

der C_1, C_2, \dots, C_{n_i} er konstanter, mens leddene bestemt av en faktor $(x^2+a_jx+b_j)^{m_j}$ har formen

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+a_jx+b_j)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+a_jx+b_j)^2} + \dots + \frac{A_{m_j}x+B_{m_j}}{(x^2+a_jx+b_j)^{m_j}}$$

der $A_1, \dots, A_{m_j}, B_1, \dots, B_{m_j}$ er konstanter. I begge tilfellene er det altså like mange ledd som faktoren har multiplisitet.

Forhåpentligvis blir det enklere om vi ser på et eksempel.

9.3.3 Eksempel

Bestem formen på delbrøkkoppspaltingen til

$$\frac{3x^2 - x + 1}{(x-1)(x+2)^3(x^2+2x+5)^2}.$$

Faktoren $(x-1)$ har multiplisitet én og gir dermed opphav til bare ett ledd $C/(x-1)$. Faktoren $(x+2)$ har derimot multiplisitet 3 og gir dermed opphav til 3 ledd $D_1/(x+2)$, $D_2/(x+2)^2$ og $D_3/(x+2)^3$. Den siste faktoren har multiplisitet 2 og gir dermed opphav til 2 ledd

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+2x+5} \quad \text{og} \quad \frac{A_2x+B_2}{(x^2+2x+5)^2}.$$

I alt har vi derfor

$$\frac{3x^2 - x + 1}{(x-1)(x+2)^3(x^2+2x+5)^2} = \frac{C}{x-1} + \frac{D_1}{x+2} + \frac{D_2}{(x+2)^2} + \frac{D_3}{(x+2)^3} \\ + \frac{A_1x+B_1}{x^2+2x+5} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+2x+5)^2}. \quad (1)$$



Spørsmålet nå er hvordan vi finner de *riktige* konstantene $C, D_1, D_2, D_3, A_1, B_1, A_2$ og B_2 ? Det gjør vi på samme måte som i eksempel 9.3.1; vi ganger med fellesnevner på begge sider, samler ledd av samme grad, og sammenligner koeffisientene på hver side av likhetstegnet. For å slippe altfor mye regning, skal vi illustrere metoden på et litt enklere eksempel.

9.3.4 Eksempel

Finn delbrøkoppspaltingen til

$$\frac{2x^4 - 1}{(x - 1)(x^2 + 1)^2}.$$

Ifølge reglene ovenfor kan dette uttrykket skrives på formen

$$\frac{2x^4 - 1}{(x - 1)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

For å finne koeffisientene A, B, C, D og E , multipliserer vi først på begge sider med fellesnevneren $(x - 1)(x^2 + 1)^2$:

$$2x^4 - 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x - 1)(x^2 + 1) + (Dx + E)(x - 1).$$

Ganger vi sammen parentesene og samler leddene etter potenser av x , får vi

$$2x^4 - 1 = (A + B)x^4 + (-B + C)x^3 + (2A + B - C + D)x^2 + (-B + C - D + E)x + (A - C - E).$$

Vi ønsker å velge A, B, C, D, E slik at denne likheten gjelder for alle x . Da må koeffisientene foran tilsvarende ledd være like på begge sider, det vil si

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ -B + C &= 0 \\ 2A + B - C + D &= 0 \\ -B + C - D + E &= 0 \\ A - C - E &= -1. \end{aligned}$$

(Det at et ledd «mangler», er det samme som at koeffisienten er null.) Dette er et ligningssett med 5 ligninger og 5 ukjente, og det burde derfor være gode muligheter for å finne en entydig løsning. For å løse systemet, observerer vi først at ifølge den andre ligningen er $C = B$. Bruker vi dette uttrykket til å eliminere alle C 'ene, sitter vi igjen med

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ 2A + D &= 0 \\ -D + E &= 0 \\ A - B - E &= -1. \end{aligned}$$

Fra de to midterste ligningene ser vi at $E = D$ og $D = -2A$. Altså er $E = -2A$. Bruker vi dette til å eliminere E fra den nederste ligningen, får vi $3A - B = -1$. Kombinert med den øverste ligningen $A + B = 2$, gir dette $A = 1/4, B = 7/4$. Dermed er $E = D = -2A = -1/2$ og $C = B = 7/4$. Vi har altså funnet oppspaltingen

$$\frac{2x^4 - 1}{(x - 1)(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} \frac{x + 7}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \frac{x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Du kan kontrollere at det stemmer ved å trekke sammen høyresiden. ■

Bemerkning

I eksemplet ovenfor fikk vi fem ligninger med fem ukjente, nøyaktig nok ukjente til at systemet burde ha en løsning. Det er dette som er poenget med reglene om hva slags type ledd vi skal ta med i en delbrøkoppspalting; så lenge vi følger disse reglene, vil vi alltid ende opp med det rette antall ukjente. Det går til og med an å vise at ligningssystemet alltid har en entydig løsning, men det skal vi ikke komme inn på her.

Vi har nå funnet ut hvordan vi kan delbrøkoppspalte en rasjonal funksjon, men denne kunnskapen er til liten nytte dersom vi ikke kan integrere de delbrøkene vi kommer frem til. Som vi har sett, er disse delbrøkene av to typer – de med en førstegradsfaktor i nevneren, $\frac{A}{(x-r)^n}$, og de med en annengradsfaktor, $\frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^m}$. Den første typen byr ikke på problemer siden

$$\int \frac{A}{(x-r)^n} dx = \begin{cases} A \ln|x-r| + C & \text{hvis } n = 1 \\ \frac{A}{(1-n)(x-r)^{n-1}} + C & \text{hvis } n \neq 1 \end{cases}$$

(hvis dette ser mystisk ut, husk at du kan skrive $\int \frac{A}{(x-r)^n} dx$ som $\int A(x-r)^{-n} dx$).

Men hvordan integrerer vi $\frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^m}$? Dette er en omfattende historie som vi skal nærme oss gradvis. Det viser seg at det verste er gjort om vi kan integrere $\frac{1}{x^2+ax+b}$. Fremgangsmåten er lettest å forstå fra et eksempel.

9.3.5 Eksempel

Regn ut $\int \frac{dx}{x^2+4x+6}$.

Vi skaffer oss først et fullstendig kvadrat i nevneren. Siden

$$x^2 + 4x + 6 = x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 6 = (x+2)^2 + 2,$$

må

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+6} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+2}.$$

Neste skritt er å faktorisere ut konstantleddet 2:

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

Nå ser vi poenget; vi substituerer $u = \frac{x+2}{\sqrt{2}}$, og får $du = \frac{dx}{\sqrt{2}}$ og

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{2} du}{u^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan u + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + C. \end{aligned}$$

Dermed er problemet løst. ■

Denne metoden fungerer generelt; ved å fullføre kvadratet, faktorisere ut konstantleddet og så substituere, kan vi alltid føre et integral av typen $\int \frac{dx}{x^2 + ax + b}$ over på formen $\int \frac{du}{1 + u^2}$ (forutsatt at $x^2 + ax + b$ ikke kan faktoreriseres i førstegradspolynom).

Men hvordan løser vi integraler på formen $\int \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} dx$ der telleren er et førstegradsuttrykk?

9.3.6 Eksempel

Beregn $I = \int \frac{4x + 2}{x^2 + 6x + 12} dx$.

Vi regner først ut den deriverte til nevneren:

$$D(x^2 + 6x + 12) = 2x + 6.$$

Knepet er å få telleren til å ligne mest mulig på denne deriverte. Vi faktorerer først ut et 2-tall i telleren slik at koeffisienten til x i teller stemmer med den tilsvarende koeffisienten i $D(x^2 + 6x + 12)$:

$$I = \int \frac{4x + 2}{x^2 + 6x + 12} dx = 2 \int \frac{2x + 1}{x^2 + 6x + 12} dx$$

(hadde telleren vært $6x + 2$, hadde vi altså faktorisert ut et 3-tall isteden). Nå adderer og subtraherer vi 5 slik at vi får hele den deriverte til nevneren inn i telleren

$$I = 2 \int \frac{2x + 1 + 5 - 5}{x^2 + 6x + 12} dx = 2 \int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 12} dx - 10 \int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} dx.$$

Det siste integralet er av typen vi så på i foregående eksempel. Det første integralet løser vi ved å substituere $u = x^2 + 6x + 12$. Da er $du = (2x + 6) dx$, og vi får

$$2 \int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 12} dx = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln |u| + C = 2 \ln(x^2 + 6x + 12) + C.$$

Poenget burde være klart; ved å «smugle inn» den deriverte til nevneren, kvitter vi oss med x -leddet i telleren.

For å fullføre integrasjonen, må vi beregne $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} dx$. Som allerede påpekt, kan dette gjøres ved hjelp av metoden i forrige eksempel, men vi tar med regningene i tilfellet noen vil se et eksempel til:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 12} &= \int \frac{dx}{x^2 + 6x + (6/2)^2 - (6/2)^2 + 12} \\ &= \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

Vi setter inn $u = \frac{x+3}{\sqrt{3}}$ og $du = \frac{dx}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{1}{3} \int \frac{\sqrt{3} du}{u^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan u + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Kombinerer vi resultatene ovenfor, får vi

$$I = \int \frac{4x + 2}{x^2 + 6x + 12} dx = 2 \ln(x^2 + 6x + 12) - \frac{10\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C. \quad \blacksquare$$

Det gjenstår fortsatt å løse integraler der multiplisiteten er større enn én, altså

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + ax + b)^m} dx$$

der $m > 1$. Stort sett skal vi bruke teknikkene ovenfor, men vi trenger en ingrediens til. Dersom vi setter

$$I_m = \int \frac{du}{(1 + u^2)^m},$$

viser det seg at vi har rekursjonsformelen

$$I_m = \frac{1}{2(m-1)} \frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1}. \quad (2)$$

Vi skal bevise denne formelen nedenfor, men la oss først se hvordan den brukes.

9.3.7 Eksempel

Beregn $I = \int \frac{x+2}{(x^2+2x+5)^2} dx$.

Som i foregående eksempel, finner vi først den deriverte til annengradsfaktoren i nevner:

$$D(x^2 + 2x + 5) = 2x + 2.$$

Deretter smugler vi denne deriverte inn i telleren på samme måte som før

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+2}{(x^2+2x+5)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{(x^2+2x+5)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}. \end{aligned}$$

I det første integralet substituerer vi $u = x^2 + 2x + 5$. Da er $du = (2x + 2) dx$ og

$$\int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x^2 + 2x + 5} + C.$$

Også det andre integralet behandler vi på samme måte som før; vi fullfører kvadratet og skifter variabel:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2} = \int \frac{dx}{[(x + 1)^2 + 4]^2} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x + 1}{2}\right)^2 + 1\right]^2}$$

Vi setter inn $u = \frac{x + 1}{2}$ og $du = \frac{dx}{2}$;

$$\frac{1}{16} \int \frac{2 du}{(1 + u^2)^2} = \frac{1}{8} \int \frac{du}{(1 + u^2)^2}.$$

Nå bruker vi rekursjonsformelen (2) med $m = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(1 + u^2)^2} &= I_2 = \frac{1}{2(2 - 1)} \frac{u}{(1 + u^2)^{2-1}} + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2(2 - 1)} I_{2-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{u}{1 + u^2} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{2} \frac{u}{1 + u^2} + \frac{1}{2} \arctan u + C. \end{aligned}$$

Setter vi inn $u = \frac{x + 1}{2}$, får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2} &= \frac{1}{8} \int \frac{du}{(1 + u^2)^2} \\ &= \frac{1}{16} \frac{\frac{x + 1}{2}}{1 + \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2} + \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{8} \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5} + \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

I alt har vi dermed

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x + 2}{(x^2 + 2x + 5)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} + \frac{1}{8} \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5} \\ &\quad + \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C \\ &= \frac{\frac{1}{8}x - \frac{3}{8}}{x^2 + 2x + 5} + \frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

■

Denne metoden fungerer også for høyere multiplisiteter m ; den eneste forskjellen er at vi må bruke rekursjonsformelen (2) flere ganger.

Det gjenstår å vise formel (2). Vi begynner med å delvis integrere uttrykket

$$I_{m-1} = \int \frac{du}{(1+u^2)^{m-1}} = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+u^2)^{m-1}} du.$$

Setter vi $U = \frac{1}{(1+u^2)^{m-1}}$, $V' = 1$, får vi $U' = \frac{2(1-m)u}{(1+u^2)^m}$ og $V = u$ (vi bruker store bokstaver for å unngå sammenblanding av funksjonen U og variabelen u). Altså er

$$I_{m-1} = \frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} + 2(m-1) \int \frac{u^2}{(1+u^2)^m} du.$$

Vi skriver om det siste integralet

$$\int \frac{u^2}{(1+u^2)^m} du = \int \frac{(1+u^2) - 1}{(1+u^2)^m} du = I_{m-1} - I_m.$$

Setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, får vi

$$I_{m-1} = \frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} + 2(m-1)I_{m-1} - 2(m-1)I_m.$$

Løser vi for I_m , får vi

$$I_m = \frac{1}{2(m-1)} \frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1}$$

som er (2).

La oss til slutt oppsummere den fremgangsmåten vi nå har for integrasjon av rasjonale funksjoner:

1. Sjekk om graden til telleren er større enn eller lik graden til nevneren og utfør i så fall polynomdivisjon.

2. Faktoriser nevneren i reelle første- og annengradsuttrykk. Sjekk at annengradsuttrykkene ikke kan faktorerer ytterligere. (I praksis kan en slik faktorisering være umulig å få til, men i de oppgavene du får her, vil det alltid være en grei metode tilgjengelig.)

3. Foreta delbrøkkoppspalting. Integralene vi nå har er på formen $\int \frac{A}{(x-r)^n} dx$ eller $\int \frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^m} dx$. Den første typen kan integreres umiddelbart.

4. For å integrere den andre typen, smugler du den deriverte til x^2+ax+b inn i telleren, og substituerer $u = x^2+ax+b$. Du står nå igjen med et integral på formen $\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^m}$.

5. Fullfør kvadratet og substituer slik at integralet får formen $\int \frac{du}{(1+u^2)^m}$.

6. Bruk rekursjonsformelen (2) til å redusere multiplisiteten m . Til slutt sitter du igjen med $\int \frac{du}{1+u^2}$ som kan integreres direkte.

9.3.8 Eksempel

$$\text{Beregn } I = \int \frac{2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 6x + 4}{(x-1)(x^2 + 4x + 5)} dx.$$

Vi går gjennom skrittene ovenfor.

1. Siden telleren har grad 4 og nevneren grad 3, må vi dividere. Bruker vi at

$$(x-1)(x^2 + 4x + 5) = x^3 + 3x^2 + x - 5, \text{ får vi}$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 6x + 4 : x^3 + 3x^2 + x - 5 = 2x \\ \underline{-(2x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 10x)} \\ 2x^2 + 4x + 4 \end{array}$$

som viser at

$$\frac{2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 6x + 4}{(x-1)(x^2 + 4x + 5)} = 2x + \frac{2x^2 + 4x + 4}{(x-1)(x^2 + 4x + 5)}.$$

2. Siden annengradsfaktoren $x^2 + 4x + 5$ ikke har reelle røtter, er det umulig å faktorisere nevneren ytterligere.

3. Vi delbrøkkoppspalter:

$$\frac{2x^2 + 4x + 4}{(x-1)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 5}$$

gir etter multiplikasjon med fellesnevneren:

$$2x^2 + 4x + 4 = (A + B)x^2 + (4A - B + C)x + 5A - C.$$

Altså må $A + B = 2$, $4A - B + C = 4$ og $5A - C = 4$. Løser vi dette ligningssystemet, får vi $A = B = C = 1$. Dermed har vi

$$\frac{2x^2 + 4x + 4}{(x-1)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2 + 4x + 5}.$$

Går vi tilbake til integralet, ser vi at

$$\begin{aligned} I &= \int \left(2x + \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2 + 4x + 5} \right) dx \\ &= x^2 + \ln|x-1| + \int \frac{x+1}{x^2 + 4x + 5} dx. \end{aligned}$$

4. Den deriverte til $x^2 + 4x + 5$ er $2x + 4$. Lurer vi denne inn i telleren, får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2 + 4x + 5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 4x + 5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2 + 4x + 5} dx - \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}. \end{aligned}$$

I det første integralet substituerer vi $u = x^2 + 4x + 5$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 5) + C. \end{aligned}$$

5. Vi står igjen med $\int \frac{du}{x^2 + 4x + 5}$. Vi fullfører kvadratet og substituerer $u = x + 2$, $du = dx$:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \int \frac{du}{1 + u^2}.$$

6. I dette tilfellet er multiplisiteten én, så vi kan integrere direkte:

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + C = \arctan(x + 2) + C.$$

Kombinerer vi alle delene, får vi

$$I = x^2 + \ln |x - 1| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 5) - \arctan(x + 2) + C.$$



Sammenlignet med delvis integrasjon og substitusjon kan delbrøkoppspalting virke som en ganske begrenset metode siden den bare fungerer for rasjonale funksjoner, men som vi skal se i oppgavene nedenfor (og også i neste seksjon) er det mange integrander som kan omdannes til rasjonale funksjoner ved hjelp av substitusjon eller delvis integrasjon. Dette gjør at delbrøkoppspalting har større slagkraft enn man i utgangspunktet skulle tro. I det hele tatt er det galt å se på substitusjon, delvis integrasjon og delbrøkoppspalting som tre separate metoder: det er når de brukes sammen at deres styrke virkelig kommer til sin rett!

Oppgaver i seksjon 9.3

1. Løs integralene:

a) $\int \frac{x + 1}{(x - 1)(x - 2)} dx$

b) $\int \frac{7x + 1}{(x - 2)(x + 3)} dx$

c) $\int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 6)} dx$

d) $\int \frac{x + 7}{x^2 - x - 2} dx$

e) $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$

2. Løs integralene:

a) $\int \frac{5x + 5}{(x - 2)(x + 3)} dx$

b) $\int \frac{2x + 1}{(x - 2)(x + 2)} dx$

c) $\int \frac{4x + 2}{x^2 - 2x - 8} dx$

d) $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 7x + 6} dx$

3. Løs integralene:

a) $\int \frac{2}{x^2 + 6x + 10} dx$

b) $\int \frac{2x - 2}{x^2 + 4x + 8} dx$

c) $\int \frac{2x - 4}{x^2 + 6x + 8} dx$

d) $\int \frac{6x}{x^2 + 3x + 3} dx$

e) $\int \frac{x + 4}{x^2 + 4x + 3} dx$

f) $\int \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 6} dx$

4. Løs integralene:

a) $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx$

b) $\int \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 17} dx$

c) $\int \frac{x - 1}{x^2 + 8x + 7} dx$

d) $\int \frac{2x - 4}{x^2 + 5x + 13} dx$

5. Løs integralene.

a) $\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$

c) $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 1} dx$

d) $\int \frac{x-1}{x^2+3x+2} dx$

e) $\int \frac{4x+2}{x^2+2x+2} dx$

f) $\int \frac{3x^2+x}{(x-1)(x+1)^2} dx$

g) $\int \frac{-x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx$

6. Løs integralene.

a) $\int \frac{x^5+4x^4+2}{x^2+x+1} dx$

b) $\int \frac{2}{x^2(x-3)} dx$

c) $\int \frac{x}{(x+2)^2} dx$

d) $\int \frac{2x+1}{x^2-4x+3} dx$

7. (IH) Beregn $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$.

8. (UiTø) Beregn $\int \frac{2x+2}{(x+2)^2(x-1)} dx$.

9. (UiO) Beregn $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} dx$.

10. (UiB) Finn $\int \frac{dx}{16x^2+8x-3}$.

11. (UiO) Finn $\int \frac{2}{(t-1)(1+t^2)} dt$.

12. (UiB) Finn $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

13. (NTNU) Finn $\int_0^1 \frac{2x^3+2x+1}{(x^2+1)^2} dx$.

14. (UiTø) Finn $\int \frac{2x^3+8x-1}{(x^2+4)^2} dx$.

15. (NTNU) Finn $\int \frac{4x^3+1}{4x^3+x} dx$.

16. Finn $\int \frac{dx}{x^3-1}$.

17. (UiO) Beregn $\int \frac{dx}{x^3 + 8}$.

18. Løs $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

19. Løs $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$.

20. (UiO) Vis at det finnes konstanter A, B, C slik at

$$\frac{5x}{x^3 + x^2 - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}.$$

Regn ut integralet $\int \frac{5x}{x^3 + x^2 - 2} dx$.

21. a) (UiO) Regn ut integralet

$$\int \frac{u + 2}{u^2 + 2u + 5} du$$

b) Finn konstanter A, B, C slik at

$$\frac{1}{u(u^2 + 2u + 5)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu + C}{u^2 + 2u + 5}$$

c) Regn ut integralet

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x + 2 \cos x + 5} dx$$

22. a) (UiO) Finn tall A, B og C slik at

$$\frac{1}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

b) Løs integralet $\int \frac{\arctan x}{(x+1)^2} dx$.

23. Regn ut integralet $\int \frac{1}{\sin x} dx$. (Hint: Gang med $\sin x$ i teller og nevner, og skriv deretter nevneren som $1 - \cos^2 x$.)

24. a) (UiO) Vis at det komplekse tallet $z = 1 + i$ er en rot i polynomet $P(z) = z^3 - z^2 + 2$. Finn den reelle og komplekse faktoriseringen til $P(z)$.

b) Finn tall A, B og C slik at

$$\frac{4x^2 - x + 5}{x^3 - x^2 + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2}$$

c) Løs integralet $\int \frac{4x^2 - x + 5}{x^3 - x^2 + 2} dx = \int \left(\frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2} \right) dx$.

25. a) (UiO) Vis at $2 + i$ er en kompleks rot i ligningen $z^3 - 11z + 20 = 0$. Finn de andre røttene.

b) Regn ut det ubestemte integralet $\int \frac{10x+3}{x^3-11x+20} dx$.

26. a) (UiO) Bruk polynomdivisjon til å dele $P(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 17x + 14$ på $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 4$.

b) Vis at -1 er en rot i polynomet $Q(x)$. Finn den reelle og den komplekse faktoriseringen til $Q(x)$.

c) Løs integralet

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 17x + 14}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} dx.$$

27. (UiO) Løs integralet $\int \frac{dx}{e^{2x} + 4e^x + 13}$.

28. (UiB) Løs integralet $\int \frac{e^{3x}}{(e^x - 1)(e^{2x} - e^x + 1)} dx$.

29. (NTNU) Løs integralet $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan v}{1 + \cos v} dv$.

30. (NTNU) Løs integralet $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 3 \sin x + 2} dx$.

31. (UiO) Beregn $\int \ln(x^2 + 2x + 10) dx$.

32. (UiB) Beregn $\int \frac{\sqrt{x} + 1}{x(x + 1)} dx$.

33. (UiO) Finn $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

34. (UiO) Finn $\int \frac{dx}{3e^{2x} + e^{-2x}}$.

35. (NTNU) Regn ut $\int \frac{\sqrt{x}}{1 - x^2} dx$.

36. Beregn volumet til det omdreiningslegemet som oppstår når $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, dreies om x -aksen.

37. a) (UiO) Regn ut integralet

$$\int \frac{1}{u^2 - 1} du.$$

b) Regn ut integralet

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos x} dx$$

(Hint: Vis først at $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$.)

c) Finn buelengden til grafen til funksjonen $f(x) = \ln(\cos x)$ fra $x = 0$ til $x = \frac{\pi}{6}$.

38. Anta at P og Q er polynomer og at graden til P er mindre enn graden til Q . Anta at Q har faktoriseringen

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$$

der alle a_i -ene er forskjellige, og at P/Q har delbrøkkoppstillingen

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x - a_n)}.$$

a) Vis at $P(x) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{Q(x) - Q(a_i)}{x - a_i}$ og bruk dette til å utlede at $A_i = P(a_i)/Q'(a_i)$.

b) Bruk metoden til å finne delbrøkkoppstillingen til $\frac{x+2}{x^2-5x+4}$.

*9.4 Noen spesielle teknikker

I denne seksjonen skal vi se på mer spesialiserte teknikker (eller knep, om man vil) som fungerer for en del viktige klasser av integraler man ofte kommer borti. Hensikten med disse knepene er å få omdannet kompliserte integraler til enklere – og gjerne til slike som kan løses ved delbrøkkoppstilling.

1. Integraler som inneholder uttrykk av typen $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Her lønner det seg ofte å substituere $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Vi demonstrerer metoden på et eksempel:

9.4.1 Eksempel

Beregn $I = \int \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$.

Setter vi $u = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, får vi $x = -\frac{u^2}{u^2-1}$. For å finne dx , kan vi selvfølgelig derivere $-\frac{u^2}{u^2-1}$ som en brøk, men det er enklere å bruke et lite triks: Siden

$$x = -\frac{u^2}{u^2-1} = -\frac{(u^2-1)+1}{u^2-1} = -1 - \frac{1}{u^2-1},$$

er

$$\frac{dx}{du} = \frac{2u}{(u^2-1)^2}.$$

Altså er $dx = \frac{2u}{(u^2-1)^2} du$, og vi får

$$I = \int \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx = \int u \frac{2u}{(u^2-1)^2} du = \int \frac{2u^2}{(u^2-1)^2} du.$$

Dette integralet kan løses på flere måter, men vi skal holde oss til den mest åpenbare metoden som er delbrøkkopp spalting. Bruker vi at $(u^2 - 1)^2 = [(u - 1)(u + 1)]^2 = (u - 1)^2(u + 1)^2$, ser vi at oppspaltningen får formen

$$\frac{2u^2}{(u - 1)^2(u + 1)^2} = \frac{A}{(u - 1)} + \frac{B}{(u - 1)^2} + \frac{C}{(u + 1)} + \frac{D}{(u + 1)^2}.$$

Vi multipliserer med fellesnevneren og får

$$2u^2 = A(u - 1)(u + 1)^2 + B(u + 1)^2 + C(u - 1)^2(u + 1) + D(u - 1)^2. \quad (1)$$

Ifølge den teknikken vi hittil har brukt, er neste skritt å multiplisere ut alle parentesene og sammenligne koeffisienter. La oss nå forsøke en annen teknikk som ofte er raskere i praksis. Siden vi ønsker at (1) skal holde for alle u , må den spesielt holde for $u = 1$. Setter vi $u = 1$ i (1), får vi

$$2 \cdot 1^2 = A \cdot 0 \cdot 2^2 + B \cdot 2^2 + C \cdot 0^2 \cdot 2 + D \cdot 0^2$$

som gir $B = 1/2$. Bruker vi isteden $u = -1$, får vi

$$2(-1)^2 = A(-2) \cdot 0^2 + B \cdot 0^2 + C(-2)^2 \cdot 0 + D(-2)^2$$

som gir $D = 1/2$. Nå er det ikke flere valg av u som får ledd til å falle bort, så vi får prøve andre «pene» u -verdier isteden. Setter vi $u = 0$, får vi

$$2 \cdot 0^2 = A(-1) \cdot 1^2 + B \cdot 1^2 + C(-1)^2 \cdot 1 + D(-1)^2$$

som gir $-A + B + C + D = 0$. Bruker vi at $B = D = 1/2$, har vi dermed $A - C = 1$. For å skaffe oss enda en ligning, setter vi inn $u = 2$. Dette gir

$$2 \cdot 2^2 = A \cdot 1 \cdot 3^2 + B \cdot 3^2 + C \cdot 1^2 \cdot 3 + D \cdot 1^2,$$

som gir $8 = 9A + 9B + 3C + D$. Bruker vi at $B = D = 1/2$, får vi $3A + C = 1$. Løser vi de to ligningene vi nå har, får vi $A = 1/2$, $C = -1/2$. Dermed har vi delbrøkkopp spaltingen

$$\frac{2u^2}{(u - 1)^2(u + 1)^2} = \frac{1/2}{u - 1} + \frac{1/2}{(u - 1)^2} - \frac{1/2}{u + 1} + \frac{1/2}{(u + 1)^2}$$

(når du bruker metoden ovenfor, bør du alltid sjekke at svaret stemmer ved å trekke sammen høyresiden).

Vi kan nå integrere

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1/2}{u - 1} + \frac{1/2}{(u - 1)^2} - \frac{1/2}{u + 1} + \frac{1/2}{(u + 1)^2} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \ln |u - 1| - \frac{1}{2} \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{2} \ln |u + 1| - \frac{1}{2} \frac{1}{u + 1} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| - \frac{u}{u^2 - 1} + C. \end{aligned}$$

Setter vi inn $u = \sqrt{x/(x + 1)}$ får vi

$$I = \ln |\sqrt{|x + 1|} - \sqrt{|x|}| \pm \sqrt{x(x + 1)} + C$$

(der + gjelder for $x > 0$ og - for $x < -1$) etter noen forenklinger. (Kan du gjennomføre dem?) ■

Som vi ser, blir regningene ganske omfattende selv for dette enkle eksemplet. Ideen burde imidlertid være klar – gjennom substitusjonen $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ kvitter vi oss med rottegnet og kommer over til en rasjonal funksjon. Legg merke til at hvis $c = 0$ og $d = 1$, har vi en substitusjon av typen $u = \sqrt[n]{ax+b}$. Disse er mye greiere å hansk med siden de gir oss polynomer i stedet for rasjonale funksjoner.

2. Integraler av typen $\int \sin^n x \cos^m x dx$ der n og m er hele tall

Slike integraler dukker ofte opp etter substitusjon. Vi skal stort sett se på eksempler hvor $n, m \geq 0$.

Dersom enten n eller m er odde, er integralet lett å løse ved substitusjon:

9.4.2 Eksempel

Løs $I = \int \sin^2 x \cos^5 x dx$.

Siden eksponenten 5 er odde, kan vi bruke formelen $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ til å omforme alle cosinusene unntatt én til sinuser:

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1 - \sin^2 x)^2 = 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x.$$

Dette gir

$$I = \int \sin^2 x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cos x dx.$$

Nå kommer poenget; vi setter $u = \sin x$, og får $du = \cos x dx$ og

$$\begin{aligned} I &= \int u^2 (1 - 2u^2 + u^4) du = \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du \\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C. \end{aligned}$$



Knepet ovenfor fungerer ikke når både n og m er like fordi vi ikke får en ekstra faktor som kan inngå i du . Isteden kan vi bruke formlene

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

til systematisk å redusere graden til uttrykket.

9.4.3 Eksempel

Finn $I = \int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Fra formlene ovenfor får vi

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{og} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Setter vi dette inn i integralet, ser vi at

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx. \end{aligned}$$

I dette uttrykket kan de to første leddene integreres umiddelbart, og det siste leddet kan løses ved teknikken ovenfor, siden 3 er odde. For å integrere det tredje leddet, må vi gjennom prosedyren en gang til. Her er detaljene.

Først integrerer vi

$$\int (1 + \cos 2x) dx = x + \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

Så bruker vi omskrivningen fra forrige eksempel ($u = \sin 2x$, $du = 2 \cos 2x dx$):

$$\begin{aligned} \int \cos^3 2x dx &= \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 - u^2) du \\ &= \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} + C = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

Til slutt bruker vi at $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$:

$$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x + C.$$

Samler vi alle bidragene, får vi

$$I = \frac{x}{16} + \frac{1}{48} \sin^3 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + C.$$

Ønsker vi svaret uttrykt ved $\sin x$ og $\cos x$ istedenfor $\sin 2x$ og $\sin 4x$, kan vi bruke formlene

$$\begin{aligned} \sin 2u &= 2 \sin u \cos u \\ \cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u \end{aligned}$$

for å komme tilbake igjen (dette er ofte en relevant problemstilling dersom integralet vårt er det siste i en kjede av substitusjoner). ■

Ved hjelp av teknikkene ovenfor kan vi løse alle integraler på formen $\int \sin^n x \cos^m x dx$ der $n, m \geq 0$. Vi tar også med ett viktig eksempel på negative eksponenter.

9.4.4 Eksempel

Beregn $I = \int \frac{dx}{\sin x}$.

Dette er et triks. Vi ganger med $\sin x$ over og under brøkstreken og setter inn $u = \cos x$ og $du = -\sin x dx$:

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = - \int \frac{du}{1 - u^2} = \int \frac{du}{u^2 - 1}.$$

Klar for delbrøksoppspalting

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{(u - 1)(u + 1)} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1}.$$

Etter å ha ganget med fellesnevneren, har vi

$$1 = A(u + 1) + B(u - 1).$$

Ved å sette u lik henholdsvis 1 og -1 , ser vi at $A = 1/2$, $B = -1/2$. Dermed er

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1/2}{u - 1} du - \int \frac{1/2}{u + 1} du = \frac{1}{2} \ln |u - 1| - \frac{1}{2} \ln |u + 1| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 - \cos x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + C. \end{aligned}$$

Dette svaret kan forenkles litt; siden

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{(1 - \cos x)^2}{1 - \cos^2 x} = \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right)^2,$$

blir

$$I = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right)^2 \right] + C = \ln \left| \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right| + C.$$

■

Før vi går løs på den neste integraltypen, trenger vi en definisjon. En rasjonal funksjon i sinus og cosinus er et uttrykk på formen

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_{n,m} \sin^n x \cos^m x}{\sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^K b_{n,m} \sin^n x \cos^m x}$$

der $a_{n,m}, b_{n,m}$ er tall. To eksempler er

$$\frac{7 \sin^2 x \cos x + 3 \sin x \cos^2 x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos^2 x + 2} \quad \text{og} \quad \frac{2 \sin x \cos x}{3 \cos^3 x - 4}.$$

3. Integraler av typen $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Her kan det lønne seg å substituere $u = \tan(x/2)$. Dette ser temmelig vanvittig ut – hvorfor i all verden skal vi substituere $u = \tan(x/2)$ og ikke noe mer nærliggende som $u = \sin x$, $u = \cos x$ eller $u = \tan x$? Grunnen er at både $\sin x$, $\cos x$ og dx kan uttrykkes på en enkel måte ved hjelp av $u = \tan(x/2)$; vi får

$$\sin x = \frac{2u}{1 + u^2} \tag{2}$$

$$\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \tag{3}$$

$$dx = \frac{2}{1 + u^2} du \tag{4}$$

(disse formlene skal vi utlede snart).

Prøver vi en av de andre substitusjonene ovenfor, vil det alltid være en ubehagelig kvadratrotdrot i minst én av disse formlene. Fordelen med å sette $u = \tan(x/2)$ er at man alltid kommer over til et integral som (i hvert fall i prinsippet) kan løses ved delbrøkkoppspalting. Ulempen er at metoden er meget arbeidskrevende og at man med litt flaks og innsikt ofte kan finne en enklere angrepsmåte. La oss se på et eksempel.

9.4.5 Eksempel

Beregn $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx$.

Setter vi $u = \tan(x/2)$ og bruker (2), (3) og (4), får vi

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+u^2} du \\ &= \int \frac{2u}{2u + (1-u^2) + (1+u^2)} \cdot \frac{2}{1+u^2} du \\ &= \int \frac{2u}{(u+1)(u^2+1)} du. \end{aligned}$$

Vi bruker delbrøkkoppspalting:

$$\frac{2u}{(u+1)(u^2+1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2+1}.$$

Etter multiplikasjon med fellesnevner, får vi

$$2u = A(u^2+1) + (Bu+C)(u+1),$$

som etter litt regning gir $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$. Altså er

$$I = \int \left(\frac{-1}{u+1} + \frac{u+1}{u^2+1} \right) du = -\ln|u+1| + \int \frac{u+1}{u^2+1} du.$$

Siden $D(u^2+1) = 2u$, er det siste integralet enkelt å dele opp:

$$\begin{aligned} \int \frac{u+1}{u^2+1} du &= \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} du + \int \frac{1}{u^2+1} du \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \arctan u + C. \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned} I &= -\ln|u+1| + \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \arctan u + C \\ &= -\ln \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| + \frac{1}{2} \ln \left(\tan^2 \frac{x}{2} + 1 \right) + \arctan \left(\tan \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Dette svaret kan forenkles en god del. Vi observerer først at siden \arctan og \tan er omvendte funksjoner, så er $\arctan[\tan(x/2)] = x/2$ for $x \in (-\pi, \pi)$. Bruker vi

regnerreglene for logartimer og trigonometriske funksjoner, får vi også

$$\begin{aligned}
 & -\ln \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| + \frac{1}{2} \ln \left(\tan^2 \frac{x}{2} + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tan^2 \frac{x}{2} + 1}{(\tan \frac{x}{2} + 1)^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tan^2 \frac{x}{2} + 1}{\tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} + 1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\sin^2 \frac{x}{2} / \cos^2 \frac{x}{2}) + 1}{(\sin^2 \frac{x}{2} / \cos^2 \frac{x}{2}) + 2(\sin \frac{x}{2} / \cos \frac{x}{2}) + 1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1 + \sin x} \right) = -\frac{1}{2} \ln(1 + \sin x).
 \end{aligned}$$

Dette gir

$$I = -\frac{1}{2} \ln(1 + \sin x) + \frac{x}{2} + C.$$

Ved derivasjon (og noen omregninger) kan man sjekke at dette svaret gjelder for alle x der integranden gir mening. ■

Eksemplet ovenfor viser en annen ulempe ved substitusjonen $u = \tan(x/2)$, nemlig at svaret ofte blir gitt på en svært uoversiktlig form.

Bemerkning

Du har kanskje stuset over at alle integralene under punkt 2 (altså de på formen $\int \sin^n x \cos^m x dx$) også faller inn under punkt 3. Når vi allikevel har med begge punktene, skyldes det at substitusjonen $u = \tan(x/2)$ i praksis er ubrukelig når det blir litt størrelse på n og m – regningene blir lange og svaret urimelig kronglete.

Det gjenstår fortsatt å utlede formlene (2)–(4), altså å vise at

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

der $u = \tan(x/2)$. Vi begynner med å observere at

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}$$

siden $\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2) = 1$. Deler vi med $\cos^2(x/2)$ over og under brøkstreken, får vi

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Regningene for $\cos x$ er av samme type:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

Den tredje formelen er enklere: Siden $u = \tan(x/2)$, blir $x = 2 \arctan u$. Vi deriverer og får $dx = \frac{2}{1+u^2} du$.

4. Integraler som inneholder uttrykk av typen $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Problemstillingen er den samme som i punkt 1 – vi må bli kvitt rottegnet. Denne gang nytter det ikke å substituere $u = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, for når vi løser for x , får vi en ny kvadratrotd. Før vi går løs på det generelle problemet, lønner det seg å se på tre spesialtilfeller. I alle formelene nedenfor er d et positivt tall.

Anta først at rotuttrykket har formen

$$\sqrt{d - x^2} \quad (5)$$

da substituerer vi $x = \sqrt{d} \sin u$, der $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, og får

$$\sqrt{d - x^2} = \sqrt{d - d \sin^2 u} = \sqrt{d} \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{d} \cos u.$$

Kvadratroten er borte, og $dx = \sqrt{d} \cos u du$ medfører ingen komplikasjoner.

Anta så at rotuttrykket har formen

$$\sqrt{d + x^2} \quad (6)$$

da substituerer vi $x = \sqrt{d} \sinh u$. Siden $\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u$, får vi

$$\sqrt{d + x^2} = \sqrt{d + d \sinh^2 u} = \sqrt{d} \sqrt{1 + \sinh^2 u} = \sqrt{d} \cosh u.$$

I tillegg er $dx = \sqrt{d} \cosh u du$ som ikke byr på ubehageligheter.

Til slutt antar vi at rotuttrykket har formen

$$\sqrt{x^2 - d}. \quad (7)$$

I dette tilfellet substituerer vi $x = \sqrt{d} \cosh u$, der $u > 0$, og bruker at $\sinh^2 u = \cosh^2 u - 1$:

$$\sqrt{x^2 - d} = \sqrt{d \cosh^2 u - d} = \sqrt{d} \sqrt{\cosh^2 u - 1} = \sqrt{d} \sinh u.$$

I tillegg har vi $dx = \sqrt{d} \sinh u du$.

Poenget er nå at vi kan bringe et hvilket som helst uttrykk $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ over på en av de tre formene (5), (6) og (7) ved å fullføre kvadratet. Vi nøyer oss med å vise metoden på to eksempler:

9.4.6 Eksempel

Beregn $I = \int \sqrt{-4x^2 - 24x - 8} dx$.

Vi faktoreriserer først ut 4, og skriver deretter uttrykket inne i rottegnet som et fullstendig kvadrat

$$\begin{aligned} \sqrt{-4x^2 - 24x - 8} &= 2\sqrt{-(x^2 + 6x) - 2} \\ &= 2\sqrt{-\left[x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - 2} \\ &= 2\sqrt{-(x+3)^2 + 7} = 2\sqrt{7 - (x+3)^2}. \end{aligned}$$

Dette uttrykket har samme form som (5), og vi prøver oss med $x + 3 = \sqrt{7} \sin u$, dvs. $x = \sqrt{7} \sin u - 3$. Da er $dx = \sqrt{7} \cos u \, du$, og vi får

$$I = \int 2\sqrt{7 - (x+3)^2} \, dx = 2 \int \sqrt{7 - 7 \sin^2 u} \cdot \sqrt{7} \cos u \, du = 14 \int \cos^2 u \, du.$$

For å løse det nye integralet, kan vi for eksempel gå tilbake til metoden under punkt

2. Vi skriver $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$, og får

$$\int \cos^2 u \, du = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2u}{2} \right) du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + C = \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \sin u \cos u + C.$$

For å komme tilbake til x , observerer vi at siden $\sin u = \frac{x+3}{\sqrt{7}}$, så er $u = \arcsin \frac{x+3}{\sqrt{7}}$ og

$$\begin{aligned} \cos u &= \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{1 - \left(\frac{x+3}{\sqrt{7}} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{7 - (x+3)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{-x^2 - 6x - 2}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$I = 14 \int \cos^2 u \, du = 7 \arcsin \frac{x+3}{\sqrt{7}} + (x+3) \sqrt{-x^2 - 6x - 2} + C.$$



Vi tar med et eksempel på bruk av hyperbolske funksjoner også.

9.4.7 Eksempel

Løs $I = \int x \sqrt{x^2 + 2x + 5} \, dx$.

Fullfører vi kvadratet, får vi

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} = \sqrt{(x+1)^2 + 4} = \sqrt{4 + (x+1)^2}$$

som har samme form som (6). Vi setter $x + 1 = 2 \sinh u$, og får $x = 2 \sinh u - 1$, $dx = 2 \cosh u \, du$. Dermed er

$$\begin{aligned} I &= \int (2 \sinh u - 1) \sqrt{4 + 4 \sinh^2 u} \, 2 \cosh u \, du \\ &= 8 \int \cosh^2 u \sinh u \, du - 4 \int \cosh^2 u \, du. \end{aligned}$$

Det første integralet løser vi lett ved å sette $z = \cosh u$. Da blir $dz = \sinh u \, du$ og

$$\int \cosh^2 u \sinh u \, du = \int z^2 \, dz = \frac{z^3}{3} + C = \frac{1}{3} \cosh^3 u + C.$$

For å løse det andre integralet, kan vi bruke den samme teknikken som i forrige eksempel. Fra seksjon *7.7 vet vi at

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1.$$

Altså er

$$\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2},$$

og vi får

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 u \, du &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2u \right) du = \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2u + C \\ &= \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \sinh u \cosh u + C \end{aligned}$$

der vi også har brukt formelen $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$. Setter vi sammen bitene, får vi nå

$$I = \frac{8}{3} \cosh^3 u - 2u - 2 \sinh u \cosh u + C.$$

Vi må kvitte oss med u og komme tilbake til x . Siden $\sinh u = \frac{x+1}{2}$, er

$$\cosh u = \sqrt{1 + \sinh^2 u} = \sqrt{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 5}.$$

Dessuten er

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{arsinh} \left(\frac{x+1}{2} \right) = \ln \left(\frac{x+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} \right) \\ &= \ln(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}) - \ln 2 \end{aligned}$$

(hvor vi har brukt formelen $\operatorname{arsinh} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$ fra seksjon *7.7). Dermed får vi

$$I = \frac{1}{3}(x^2 + 2x + 5)^{3/2} - 2 \ln(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}) - \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 5} + C$$

■

Regningene i dette eksemplet er typiske – vi kan alltid løse integraler av hyperbolske funksjoner med de samme teknikkene vi ville ha brukt på trigonometriske funksjoner.

La oss til slutt nevne at det er mulig å løse integraler av typen (6) og (7) uten å bruke hyperbolske funksjoner; i (6) substituerer vi da $x = \sqrt{d} \tan u$, og i (7) setter vi $x = \sqrt{d}/\cos u$. Du finner en oppgave om dette helt til slutt i oppgaveseksjonen nedenfor.

Oppgaver i seksjon 9.4

1. Løs $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} dx$.
2. (UiTø) Beregn $\int_2^3 \sqrt{7 - 2x} dx$.
3. (UiO) Beregn $\int_3^8 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$.

4. Finn $\int \sqrt{\frac{x-1}{x}} dx$.
5. Løs $\int e^{\sqrt{2x+1}} dx$.
6. Finn $\int \sin \sqrt[3]{x+1} dx$.
7. (UiO) Løs $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x})^2}$.
8. (UiTø) Finn $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.
9. (UiTø) Finn $\int (\sin 2x)^2 \cos x dx$.
10. Regn ut $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.
11. (UiO) $\int \frac{\sin^3(2x)}{\sqrt{\sin x}} dx$.
12. (UiTø) $\int \sin^3(2x) \cos^8(2x) dx$.
13. $\int \frac{dx}{\cos x}$.
14. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.
15. (UiO) Beregn integralet $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.
16. Løs $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x} dx$.
17. (UiO) Finn $\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$.
18. a) Løs integralet $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x}$ ved å bruke substitusjonen $u = \tan(x/2)$.
- b) Løs integralet ved å bruke formelen $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ for en passende y .
19. a) (UiO) Bruk substitusjonen $t = \tan \theta$ til å finne det ubestemte integralet

$$I = \int \frac{d\theta}{(\sin \theta + \cos \theta)^2}, \quad \theta \in (0, \pi/2).$$

b) Bruk identiteten

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$$

til å finne I uten å substituere $t = \tan \theta$. Kontroller at svarene i a) og b) stemmer overens.

c) Bruk substitusjonen $u = \tan(\theta/2)$ til å finne det bestemte integralet

$$2 \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{u^2 + 1}{(2u + 1 - u^2)^2} du.$$

20. (UiB) Løs $\int \frac{7 \cos x + 4 \sin x}{\cos x + 2 \sin x} dx$ ved å substituere $u = \tan x$.

21. (UiO) Beregn $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$.

22. (UiTø) Beregn $\int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$.

23. (UiO) Finn $\int \sqrt{x^2 + 2x + 3} dx$.

24. Regn ut $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$.

25. (UiO) Løs $\int \frac{t}{\sqrt{2t^2 + 8t + 9}} dt$.

26. Beregn $\int (\sqrt{-x^2 - 4x - 3})^3 dx$.

27. La $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$.

a) Beregn I ved å substituere $u = \sqrt{x}$.

b) Beregn I ved å fullføre kvadratet og foreta en trigonometrisk substitusjon.

c) Vis at svarene i a) og b) er like.

28. Finn lengden av parabelen $y = x^2$ fra $x = 0$ til $x = t$.

29. (UiO) Finn buelengden av kurven $y = \sqrt{x+1}$, $0 \leq x \leq 1$. (Vink: Det lønner seg å bruke y som integrasjonsvariabel.)

30. a) Bruk formlene $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ og $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ til å utlede formlene

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)].$$

b) Vis at for alle $n, m \in \mathbb{N}$ er

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \neq m \\ \pi & \text{hvis } n = m \end{cases}$$

og

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \neq m \\ \pi & \text{hvis } n = m. \end{cases}$$

c) Kan du beregne integralene $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx$ på en tilsvarende måte?

31. I seksjon 9.3 så vi hvordan vi kan bruke en rekursjonsformel til å løse integralene $I_m = \int \frac{1}{(1+u^2)^m} du$ der $m \in \mathbb{N}$. Her skal vi se på en annen metode som kanskje er lettere å huske.

a) Vis at når vi substituerer $u = \tan z$, så blir $I_m = \int \cos^{2m-2} z \, dz$

b) Vis at $\sin^2 z = \frac{\tan^2 z}{1+\tan^2 z}$ og $\cos^2 z = \frac{1}{1+\tan^2 z}$

c) Finn I_2 og I_3 .

32. I denne oppgaven skal vi antyde gjennom eksempler hvordan man kan løse integraler som inneholder uttrykk av typen $\sqrt{d+x^2}$ eller $\sqrt{x^2-d}$ uten å bruke hyperbolske funksjoner:

a) Løs integralet $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx$ ved hjelp av substitusjonen $x = 3 \tan u$.

b) Løs integralet $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} dx$ ved hjelp av substitusjonen $x = \frac{3}{\cos u}$.

33. (UiO) Finn buelengden til grafen til funksjonen $f(x) = \ln(\cos x)$ fra $x = 0$ til $x = \frac{\pi}{6}$.

9.5 Uegentlige integraler

Hittil har vi integrert begrensede funksjoner over begrensede intervaller. I denne seksjonen skal vi utvide integralbegrepet slik at det også omfatter uttrykk som

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

og

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

(I det første tilfellet er integrasjonsintervallet ubegrenset, i det andre funksjonen.) Av en eller annen grunn kalles slike uttrykk ofte for *uegentlige integraler*, men dette navnet må ikke forlede noen til å tro at de er uvesentlige kuriositeter – tvert imot er en rekke sentrale spørsmål i matematikk og fysikk knyttet til konvergens av slike uegentlige integraler.

La oss først se på det tilfellet hvor intervallet er ubegrenset.

9.5.1 Definisjon

La $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon. Dersom integralet $\int_a^b f(x) dx$ nærmer seg en (endelig) grenseverdi L når $b \rightarrow \infty$, skriver vi

$$L = \int_a^{\infty} f(x) dx$$

og sier at integralet $\int_a^{\infty} f(x) dx$ *konvergerer*. Dersom integralet ikke konvergerer, sier vi at det *divergerer*.

Ifølge denne definisjonen er altså

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

(så sant grensen eksisterer). La oss se på et eksempel.

9.5.2 Eksempel

Avgjør om

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

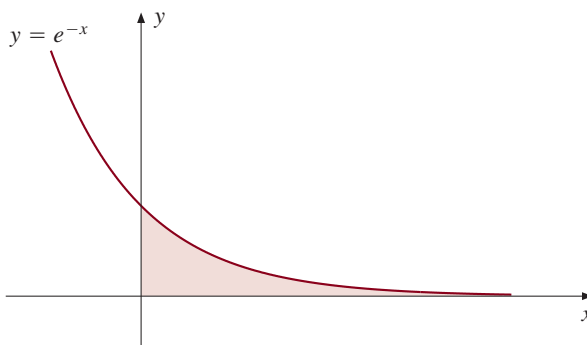
konvergerer, og finn eventuelt verdien.

Vi må beregne $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx$:

$$\int_0^b e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^b = -e^{-b} + 1$$

som går mot 1 når $b \rightarrow \infty$. Altså konvergerer integralet, og

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$



Figur 9.5.1.

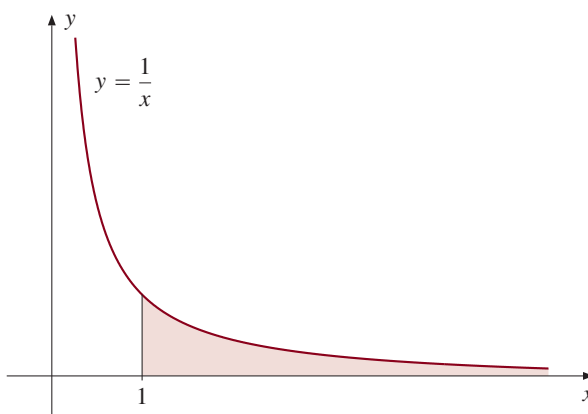
Den geometriske tolkningen av dette resultatet er at det skraverte området i figur 9.5.1 har areal 1. ■

La oss se på et eksempel med divergens også.

9.5.3 Eksempel

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ divergerer fordi

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$



Figur 9.5.2.

Den geometriske tolkningen er at det skraverte området i figur 9.5.2 har uendelig areal. ■

Det siste eksemplet viser at integralet $\int_a^{\infty} f(x) dx$ godt kan divergere selv om $f(x) \rightarrow 0$ når $x \rightarrow \infty$. Konvergens er snarere et spørsmål om hvor fort $f(x)$ går mot null – slik følgende setning illustrerer.

9.5.4 Setning

Integralet

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

konvergerer for $p > 1$ og divergerer for $p \leq 1$.

Bevis: Vi har allerede sett at integralet divergerer for $p = 1$, så vi kan konsentrere oss om $p \neq 1$. Da er

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b = \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Lar vi $b \rightarrow \infty$, divergerer dette uttrykket når eksponenten $1 - p$ er større enn 0, og det konvergerer når $1 - p$ er mindre enn 0. Dette gir divergens for $p < 1$ og konvergens for $p > 1$. ■

Desto større p er, jo raskere går $1/x^p$ mot null når x går mot uendelig. Setningen forteller oss at $p = 1$ er skillet mellom de p -verdiene som gir konvergens og de som gir divergens. Dette enkle resultatet viser seg å være forbausende virkningsfullt, og vi skal komme tilbake til noen av anvendelsene senere.

Det er på tide å gå tilbake til teorien. Integraler på formen $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ defineres selvfølgelig i samsvar med definisjon 9.5.1; vi sier at $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ konvergerer dersom $\lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx$ eksisterer, og i så fall lar vi

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx.$$

Dersom intervallet er ubegrenset i begge retninger, må vi imidlertid være litt forsiktige.

9.5.5 Definisjon

Dersom $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert, sier vi at integralet $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konvergerer hvis begge de to integralene $\int_0^{\infty} f(x) dx$ og $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ konvergerer. I så fall definerer vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Bemerkning

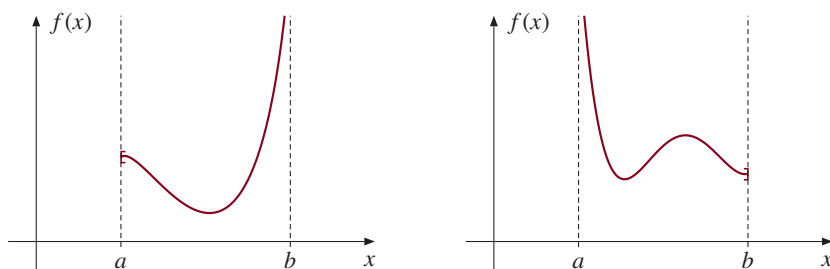
Det er lett å se at vi kan erstatte 0 med et hvilket som helst annet tall a i denne definisjonen. Det er også lett å se at dersom $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konvergerer, så er

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x) dx.$$

Hvorfor bruker vi ikke denne formelen istedenfor definisjon 9.5.5? Hadde det ikke vært enklere å si at integralet $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konvergerer mot verdien L dersom

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x) dx = L? \quad (1)$$

Problemet er at det finnes en del funksjoner som oppfyller (1) nærmest ved en tilfeldighet, til tross for at de ellers ikke er særlig integrerbare. Ta $f(x) = x$ som et eksempel; denne funksjonen tilfredsstiller (1) på grunn av symmetrien om origo, men integralene $\int_0^{\infty} f(x) dx$ og $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ divergerer så det suser. Det viser seg at hvis vi definerer integralet $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ også for slike funksjoner, så kan vi ikke lenger garantere at de vanlige regnereglerne for integraler er oppfylt.



Figur 9.5.3.

Vi går nå over til å se på det tilfellet hvor intervallet er begrenset, men hvor funksjonene er ubegrenset. I første omgang antar vi at funksjonen bare kan gå mot uendelig i ett av de to endepunktene til intervallet – altså at vi har en av situasjonene i figur 9.5.3.

9.5.6 Definisjon

Dersom $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert, sier vi at integralet $\int_a^b f(x) dx$ konvergerer hvis grenseverdien $\lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f(x) dx$ eksisterer. I så fall skriver vi

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f(x) dx.$$

Dersom g er kontinuert på $(a, b]$, definerer vi tilsvarende

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^b g(x) dx$$

forutsatt at denne grensen eksisterer.

9.5.7 Eksempel

Avgjør om integralet $\int_0^1 \ln x dx$ konvergerer.

Siden $\ln x \rightarrow -\infty$ når $x \rightarrow 0^+$, er svaret langt fra opplagt. Vi løser først det ubestemte integralet ved delvis integrasjon ved å sette $u = \ln x$, $v' = 1$:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + C.$$

Videre er

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \ln x dx = \lim_{y \rightarrow 0^+} [1 \cdot \ln 1 - 1 - y \ln y + y] = -1 - \lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln y.$$

Dette er et « $0 \cdot \infty$ »-uttrykk, og vi omformer det slik at vi kan bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln y = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y}{1/y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1/y}{-1/y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} (-y) = 0.$$

Dette betyr at

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \ln x \, dx = -1 - 0 = -1,$$

og følgelig konvergerer integralet (og har verdi -1). ■

Også i dette tilfellet har vi et nyttig resultat om potensfunksjonene.

9.5.8 Setning

Integralet

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$$

konvergerer for $p < 1$ og divergerer for $p \geq 1$.

Bevis: La oss ta $p = 1$ først. Da er

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} [\ln 1 - \ln y] = \infty,$$

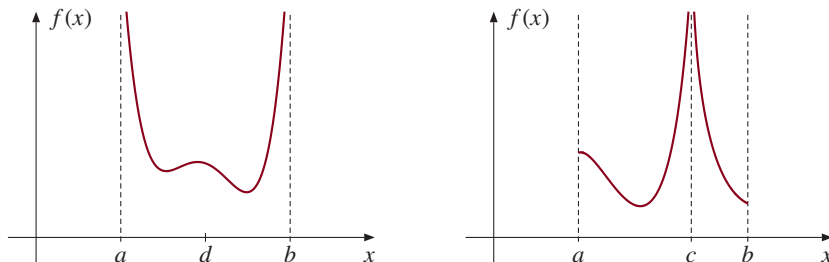
som viser at integralet divergerer. Anta så at $p \neq 1$. Da er

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_y^1 = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{y^{1-p}}{1-p} \right).$$

Dette uttrykket konvergerer når $1 - p > 0$; det vil si når $p < 1$, og det divergerer når $1 - p < 0$; det vil si når $p > 1$. ■

Bemerkning

Observer at bortsett fra tilfellet $p = 1$ (hvor vi får divergens i begge tilfeller), er dette resultatet omvendt av setning 9.5.4.



Figur 9.5.4.

La oss til slutt se på de to tilfellene i figur 9.5.4. Filosofien er den samme som i definisjon 9.5.5; kan det gå galt på to måter, så behandler vi hver måte for seg.

9.5.9 Definisjon

La $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ være kontinuerlig og la $d \in (a, b)$. Vi sier at integralet $\int_a^b f(x) dx$ konvergerer dersom *begge* integralene $\int_a^d f(x) dx$ og $\int_d^b f(x) dx$ konvergerer. I så fall er

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx.$$

Anta at g er definert og kontinuerlig i alle punkter i intervallet $[a, b]$ bortsett fra et indre punkt c . Da konvergerer integralet $\int_a^b f(x) dx$ hvis *begge* de to integralene $\int_a^c f(x) dx$ og $\int_c^b f(x) dx$ konvergerer og i så fall er

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Bemerkning

Legg merke til at definisjonen er uavhengig av hvilket punkt d vi velger i første halvdel.

La oss ta med et skrekkeksempel på hvor galt det kan gå om vi ikke behandler uegentlige integraler på riktig måte.

9.5.10 Eksempel

Ifølge setning 9.5.8 divergerer integralet $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$. La oss late som vi ikke legger merke til hva som skjer i origo, og integrer funksjonen på vanlig måte:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1} \right) = -2.$$

Svaret blir altså negativt til tross for at funksjonen er positiv i hele intervallet! Dette eksemplet viser hvor galt det kan gå om vi ikke behandler uegentlige integraler med forsiktighet. ■

Hittil har vi avgjort om integraler konvergerer ved å regne dem ut. Det hender imidlertid at integranden er så komplisert at dette er upraktisk eller umulig. I mange tilfeller kan vi allikevel løse problemet ved å sammenligne med enklere integraler.

9.5.11 Sammenligningskriteriet La $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være to kontinuerlige, positive funksjoner og anta at $f(x) \geq g(x)$ for alle $x \in [a, \infty)$.

(i) Hvis $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergerer, så gjør $\int_a^\infty g(x) dx$ det også.

(ii) Hvis $\int_a^\infty g(x) dx$ divergerer, så gjør $\int_a^\infty f(x) dx$ det også.

Bevis: (i) Siden g er positiv, er funksjonen $G(y) = \int_a^y g(x) dx$ voksende. Dermed er det bare to muligheter; enten konvergerer $G(y)$ mot en endelig grense når y går mot uendelig, eller så er $\lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = \infty$. Det siste er umulig siden

$$G(y) = \int_a^y g(x) dx \leq \int_a^y f(x) dx \leq \int_a^\infty f(x) dx < \infty,$$

og følgelig konvergerer $G(y) = \int_a^y g(x) dx$ mot en endelig grense.

(ii) Siden $\int_a^\infty g(x) dx$ divergerer og $f(x) \geq g(x)$, har vi

$$\int_a^x f(x) dx \geq \int_a^x g(x) dx \rightarrow \infty,$$

som viser at $\int_a^\infty f(x) dx$ divergerer. ■

9.5.12 Eksempel

a) Avgjør om $\int_2^\infty \frac{dx}{x^4 + 1}$ konvergerer. I prinsippet kan vi løse integralet ved delbrøkk-

oppspalting, men det er mye arbeid. Dersom vi isteden observerer at $\frac{1}{x^4 + 1} < \frac{1}{x^4}$, så følger konvergens umiddelbart fra første del av sammenligningskriteriet siden vi vet at $\int_2^\infty \frac{1}{x^4} dx$ konvergerer (setning 9.5.4).

b) Vis at $\int_2^\infty \frac{x}{x^2 - 1} dx$ divergerer. Vi observerer at for $x \geq 2$ er

$$\frac{x}{x^2 - 1} > \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Siden $\int_2^\infty \frac{1}{x} dx$ divergerer (setning 9.5.4), må også $\int_2^\infty \frac{x}{x^2 - 1} dx$ divergere ifølge andre del av sammenligningskriteriet. ■

Sammenligningskriteriet kan ofte være vanskelig å bruke i praksis fordi det forutsetter at $f(x) \geq g(x)$ for alle x . Vi skal nå vise en variant som er enklere å håndtere.

9.5.13 Grensesammenligningskriteriet La $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være to positive, kontinuerlige funksjoner.

(i) Anta at $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergerer og at $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} < \infty$. Da konvergerer også $\int_a^\infty g(x) dx$.

(ii) Anta at $\int_a^\infty f(x) dx$ divergerer og at $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} > 0$. Da divergerer også $\int_a^\infty g(x) dx$.

Bevis: (i) Observer først at dersom vi kan finne en konstant C slik at $g(x) \leq Cf(x)$ for alle x , så vil $\int_a^\infty g(x) dx$ konvergere fordi

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) dx &\leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b Cf(x) dx = C \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \\ &= C \int_a^\infty f(x) dx < \infty. \end{aligned}$$

For å finne en slik C , observerer vi at funksjonen $h(x) = g(x)/f(x)$ er kontinuerlig på intervallet $[a, \infty)$ og nærmer seg en endelig grense når $x \rightarrow \infty$. Altså er h begrenset (hvorfor?). Det betyr at det finnes en konstant C slik at $h(x) \leq C$ for alle x , og følgelig er $g(x) \leq Cf(x)$.

(ii) Vi observerer først at dersom vi kan finne en positiv konstant ϵ slik at $g(x) \geq \epsilon f(x)$ for alle x , så vil $\int_a^\infty g(x) dx$ divergere fordi

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) dx \geq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \epsilon f(x) dx = \epsilon \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \infty.$$

For å finne en slik ϵ , observerer vi først at funksjonen $k(x) = f(x)/g(x)$ (legg merke til at vi har snudd brøken) er kontinuerlig på $[a, \infty)$ og går mot en endelig grense når $x \rightarrow \infty$. Altså finnes det en konstant K slik at $k(x) \leq K$ for alle x . Dermed er $g(x) \geq (1/K)f(x)$, og følgelig kan vi la $\epsilon = 1/K$. ■

Når vi skal bruke grensesammenligningskriteriet i praksis, vil funksjonen $g(x)$ være gitt, og vår oppgave er å finne en enklere funksjon $f(x)$ å sammenligne den med. Denne funksjonen må være såpass enkel at vi kan avgjøre om $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergerer eller divergerer, men samtidig må den ligne såpass på $g(x)$ at grensebetingelsen $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)/f(x) < \infty$ (eventuelt $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)/f(x) > 0$) er oppfylt.

9.5.14 Eksempel

Avgjør om integralet $\int_1^\infty \frac{3x^2 + 7}{4x^4 + 2x} dx$ konvergerer eller divergerer.

Når x går mot uendelig, er det leddene med de høyeste eksponentene som dominerer. For store x vil derfor funksjonen $g(x) = \frac{3x^2 + 7}{4x^4 + 2x}$ oppføre seg omtrent som $3x^2/4x^4 = 3/4x^2$. Siden konstantene 3 og 4 ikke spiller noen rolle for konvergens, velger vi å sammenligne med $f(x) = 1/x^2$. Fra setning 9.5.4 vet vi at $\int_1^\infty 1/x^2 dx$ konvergerer. Siden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 + 7}{4x^4 + 2x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 7x^2}{4x^4 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 7/x^2}{4 + 2/x^3} = \frac{3}{4} < \infty,$$

følger det at integralet vårt også konvergerer. ■

La oss også se på et mer utfordrende eksempel.

9.5.15 Eksempel

Avgjør om integralet $\int_0^\infty [(\pi/2) - \arctan x] dx$ konvergerer eller divergerer.

På grunn av setning 9.5.4 ville det være fint om vi kunne sammenligne med et integral av typen $\int_1^\infty dx/x^k$, men hvilken k skal vi velge? Det er ingen grunn til å bestemme seg for tidlig, så vi gjennomfører først sammenligningen for en generell k :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\pi/2) - \arctan x}{1/x^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-k \left(\frac{1}{x^{k+1}} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \frac{x^{k+1}}{1+x^2}.$$

Fra dette uttrykket ser vi at det fornuftige valget er $k = 1$ (fordi det gir oss en grenseverdi som hverken er 0 eller ∞). Vi får

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\pi/2) - \arctan x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Siden $\int_1^\infty 1/x dx$ divergerer, så divergerer også $\int_1^\infty [(\pi/2) - \arctan x] dx$ ifølge grensesammenligningskriteriet. Hvilken nedre grense vi bruker spiller ingen rolle (hvorfor?), og følgelig divergerer $\int_0^\infty [(\pi/2) - \arctan x] dx$. ■

Bemerkning

Det finnes sammenligningskriterier og grensesammenligningskriterier også for de andre typene av uegentlige integraler. Du bør formulere disse for deg selv siden de vil være nyttige når du begynner å løse oppgaver.

La oss avslutte med to eksempler som viser hvordan uegentlige integraler ofte dukker opp i fysikk og matematikk.

9.5.16 Eksempel

To elektriske ladninger frastøter hverandre om de har samme fortegn og tiltrekker hverandre om de har motsatt fortegn (se figur 9.5.5).



Figur 9.5.5.

Ifølge *Coulombs lov* er størrelsen på kraften

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

der q_1 og q_2 er ladningene, r er avstanden mellom dem og k er en naturkonstant.

Vi ser først på tilfellet hvor ladningene tiltrekker hverandre. Vi antar at avstanden mellom dem er a og spør hvor stort arbeid vi må utføre for å separere dem. Holder vi den ene partikkelen i ro, må vi altså regne ut det arbeidet vi må utføre for å flyttet den andre partikkelen ut til et «uendelig fjernt punkt» hvor kraften ikke har noen virkning. Ifølge formelen i 8.6.7 er dette arbeidet gitt ved

$$\begin{aligned} A &= \int_a^\infty F(r) dr = \int_a^\infty k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = k q_1 q_2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = k q_1 q_2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \\ &= k q_1 q_2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = k q_1 q_2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{k q_1 q_2}{a}. \end{aligned}$$

I dette tilfellet konvergerer altså integralet, og vi får et endelig arbeid $A = k q_1 q_2 / a$.

Vi går nå over til det tilfellet hvor partiklene frastøter hverandre og spør hvor stort arbeid vi må utføre for å føre dem sammen. Vi får

$$A = \int_0^a F(r) dr = \int_0^a \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = k q_1 q_2 \int_0^a \frac{dr}{r^2}$$

som vi vet divergerer ifølge setning 9.5.8. For å føre dem helt sammen må vi altså utføre et uendelig stort arbeid, og det er umulig. ■

9.5.17 Eksempel

Vi vet at dersom $n \in \mathbb{N}$, så er $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. I tillegg har vi definert $0! = 1$. Men er det mulig å definere $a!$ når a ikke er et naturlig tall?

Vi starter med å se på integralene

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

der $n = 0, 1, 2, \dots$. Observer først at

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-b} + 1] = 1. \end{aligned}$$

For å beregne I_n for høyere n -verdier, lønner det seg å utlede en rekursjonsformel. Ved delvis integrasjon får vi ($u = x^n$, $u' = nx^{n-1}$, $v = -e^{-x}$, $v' = e^{-x}$)

$$\int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Setter vi inn grenser, ser vi at

$$\int_0^b x^n e^{-x} dx = -b^n e^{-b} + n \int_0^b x^{n-1} e^{-x} dx,$$

og lar vi deretter $b \rightarrow \infty$, får vi

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx,$$

det vil si $I_n = nI_{n-1}$. Denne formelen innebærer blant annet at dersom I_{n-1} konvergerer, så vil også I_n gjøre det. Regner vi nå ut I_1, I_2, I_3, \dots , får vi

$$I_1 = 1 \cdot I_0 = 1, \quad I_2 = 2 \cdot I_1 = 2 \cdot 1, \quad I_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad \dots$$

Generelt ser vi at $I_n = n!$, det vil si

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx.$$

Denne formelen gir oss en alternativ måte å definere $n!$ på. Fordelen med denne metoden er at den også fungerer når n ikke er et naturlig tall. Integralet $I_a = \int_0^\infty x^a e^{-x} dx$ konvergerer for alle positive reelle tall a (faktisk konvergerer det for alle $a > -1$, som du lett kan sjekke), og vi kan derfor definere

$$a! = \int_0^\infty x^a e^{-x} dx$$

for alle slike a . Dermed har vi vår utvidelse av faktultetsfunksjonen.

Nå er det ikke vanlig å skrive $a!$ når a ikke er et helt tall. Man innfører heller *gammafunksjon*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

(legg merke til forskyvningen fra a til $s - 1$) og skriver $\Gamma(a + 1)$ istedenfor $a!$. Legg merke til at gammafunksjonen er definert ved hjelp av et uegentlig integral – dette er ikke en uvanlig måte å innføre nye funksjoner på. ■

Oppgaver i seksjon 9.5

1. Beregn verdien til integralet dersom det konvergerer.

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

- c) $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$
- d) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1}$
- e) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$
- f) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$
- g) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2-4}$
- h) $\int_{-\infty}^\infty x^3 dx$
- i) $\int_0^1 x \ln x dx$

2. Beregn verdien til integralet dersom det konvergerer.

- a) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
- b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sinh^2 x}$
- c) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

3. Avgjør om integralene konvergerer eller divergerer.

- a) $\int_0^\infty \frac{x+4}{x^2+2x+1} dx$
- b) $\int_1^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+x^5}} dx$
- c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx$
- d) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx$
- e) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$
- f) $\int_0^1 \frac{dx}{(\arcsin x)^{2/3}}$
- g) $\int_0^{\pi/4} \cot^{3/2} x dx$

$$\text{h) } \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\text{i) } \int_0^{\infty} (e^{1/x} - 1) dx$$

4. a) La A være området under grafen til $f(x) = 1/x$, $1 \leq x < \infty$. Vis at arealet til A er uendelig, men at det volumet vi får om vi dreier A rundt x -aksen, er endelig.

b) La B være området under grafen til $g(x) = 1/\sqrt{x}$, $0 < x \leq 1$. Vis at arealet til B er endelig, men at det volumet vi får om vi dreier B rundt x -aksen, er uendelig.

5. (UiO) For hvilke p konvergerer $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$?

6. (UiO) Avgjør om $\int_0^1 \ln(x^3 + x^2) dx$ konvergerer eller divergerer.

7. (UiO) Bestem $a > 0$ slik at integralet

$$\int_0^{\infty} \cos x e^{-ax} dx$$

får maksimal verdi. Finn denne verdien.

8. (UiO) Finn verdien til det uegentlige integralet $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx$.

9. (UiO) Avgjør om det uegentlige integralet $\int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx$ konvergerer eller divergerer.

10. For hvilke verdier av p konvergerer integralene

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x |\ln x|^p} \quad \text{og} \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x |\ln x|^p}?$$

11. (UiO) Vis at integralet

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arsinh} x}{x^3} dx$$

konvergerer og finn verdien.

12. (UiO) For en bestemt verdi av k konvergerer integralet

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 2k} - \frac{k}{x+1} \right) dx.$$

Finn k og verdien av integralet.

13. (UiO)

a) La $I_n = \int_0^1 x(\ln x)^n dx$. Vis at for alle $n \in \mathbb{N}$ har vi $I_n = -\frac{n}{2} I_{n-1}$

b) Vis ved induksjon at

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$$

14. *Gabriels trompet* er legemet vi får om vi dreier grafen til $f(x) = 1/x$, $1 \leq x < \infty$, om x -aksen.

- a) Vis at Gabriels trompet har endelig volum.
 b) Vis at Gabriels trompet har uendelig overflate. (Bruk formelen

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

som vi utledet i oppgave 33.)

- c) Vi skal male den (uendelige) innsiden av Gabriels trompet. Vi kjøper nok maling til å fylle det endelige volumet, heller malingen opp i trompeten, og tømmer ut det som blir til overs. Dermed har vi malt den uendelige flaten med endelig mye maling. Noen kommentarer?

9.6 Historisk epistel: Magellanske gjennomfarer

Alle Abels arbeider bærer preg av en usedvanlig, ja forbausende, skarpsindighet og tankekraft selv når vi unnlater å ta forfatterens unge alder i betraktning. Han trengte til bunn i stoffet med en kraft som virket uimotstålig, grep det med en slik ekstraordinær energi og fra et standpunkt så høyt hevet over samtidens nivå at vanskelighetene syntes å forsvinne for hans seirende geni.

— August Leopold Crelle
 (1780–1855),
 Minneord over Niels Henrik Abel.

Våren 1821 fikk professor Carl Ferdinand Degen ved universitetet i København et brev fra Christopher Hansteen, professor i anvendt matematikk ved det knapt ti år gamle Kongelige Frederiks Universitet i Christiania. Brevet inneholdt et manuskript av en attenårig gymnasiast som mente han hadde funnet en løsningsformel for den generelle femtegradsligningen. I likhet med sine kolleger i Christiania kunne ikke Degen finne feil ved utledningen, men han var likevel skeptisk og ba forfatteren prøve metoden på noen eksempler. Det viste seg fort at formelen var gal, men Degen var tilstrekkelig imponert av den unge matematikeren til å oppfordre ham til å fortsette sine undersøkelser, men fortrinnsvis med andre temaer:

«Neppe kan jeg ved denne Anledning undertrykke det Ønske, at den Tid og de Aandskræfter som et Hoved, som Hr. A., skjænker en i mine Øine noget steril Gjenstand, maatte ydes et Emne, hvis Uddannelse vil have de vigtigste Følger for hele Analysen og dens Anvendelse paa dynamiske Undersøgelser, jeg mener de *elliptiske Transcendenter*. Ved tilbørligt Anlæg for Undersøgelser af dette Slags vil den alvorlige Gransker ingenlunde blive staaende ved disse ellers i og for seg selv høyst merkværdige

Functioners mange og smukke Egenskaber, men opdage maghellanske Gjennefarer til store Partier af eet og samme uhyre analytiske Ocean.»

Hr. A – bedre kjent som Niels Henrik Abel (1802–1829) – skulle følge Degens råd om å studere elliptiske integraler, men han skulle også ufortrødent fortsette sine studier av algebraiske ligninger. På begge områder kom han til å gjøre gjennombrudd som Degen knapt kunne ha drømt om, og som med full rett kan sammenlignes med Magellans dristige seilas gjennom et trangt strede og ut i det mektige Stillehavet. Fra Abels og Galois' undersøkelser om algebraiske ligninger stammer store deler av den moderne algebraen, og fra Abels og Jacobis studier av elliptiske funksjoner vokste en rik teori som kom til å danne bro mellom algebra, geometri og analyse.

Abel har alltid hatt en spesiell plass i norsk bevissthet, og selv personer som aldri har interessert seg for vitenskap, og som ellers knapt kjenner navnet på en eneste matematiker, har som regel hørt om ham. Denne enestående posisjonen har tre årsaker – en faglig, en personlig og en historisk. Den faglige er uomtvistelig – ingen annen nordmann har gjort så dyptpløyende og banebrytende oppdagelser på en rekke sentrale områder. Den personlige grunnen har mer enn et snev av romantikk i seg – historien om det unge geniet som overvinner all motgang og uforstand, men blir revet bort bare 26 år gammel. Den historiske grunnen er knyttet til tidsepoken Abel levde i. Da han ble født i 1802 var Norge i union med Danmark og styrt av en eneveldig konge i København – da han døde i 1829 var Norge i en ny union med Sverige, men i mellomtiden hadde landet fått en grunnlov, et storting, en nasjonal regjering og sentrale institusjoner som et universitet og en riksbank. Som andre unge nasjoner hadde Norge et behov for å markere sin egenart og fremheve sine fortrinn, og hvem kunne bedre symbolisere nasjonens evner og muligheter enn en ung mann som på egen hånd hadde klatret til vitenskapens høyeste tinder?

Hvem var så denne unge mannen som er blitt en nasjonal myte? Niels Henrik Abel ble født på Finnøy i Rogaland der faren, Søren Georg Abel, var sogneprest. Tre år tidligere var familien kommet flyttende fra Gjerstad i Aust-Agder der Søren Georg hadde vært kapellan under sin far, Hans Mathias Abel. I 1803 dør Hans Mathias, sønnen overtar sogneprestembedet, og familien flytter tilbake til Gjerstad. Også for Abels mor er dette en hjemkomst – hun var født Anne Marie Simonsen og var datter av en velstående kjøpmann og skipsreder i den nærmeste byen, Risør.



Figur 9.6.1. Niels Henrik Abel

Både Abels far og bestefar var sterkt interessert i sine bygdebarns liv og utvikling, men på hver sin måte. Mens Hans Mathias Abel hadde vunnet deres tillit gjennom et langsomt og tålmodig arbeid, var Søren Georg langt mer iderik og tiltaksom, men også oppfarende og rastløs. Til å begynne med kom han godt ut av det med bygdefolket, men etter hvert mistet han mye av sin popularitet. Én av grunnene var kanskje at hans blikk var rettet ut av bygda – han ble innvalgt på Stortinget i 1814 og igjen i 1818 – men en viktigere grunn var nok at hans tiltagende alkoholmisbruk gjorde ham mistroisk og humørsyk. Hans politiske karriere endte i skandale da han i 1818 holdt på å bli stilt for riksrett etter å ha kommet med ubegrunnede beskyldninger mot en statråd fra Stortingets talerstol. Syk og nedbrutt trakk han seg tilbake til Gjerstad der han døde to år senere, bare 48 år gammel.

Niels Henrik var den nest eldste av seks søsken, fem brødre og en søster. Han ble først undervist hjemme av faren, men tretten år gammel dro han sammen med den eldre broren til katedralskolen i Christiania. I begynnelsen gjør han det godt på skolen, men etter hvert blir karakterene dårligere og bare i matematikk holder de seg rimelig bra. I sekstenårsalderen kommer omslaget ved en tilfeldighet – den gamle, tyranniske matematikklæreren får avskjed etter å ha prylt en elev som senere dør, og hans erstatter er den unge og entusiastiske Bernt Michael Holmboe (1795–1850). Det tar ikke lang tid før Holmboe oppdager Abels talent; han låner ham bøker, og i løpet av et par år sluker den unge Niels Henrik alt han kommer over av tidens ledende matematikere. Holmboe er overbegeistret og skriver i skolens protokoll at hvis Abel får leve, vil han bli en stor matematiker (det er en overstrykning i protokollen, og noen vil ha det til at Holmboe først skrev at Abel ville bli «verdens største matematiker», men det er umulig å kontrollere). Matematikkinteressen hjelper imidlertid ikke stort på innsatsen i andre fag, og bortsett fra karakterene i aritmetikk og geometri (som begge er den best mulige «1 med slange»), er det langt mellom lyspunktene på artiumsvitnemålet.

Høsten 1821 ble Abel student ved universitetet. I matematikk var det ingen som lenger hadde noe å lære ham, men på andre områder så fremtiden langt fra lys ut – faren var død året før, den eldste broren var uhelbredelig sinnssyk, og moren var presteenke med fire mindreårige barn og en liten pensjon. Familien hadde nok håpet på arven etter bestefar Simonsen i Risør, men da han døde i 1820, hadde formuen forsvunnet i inflasjonen etter Napoleonskrigene. Hele sitt liv skulle Abel være avhengig av stipender, tilfeldige vikariater og ulike former for privat understøttelse. Mens andre studenter ventet på pengeforsendelser hjemmefra, måtte han dele sine inntekter så godt han kunne med mor og søsken.

Abels første arbeider ble trykt i det nye, norske *Magazin for Naturvidenskap* i 1823. De var ubegripelige for de aller fleste abonnentene, men de styrket hans omdømme i universitetskretser og var medvirkende til at Norges første professor i matematikk, Søren Rasmusen (1768–1850), forærte ham 100 spesidaler så han kunne dra til København og møte danske kolleger. Matematisk ble ikke reisen av så stor betydning, men for Abel personlig var den desto viktigere – på et ball traff han den unge Christine (Crelly) Kemp som han ble så inntatt i at han bød henne opp til vals til tross for at han ikke behersket denne nye motedansen. Heldigvis var ikke hun stort bedre, og lattermilde måtte de forlate dansegulvet sammen. Året etter brakte han henne til Norge, til en guvernantestilling i Son, og kort etter forlovet de seg.

Også matematisk var 1824 et betydningsfullt år for Abel. Til tross for Degens råd hadde han fortsatt arbeidet med algebraiske ligninger, og nå greide han å vise at det var umulig å løse den generelle femtegradsligningen ved hjelp av rotutdraging (se sek-

sjon 3.6). Det var en sensasjonell løsning på et problem matematikerne hadde strevd med i over 350 år, og Abel fikk artikkelen trykt og innbundet for egen regning. Den skulle være hans introduksjon til matematikerne på kontinentet – han hadde nemlig fått et stipend for å dra utenlands i to år.

Sommeren 1825 dro han av sted i følge med fire andre unge og håpefulle vitenskapsmenn – geologene Baltazar Mathias Keilhau, Nicolai Benjamin Møller og Nils Otto Tank samt medisineren og veterinæren Christian Peter Boeck. Abel trivdes best sammen med andre, og istedenfor å konsentrere seg om de store matematiske sentrene i Berlin, Göttingen og Paris som opprinnelig var planen, ble han med kameratene på deres rundreise i Europa. De dro til Berlin, Dresden, Wien, Graz, Praha, Trieste, Venezia, Padua, Bolzano, Innsbruck, Zürich og Basel før Abel omsider satte kursen mot Paris. Det er fra denne tiden vi kjenner Abel best. Mange av hans brev er bevart, og i dem tegner han et levende bilde av seg selv og sine venner.

Med en slik rundreise ble det ikke mange møter med store matematikere før han kom til Paris, men Abel arbeidet utmerket på egen hånd, og i Berlin hadde han gjort et viktig bekjentskap. August Leopold Crelle (1780–1855) var en fremstående bygningsingeniør, men matematikk var hans store lidenskap. Da Abel kom til Berlin, syslet Crelle med tanken på å starte et tidsskrift for matematikk, og han håpet å knytte til seg så mange unge og talentfulle matematikere som mulig. Til tross for Abels språkproblemer skjønnte Crelle raskt at han her sto overfor en usedvanlig begavelse, og han skulle bli en uvurderlig hjelp og støtte gjennom hele Abels karriere. Mange av Abels fremste artikler ble trykt i *Crelles Journal* som tidsskriftet fort ble kalt (egentlig heter det *Journal für die reine und angewandte Mathematik* og eksisterer den dag i dag).

Paris var det store matematiske samlingspunktet på denne tiden, men Abel skulle raskt erfare at det ikke var så lett å komme i kontakt med parisermatematikerne. Han hadde med seg et trumfkort – en avhandling om det som senere har fått navnet Abels addisjonsteorem, og som ofte regnes som hans aller største oppdagelse. Han leverte avhandlingen til vitenskapsakademiet der den skulle vurderes av ledende matematikere som Fourier, Legendre og Cauchy. Men det kom aldri noe svar «fra disse langsomme Mænd» som Abel selv kalte dem i et brev til Holmboe. Avhandlingen var og ble borte, og hovedresultatet ble bare kjent gjennom en forkortet versjon som Abel skrev på dødsleiet. Først i 1841 ble den opprinnelige artikkelen publisert etter stort påtrykk fra Jacobi og andre.

Tiden i Paris var ensom og fattigslig, og Abel var lykkelig da han igjen kunne sette kursen hjemover. Men hjemkomsten bød på nye problemer – reisestipendet var brukt opp, og finansdepartementet nedla veto mot et forslag om å fortsette understøttelsen. Det så virkelig mørkt ut inntil Abel ble utnevnt til vikar for Christopher Hansteen under dennes ekspedisjon til Sibir. For å tilbakebetale sin egen og familiens gjeld måtte han i tillegg gi privatundervisning i matematikk til skoleelever. Ironisk nok skyldtes noe av gjelden et årlig beløp som Søren Georg Abel hadde lovet universitetet da det ble opprettet i 1811, og som enken ikke hadde maktet å betale. Universitetet nektet å slette gjelden, men gikk med på at den skulle tilbakebetales i rater i påvente av at Abel fikk en fast stilling.

De siste årene i Norge ble en rik tid vitenskapelig sett. Det var nå Abel kastet seg over de elliptiske funksjonene i full bredde. Samtidig var en ung, tysk matematiker, Carl Gustav Jacobi (1804–1851), kommet på sporet av de samme ideene. Det ble et opprivende kappløp som først ble avsluttet med Abels død.

Crelly Kemp hadde vendt tilbake til Danmark mens Niels Henrik var i utlandet, men sommeren 1827 kom også hun tilbake til Norge. Hun hadde fått en stilling på Froland Verk utenfor Arendal. Det var ingen tilfeldighet; eieren, Sivert Nicolai Smith, var en gammel venn av Abels far. Julen 1828 kom Abel på besøk til Froland. Etter nyttår fikk han kraftige blodstørninger. Han hadde tuberkulose og ble fort svakere. Den 6. april døde han på Froland. To dager senere skrev Crelle et gledesstrålende brev fra Berlin – han hadde omsider skaffet Abel et professorat ved universitetet der.

Niels Henrik Abel ble gravlagt på Froland Verk. Crelly Kemp giftet seg noen år senere med hans gode venn og reisekamerat, Baltazar Mathias Keilhau. I 1839 utkom Abels samlede verker redigert av hans tidligere lærer Bernt Michael Holmboe.

I sitt korte liv ga Abel vesentlige bidrag til tre sentrale deler av matematikken – algebraiske ligninger, elliptiske funksjoner og uendelige rekker. Det siste temaet skal vi behandle i kapittel 12, så vi konsentrerer oss om de to første her.

Det Abel er aller mest kjent for blant det brede publikum, er hans bevis for at den generelle femtegradsligningen ikke er løsbart ved rotutdraging. Det kan virke forbløffende at det i det hele tatt går an å bevise noe slikt – hvordan kan man være sikker på at det ikke ved en tilfeldighet finnes et eller annet utrolig innviklet rotuttrykk som gir løsningene? I prinsippet er ikke svaret så komplisert – alt man behøver å finne er en egenskap ved løsningene som ingen rotuttrykk kan ha. Men å oppdage en slik egenskap i praksis krever stor innsikt og skarpsindighet.

Selv om den generelle femtegradsligningen ikke er løsbart ved rotutdraging, finnes det *spesielle* ligninger av femte og høyere grad som kan løses på denne måten. Abel satte seg fore å finne alle disse ligningene. Nyere undersøkelser av hans etterlatte papirer (se [5] og [6]) viser at han sannsynligvis hadde løst dette problemet i all hovedsak, men at han aldri rakk å finpusse detaljene og publisere resultatene. Isteden gikk æren til en annen bråmoden begavelse, franskmannen Evariste Galois. Hans liv og karriere er enda kortere og mer fargerikt enn Abels.

Evariste Galois (1811–1832) var født i Bourg-la-Reine ikke langt fra Paris. Faren ble valgt til borgermester under Napoleons korte tilbakekomst i 1815 («de hundre dagene»), og til tross for hans radikale overbevisning var det ingen som fikk summet seg til å avsette ham da Bourbon-familien igjen overtok makten. Unge Evariste ble undervist av moren til han var tolv år gammel. Han overtok foreldrenes radikale holdninger, og som gymnasiast tok han med glød del i kampen mot Karl X's reaksjonære omlegninger.



Figur 9.6.2. Evariste Galois

Som med Abel var det en entusiastisk lærer som vekket Galois' interesse for matematikk. I femtenårsalderen begynte han å lese Legendres og Lagranges lærebøker og sytten år gammel fikk han publisert en avhandling om kjedebrøk. Han forsøkte å bli opptatt ved École Polytechnique uten å gjennomgå de vanlige forberedelseskursene, men strøk. Våren 1829 leverte han sin første avhandling om algebraiske ligninger til vitenskapsakademiet.

Så kom tragedien. I juli ble Galois' far uforskyldt innblandet i en skandale. Politiske motstandere sirkulerte ondsinnede vers i hans navn, og selv om det snart ble klart at han var uskyldig, orket ikke borgermester Galois beskyldningene og begikk selvmord. Noen dager senere gikk hans sønn opp til annen og siste opptaksprøve ved École Polytechnique – og strøk igjen.

Galois hadde både faglige og politiske grunner for å ønske seg til École Polytechnique; faglig var skolen en utklekkingsanstalt for vitenskapsmenn, og politisk var den et sentrum for den radikale studentbevegelsen. Galois måtte nøye seg med å studere ved École Normale isteden, men politisk knyttet han seg til studentene ved École Polytechnique.

I januar 1830 skulle Cauchy legge Galois' avhandling om algebraiske ligninger frem for vitenskapsakademiet sammen med et av sine egne arbeider. Han ble syk, og da han fikk ordet på neste møte, snakket han bare om sine egne resultater. Vi vet ikke hva som har skjedd, men muligens har Cauchy overtalt Galois til å omarbeide og utvide sitt arbeid slik at det kunne innleveres til akademiets store priskonkurranse. Galois leverer i hvert fall inn en avhandling om algebraiske ligninger før tidsfristen 1. mars.

Nå begynner ulykkene også på det matematiske området. I april dør Fourier som er akademiets faste sekretær, og etter julirevolusjonen rømmer Cauchy fra landet. Galois' manuskript er sporløst forsvunnet. I januar 1831 må han levere inn en tredje versjon av avhandlingen til vitenskapsakademiet. Samtidig er revolusjonen blitt en politisk skuffelse for ham – makten går til borgerskapets kandidat, Ludvig Filip, og de radikale republikanerne vinner ikke frem. I denne tiden er Galois mer opptatt av politikk enn av matematikk, og han engasjerer seg voldsomt for de radikales sak. Under en middag i mai 1831 spretter han opp på bordet, stikker en kniv i været og skriker «For Ludvig Filip...». Resten av setningen drukner i tumultene. Noen av de tilstedeværende slutter

opp om trusselen, andre forsøker å komme seg unna. Forfatteren Alexandre Dumas (kjent for *De tre musketerer* og andre romaner i samme sjanger) stuper ut av vinduet for å unngå å bli kompromittert. Galois blir arrestert, anklaget for å ha truet kongens liv. I retten påstår han at det han egentlig sa, var: «For Ludvig Filip hvis han sviker». Han blir frikjent.

Friheten skulle ikke vare lenge. Den 14. juli, på årsdagen for stormen på Bastillen, blir Galois arrestert for annen gang – kledd i artillerigardens uniform og væpnet til tennene. Artillerigarden var blitt oppløst flere måneder tidligere på grunn av sine republikanske sympatier, og myndighetene trengte ikke være særlig fantasifulle for å forestille seg hvorfor bevæpnede menn virret rundt i gardens uniform på en republikansk festdag. Galois blir dømt til seks måneders fengsel.

Noen dager før arrestasjonen ble Galois' tredje avhandling avvist av akademiet. Referenten, den kjente matematikeren Simeon Denis Poisson (1781–1840), var ikke udelt negativ, men han fant avhandlingen ubegripelig i sin knappe form og ba om utfyllende opplysninger. Galois blir rasende, og hans hat mot myndighetene og forakt for akademiet antar etter hvert former som nærmet seg forfølgelsesvanvidd.

Galois blir sittende i fengsel til mars 1832. Det er uklart hva som nå skjer, men sannsynligvis har han forelsket seg i en ung jente på pensjonatet der han bor. På en eller annen måte utvikler kjærlighetshistorien seg til en krangel med flere involverte, og i grålysningen den 30. mai møtes Galois og Pescheux d'Herbinville i en pistoulduell. Galois blir skutt gjennom magen og dør neste dag. Han er ennå ikke fylt 21 år.

Det er mange teorier om Galois' død. Noen har hevdet at både kjærlighetshistorien og duellen var arrangert av det hemmelige politiet for å rydde en brysom motstander av veien, men det finnes ingen bevis for dette. Tvert i mot er det all mulig grunn til å tro at d'Herbinville var en like ivrig republikaner som Galois, og at kvinnen i historien rett og slett var datter av legen som hadde tilsynet med Galois på pensjonatet der han bodde (han var fortsatt offisielt fengslet, men var blitt flyttet til pensjonatet for å slippe unna en koleraepidemi). Riktignok omtaler Galois henne som en «beryktet kokotte» i et av sine siste brev, men hans ordbruk i denne perioden er voldsom, og uttrykket kan like godt være et mål på hans egen sjalusi som på hennes oppførsel.

Galois skrev som en gal hele den siste natten før duellen. Noe var avskjedsbrev til venner, men det viktigste var skriv som skulle sikre hans vitenskapelige resultater for ettertiden. Han skriblet utfyllende kommentarer i margen til manuskriptet som Poisson hadde returnert, og han ba sine venner sende kopier til verdens ledende matematikere. De fulgte hans anvisninger, men først i 1846 publiserte Joseph Liouville (1809–1882) Galois' avhandling i sitt tidsskrift *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*.

Hva var det Galois oppdaget? Tilsynelatende løste han det problemet som Abel ikke rakk – å beskrive de algebraiske ligningene som kan løses ved rotutdraging. Viktigere enn selve resultatet var imidlertid metodene Galois brukte. Han knyttet løsbare ligninger til det som i dag kalles *Galois-gruppen* – samlingen av alle ombytter av røttene som bevarer visse andre størrelser. Ligningen er løsbare ved rotutdraging hvis og bare hvis Galois-gruppen kan spaltes i enklere grupper på en spesiell måte. Med Galois' arbeider tar algebraen et avgjørende skritt bort fra fikse og kompliserte regninger og over mot en dyptgående begrepsanalyse. Gruppebegrepet har siden frigjort seg fra ligningsteorien og blitt et av de sentrale begrepene i moderne matematikk.

En av de første som foreleste om Galois' teori var den norske matematikeren Ludvig Sylow (1832–1918) i Christiania i 1862. Sylow ytet selv betydelige bidrag til gruppeteorien, og blant hans tilhørere var den unge Sophus Lie (1842–1899) som

noen år senere skulle vise at gruppeteorien med enda større kraft kunne anvendes på en annen type ligninger – differensialligningene (se seksjon 10.9).

For Galois var Abel det store forbildet, og han arbeidet også med Abels andre store interesse – de elliptiske funksjonene. For å forstå dette temaet må vi gå tilbake til tiden etter at Newton og Leibniz hadde oppdaget analysens fundamentalteorem. Utviklingen av nye integrasjonsteknikker gikk raskt, og allerede Newton kjente de knepene vi har sett på i dette kapitlet. Det var imidlertid visse integraler som ikke lot seg løse uansett hvor mye man prøvde, blant annet integraler som inneholdt kvadratrøtter av tredje- og fjerdegradspolynomer. Fordi lengden av en ellipsebue er gitt av et slikt integral, kalles de gjerne *elliptiske integraler*.

Selv om man ikke klarte å løse de elliptiske integralene (vi vet i dag at det er umulig), oppdaget man snart fascinerende sammenhenger mellom dem. I 1718 viste for eksempel den italienske matematikeren Giulio Carlo Fagnano (1682–1766) formelen

$$2 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

I 1751 generaliserte Euler denne formelen til

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Definerer vi $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$, ser vi at Eulers formel kan skrives som

$$F(x) + F(y) = F\left(\frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}\right).$$

En slik formel kalles en *addisjonsformel* for funksjonen F . På 1700-tallet ble det nedlagt et stort arbeid med å finne og klassifisere slike addisjonsformler for elliptiske integraler, men emnet forble likevel ganske mystisk og uavklart.

Det store omslaget kom med Abel. For å forklare Abels grunnleggende idé, må vi forenkle problemstillingen. Også for integraler som inneholder kvadratrøtter av annengradspolynomer, har vi addisjonsteoremer. Et typisk eksempel er

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{1+x^2y^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

som egentlig ikke sier noe annet enn at

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(\frac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{1+x^2y^2}\right).$$

(Husk at $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.) Denne formelen ser kanskje også litt mystisk ut, men setter vi $x = \sin u$, $y = \sin v$ og regner litt, oppdager vi at den ikke er noe annet enn en forkledd utgave av vår gamle venn

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v.$$

Addisjonsformelen blir altså atskillig enklere om vi istedenfor å arbeide med funksjonen

$$f(x) = \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

går over til den omvendte funksjonen $f^{-1}(x) = \sin x$.

Abels idé var at man skulle behandle elliptiske integraler på samme måte. Istedenfor å studere (for eksempel) funksjonen

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

skulle man arbeide med den inverse funksjonen F^{-1} . Resultatet av denne omvendingen var en revolusjon – nye og uventede sammenhenger sprang frem i dagen, og resultater som tidligere hadde vært mystiske og uforklarlige, falt plutselig inn i et generelt mønster. Addisjonsteoremet som Abel viste i den bortkomne pariseravhandlingen, er en enorm generalisering av addisjonsteoremene ovenfor (det går også langt utover de elliptiske funksjonene, men det skal vi ikke bry oss om her). Utover 1800-tallet ble Abels ideer videreført av matematikere som Riemann og Weierstrass inntil de fikk en grunnleggende geometrisk forklaring. Sammenhengen mellom elliptiske funksjoner og algebraiske ligninger (som Abel delvis var klar over), ble studert av Galois og Charles Hermite (1822–1901).

Abel var ikke alene om omvendingsideen. Allerede på slutten av 1790-tallet hadde Gauss utviklet mye av teorien for elliptiske funksjoner, men han publiserte ikke resultatene. Da Abel begynte å publisere sine systematiske undersøkelser i 1827, oppdaget han til sin forskrekkelse at den tyske matematikeren Carl Gustav Jacobi annonserte beslektede resultater. Da Jacobi noe senere publiserte bevisene, brukte han omvendingsideen uten å referere til Abel (han skal senere ha innrømmet at han ikke hadde bevisene da han annonserte resultatene, og at Abels avhandling hjalp ham å finne dem). For å sikre sin prioritet, skyndte Abel seg å publisere en ny avhandling som han refererte til som sin «Dødelse af Jacobi». Nå var ikke Jacobi så lett å døde, og avhandlingen ble isteden starten på en rivende utvikling der både Jacobi og Abel stadig fant nye, dype sammenhenger. Dessverre døde Abel før han kunne gi en fullstendig sammenfatning av sin teori, men i 1829 utkom Jacobis hovedverk *Fundamenta nova*.

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) var født i Potsdam av velstående, jødiske foreldre. Som Abel og Galois ble også Jacobi først undervist hjemme, men i motssetning til dem briljerte han i alle fag i skolen. Han studerte ved universitetet i Berlin, og fikk i 1826 en stilling ved universitetet i Königsberg (byen heter idag Kaliningrad og ligger i den lille tappen av Russland som presser seg inn mellom Polen og Litauen). Jacobi hadde en skarp tunge og kunne være både arrogant og sarkastisk, men han var en fremragende lærer som gjerne underviste ekstra for ivrige studenter. Jacobis voldsomme foretaksomhet som forsker og lærer straffet seg imidlertid til slutt. I 1843 fikk han et kraftig sammenbrudd og måtte dra et år til Italia for å komme til hektene. Han fikk tillatelse til å flytte til Berlin der klimaet var mildere enn i Königsberg, men han fikk ingen stilling ved universitetet og måtte nøye seg med å være medlem av vitenskapsakademiet.

Jacobi og hans kone kom begge fra velstående familier, men de mistet etter hvert sine formuer i de vanskelige tidene. Det var dyrt å leve i Berlin med en stor familie (de hadde til slutt åtte barn), og da Jacobi engasjerte seg på den radikale siden etter februarrevolusjonen i 1848, mistet han den ekstra understøttelsen han hadde hatt. Han

måtte flytte familien til et billigere sted mens han selv bodde på pensjonat i Berlin. Represaliene ble fjernet da Jacobi fikk et gunstig tilbud fra akademiet i Wien i 1850, men han døde kort tid etter (visstnok av kopper).

Jacobi er en av de store formelle begavelsene i matematikken. Han hadde et eget øye for overraskende og betagende formler, og på mange måter er han den nærmeste etterfølgeren til den største av alle regnemestere – Euler. Jacobi arbeidet med nesten alle deler av matematikken, og i tillegg til de elliptiske funksjonene huskes han spesielt for sine bidrag til differensialligninger, mekanikk, variasjonsregning, tallteori og algebra.

Vil du vite mer om Abel, er Arild Stubhaugs biografi [17] absolutt å anbefale. Også de eldre biografiene av Ore [11] og Bjerknæs [4] er verd å lese. Ønsker du å vite mer om Abels matematikk, gir Peter Pesics bok [12] en innføring i hans (og tidligere matematikeres) arbeider om ligningsteori. Kortere populærvitenskapelige fremstillinger finner du i Birkelands hefte [3] og Auberts artikkel [2], mens Skau [15] gir en faglig fremstilling. Boken til Reed og Aarnes [13] inneholder en moderne innføring i Abels og Galois' teori om algebraiske ligninger (dette er fortsatt vanskelig stoff selv om det ikke krever spesielle forkunnskaper). Abels addisjonsteorem er vanskeligere å forklare, men Aubert [2] gjør et godt forsøk. Størmers artikkel [18] er en oversikt over hele Abels produksjon skrevet for studenter (men studenter med en litt annen bakgrunn enn dagens!), og du finner også mye stoff om Abel i Holmes bok [7]. I forbindelse med hundreårsjubileet for Abels fødsel ble det utgitt et festskrift [8] som blant annet inneholder Abels brev. De er absolutt verd å lese – selv om de ofte er skriblet ned i en fart, er de ualminnelig morsomme og viser at Abel hadde et like våkent øye for mennesker som for matematikk. Også i anledning tohundreårsdagen for Abels fødsel ble det utgitt et bokverk [10]; dette gir en omfattende oversikt over Abels stilling i dagens matematikk, men de fleste artiklene er svært krevende å lese.

Også om Galois finnes det mye litteratur, men ikke alt er til å stole på. Beskrivelsen ovenfor er basert på Rothmans artikkel [14] som kanskje er det beste stedet å begynne. Som nevnt tidligere, finnes det sammenligninger av Abels og Galois' bidrag til ligningsteorien i [5] og [6] (og en sammenligning med Abels forløper Ruffini i [15]). Van der Waerdens bok [19] gir en systematisk innføring i algebraens utvikling, men er ikke så lett å lese uten forkunnskaper. En enklere og mer kortfattet fremstilling finner du hos Katz [9]. Stillwell [16] har kapitler både om elliptiske funksjoner og om gruppeteori.

Litteratur

- [1] Aubert, Karl Egil: «Niels Henrik Abel», i Hag, Per og Ben Johnsen (red.): *Fra matematikkens spennende verden*, Tapir, Trondheim, 1993 (finnes også i *NORMAT* 27 (1979), 147–158).
- [2] Aubert, Karl Egil: «Abels addisjonsteorem», *NORMAT* 27 (1979), 147–158.
- [3] Birkeland, Bent: *Norske matematikere*. Temahefte i matematikk 5, Gyldendal, Oslo, 1993.
- [4] Bjerknæs, Carl Anton: *Niels Henrik Abel. En skildring av hans liv og arbeid* (revidert utgave ved V. Bjerknæs), H. Aschehougs forlag, Oslo, 1929.
- [5] Gårding, Lars: «Abel och lösbara ekvationer av primtalsgrad», *NORMAT* 40 (1992), 1–13.

- [6] Gårding, Lars og Christian Skau: «Niels Henrik Abel and Solvable Equations», *Archive for History of Exact Sciences*, 48 (1994), 81–103.
- [7] Holme, Audun: *Matematikkens historie 2: Fra de arabiske vise til Niels Henrik Abel*, Fagbokforlaget, Bergen, 2004.
- [8] Holst, Elling, Carl Størmer og Ludvig Sylow: *Festskrift ved hundreaarsjubilæet for Niels Henrik Abels fødsel*, Kristiania, 1902.
- [9] Katz, Victor J.: *A History of Mathematics*, HarperCollins, New York, 1993.
- [10] Laudal, Olav Arnfinn og Ragni Piene: *The Legacy of Niels Henrik Abel*, Springer, Berlin, 2004.
- [11] Ore, Øystein: *Niels Henrik Abel*, Gyldendal, Oslo, 1954.
- [12] Pesic, Peter: *Abels bevis*, Athene Forlag, Oslo, 2005.
- [13] Reed, Jon og Johan Aarnes: *Matematikk i vår tid*, Universitetsforlaget, Oslo, 1967.
- [14] Rothman, Tony: «Genius and Biographers: The Fictionalization of Evariste Galois», *American Mathematical Monthly*, 89 (1982), 84–106.
- [15] Skau, Christian: «Gjensyn med Abels og Ruffinis bevis for umuligheten av å løse den generelle n 'tegradsligningen algebraisk når $n \geq 5$ », *NORMAT*, 38 (1990), 53–84.
- [16] Stillwell, John: *Mathematics and its History*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [17] Stubhaug, Arild: *Et foranskutt lyn*, Aschehoug, Oslo, 1996.
- [18] Størmer, Carl: «Abels opdagelser», *Norsk Matematisk Tidsskrift*, 11 (1929), 85–96 og 125–138.
- [19] Waerden, B.L. van der: *A History of Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1985.

10 Differensialligninger

Teorien om differensialligninger er den viktigste disiplinen i den moderne matematikken.
— Sophus Lie (1842–1899),
Leipziger Berichte, 1895

I en vanlig ligning er den ukjente et tall x . I en annengradsligning som

$$x^2 - x - 6 = 0$$

er vi på jakt etter de tallene x som passer i ligningen. For å undersøke om 3 er en løsning, setter vi inn $x = 3$ på venstre side:

$$3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0.$$

Dette viser at 3 er en løsning. Setter vi isteden inn 7, får vi

$$7^2 - 7 - 6 = 49 - 7 - 6 = 36$$

som viser at 7 *ikke* er en løsning.

I de ligningene vi nå skal se på, er den ukjente ikke et tall x , men en funksjon y . Istedenfor å gi en sammenheng mellom ulike potenser av det ukjente tallet x , gir disse ligningene en sammenheng mellom den ukjente funksjonen y og noen av dens deriverte. I ligningen

$$y'' - y' - 6y = 0$$

er vi for eksempel på jakt etter en funksjon y som innsatt på venstre side alltid gir null til svar. La oss prøve $y = e^{-2x}$. Siden

$$y' = -2e^{-2x} \quad \text{og} \quad y'' = 4e^{-2x}$$

ser vi at

$$y'' - y' - 6y = 4e^{-2x} + 2e^{-2x} - 6e^{-2x} = 0$$

akkurat som vi ønsket. Dette viser at $y = e^{-2x}$ er en løsning av ligningen. Prøver vi isteden $y = e^{7x}$, får vi

$$y' = 7e^{7x} \quad \text{og} \quad y'' = 49e^{7x}$$

og dermed

$$y'' - y' - 6y = 49e^{7x} - 7e^{7x} - 6e^{7x} = 36e^{7x}$$

som slett ikke er lik null. Funksjonen $y = e^{7x}$ er altså *ikke* en løsning av ligningen vår. (Men det finnes andre løsninger enn $y = e^{-2x}$, prøv for eksempel $y = e^{3x}$.)

Ligninger som på denne måten binder sammen y og noen av dens deriverte, kalles *differensialligninger*. De er temaet for dette kapitlet.

Hvorfor er matematikere interessert i differensialligninger? Er det bare fordi de er trette av vanlige ligninger og trenger noe mer utfordrende å bryne seg på? På ingen måte – differensialligninger er kanskje det viktigste matematiske hjelpemidlet i andre fag. Alle de fundamentale lovene i fysikken kan for eksempel formuleres ved hjelp av differensialligninger. I dette kapitlet kan vi bare dekke et lite hjørne av det enorme fagområdet som differensialligninger utgjør, men vi skal likevel få anledning til å studere en rekke anvendelser.

10.1 Førsteordens, lineære differensialligninger

I en *førsteordens, lineær differensialligning*

$$y' + f(x)y = g(x) \quad (1)$$

er f og g kjente funksjoner, og vi er på jakt etter de ukjente funksjonene $y = y(x)$ som passer i ligningen. La oss definere helt presist hva dette betyr:

10.1.1 Definisjon

Anta at I er et åpent intervall (muligens hele \mathbb{R}), og at f og g er funksjoner definert på I . Da er funksjonen y en *løsning av differensialligningen (1) på I* dersom y er definert og deriverbar på hele I og

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

for alle $x \in I$.

Legg merke til at vi krever at differensialligningen skal være oppfylt i *alle* punkter i I .

10.1.2 Eksempel

Vis at

$$y = e^{-x^2} + \frac{1}{2}$$

er en løsning av differensialligningen

$$y' + 2xy = x$$

på hele \mathbb{R} .

Vi ser at funksjonen er definert og deriverbar på hele \mathbb{R} . Deriverer vi, får vi

$$y' = -2xe^{-x^2}.$$

Setter vi dette inn på venstre side av ligningen, ser vi at

$$y' + 2xy = -2xe^{-x^2} + 2x\left(e^{-x^2} + \frac{1}{2}\right) = x.$$

Altså er y en løsning av ligningen. ■

Dette eksemplet burde være enkelt å forstå, men man kan jo lure på hvor funksjonen

$$y = e^{-x^2} + \frac{1}{2}$$

kommer fra. Sagt på en annen måte: Finnes det en metode for å finne frem til løsningene til en førsteordens, lineær differensialligning?

Det finnes faktisk flere, men vi skal holde oss til følgende: Anta at y er en løsning av ligningen

$$y' + f(x)y = g(x)$$

der f og g er kontinuerlige funksjoner. Vi skal finne ut hvordan y ser ut. La F være en antiderivert til f (analysens fundamentalteorem forteller oss at en antiderivert finnes), og multipliser ligningen med $e^{F(x)}$. Vi får

$$e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = e^{F(x)}g(x).$$

Ved første øyekast ser dette verre ut enn den opprinnelige ligningen, men ved nøyere ettersyn ser vi at venstresiden av ligningen er lik $(e^{F(x)}y)'$ (bruk produktregelen og kjerneregelen). Altså er

$$(e^{F(x)}y)' = e^{F(x)}g(x).$$

Dette betyr at $e^{F(x)}y$ er en antiderivert til $e^{F(x)}g(x)$, det vil si at

$$e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x) dx + C$$

der C er en integrasjonskonstant. (Egentlig er det unødvendig å ta med integrasjonskonstanten siden den inngår i det ubestemte integralet, men konsekvensene av å glemme C er så ubehagelige at vi velger å skrive den opp likevel.) Deler vi med $e^{F(x)}$, får vi

$$y = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)}g(x) dx + C \right).$$

Vi har dermed vist at enhver løsning av differensialligningen er på formen

$$y = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)}g(x) dx + C \right)$$

der C er en konstant. Omvendt er det lett å se at enhver funksjon på denne formen er en løsning. Ligningen har altså uendelig mange løsninger – én for hvert valg av konstanten C . Vi oppsummerer:

10.1.3 Setning

Anta at funksjonene f og g er kontinuerlige på et åpent intervall I , og la F være en vilkårlig antiderivert til f på I . Da er løsningene av differensialligningen

$$y' + f(x)y = g(x)$$

på I gitt ved

$$y = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)}g(x) dx + C \right).$$

I utledningen ovenfor kalles $e^{F(x)}$ en *integrerende faktor* siden det er den som tillater oss å løse ligningen ved integrasjon.

La oss nå gå tilbake til differensialligningen i eksempel 10.1.2 og se om vi kan finne alle løsningene.

10.1.4 Eksempel

Finn alle løsningene av

$$y' + 2xy = x.$$

Det er to måter å gå frem på – vi kan enten sette inn i formelen i setningen, eller vi kan følge prosedyren i utledningen. Vi velger den siste fremgangsmåten.

I vårt tilfelle er $f(x) = 2x$ og $g(x) = x$. Siden $F(x) = x^2$ er en antiderivert av $f(x) = 2x$, multipliserer vi på begge sider av ligningen med den integrerende faktoren $e^{F(x)} = e^{x^2}$:

$$e^{x^2}y' + e^{x^2}2xy = e^{x^2}x.$$

Her gjenkjenner vi venstresiden som $(e^{x^2}y)'$, så

$$(e^{x^2}y)' = e^{x^2}x.$$

Dette gir

$$e^{x^2}y = \int e^{x^2}x dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

der vi har brukt substitusjonen $u = x^2$ for å løse integralet. Deler vi med e^{x^2} , får vi svaret

$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

Løsningen i eksempel 10.1.2 får vi ved å velge konstanten C lik 1, men et hvilket som helst annet valg av C gir også en løsning. Vi ser nå hvorfor det er så viktig å huske på integrasjonskonstanten C ; hadde vi glemt den i regningene ovenfor, ville vi ha mistet den interessante delen av løsningen! ■

La oss forsøke et eksempel til:

10.1.5 Eksempel

Løs

$$y' + \frac{1}{x}y = \sin x$$

på intervallet $(0, \infty)$.

I dette tilfellet er $f(x) = 1/x$ og $g(x) = \sin x$ som begge er kontinuerlige på $(0, \infty)$. Vi ser at $F(x) = \ln x$ er en antiderivert til $f(x)$, så $e^{F(x)} = e^{\ln x} = x$ er en integrerende faktor. Ganger vi den inn i ligningen, får vi

$$xy' + y = x \sin x.$$

Vi gjenkjenner venstresiden som $(xy)'$, og får dermed

$$(xy)' = x \sin x.$$

Integrerer vi, ser vi at

$$xy = \int x \sin x \, dx + C.$$

For å løse dette integralet trenger vi en liten mellomregning. Bruker vi delvis integrasjon med $u = x$ og $v' = \sin x$, får vi $u' = 1$ og $v = -\cos x$. Altså er

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Innsatt i uttrykket ovenfor gir dette

$$xy = -x \cos x + \sin x + C.$$

Altså er løsningen

$$y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}.$$



Oppgaver i seksjon 10.1

1. Avgjør om funksjonen er en løsning av differensialligningen.

- a) $y(x) = e^{2x}$, $y' - 2y = 0$
- b) $y(x) = x^2 + 1$, $xy' - 2y = -2$
- c) $y(x) = \sin x$, $y' + 3y = e^x$
- d) $y(x) = \cos x$, $y'' + y = 0$
- e) $y(x) = e^{x^2}$, $y' - 2xy = 0$
- f) $y(x) = \arctan x$, $y' + xy = x^3$

2. Avgjør om funksjonen er en løsning av differensialligningen.

- a) $y = \sin x$, $(y')^2 + y^2 = 1$
- b) $y = x^3$, $y' + 4xy^2 = 7x$
- c) $y = e^{2x} - 2e^{-3x}$, $y'' + y' - 6y = 0$
- d) $y = e^x \cos 3x$, $y'' - 2y' + 10 = 0$
- e) $y = \sqrt{x}$, $y'y = \frac{1}{2}$

3. Finn alle løsningene til differensialligningene:

- a) $y' - \frac{2}{x}y = x^2$ på intervallet $(0, \infty)$
- b) $y' - 2xy = e^{x^2}$
- c) $y' + 2y = 5$

d) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\arctan x}{x^2}$ på intervallet $(0, \infty)$

e) $y' + \sin x \cdot y = \sin x$

f) $y' - \tan x \cdot y = x$ på intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

g) $\sin^2 x \cdot y' - y = 1$ på intervallet $(0, \pi)$.

4. (UiB) Løs differensialligningen $y' + 2y = xe^x$.

5. (NTNU) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2}, \quad x > 0.$$

6. (UiB) Løs differensialligningen

$$(x^2 - x)y' + y = x^2 - 1, \quad x > 1.$$

7. (UiB) Løs differensialligningen

$$(x + 1)y' + y - 1 = 0, \quad x > -1.$$

8. (UiO) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$x^2y' + 2xy = \sin x$$

når $x \neq 0$, og avgjør om det finnes noen løsning som er definert for alle x .

9. a) (UiO) Løs integralet

$$\int \frac{2x - 2}{(x + 1)(x^2 + 2x + 5)} dx.$$

b) Finn alle løsninger til differensialligningen

$$y' + \frac{2}{x^2 - 1}y = \frac{2}{x^2 + 2x + 5}, \quad x > 1.$$

10. (NTNU) Løs differensialligningen

$$y' + \frac{2}{x(1 + x^2)}y = 1, \quad x > 0.$$

11. a) (UiO) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{1 + x + x^2}, \quad x > 0.$$

b) Finn en løsning av differensialligningen slik at $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ eksisterer, og be-
regn denne grensen. Finnes det mer enn én slik løsning?

12. (UiO) Finn den generelle løsningen av

$$y' - cy = a \cos x + b$$

der a , b og c er konstanter forskjellige fra 0.

13. a) (UiO) Finn alle løsninger av differensialligningen

$$y' \cos x - y \sin x = 1 \quad \text{i det åpne intervallet } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- b) Vis at nøyaktig én av løsningene i a) nærmer seg en grense når $x \rightarrow \pi/2^-$ og at en annen har en grense når $x \rightarrow -\pi/2^+$. Bestem disse to løsningene og de tilhørende grenseverdiene.
- c) Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}.$$

- d) Benytt resultatet i c) til å finne alle løsninger av differensialligningen

$$y' \cos x - y \sin x = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}.$$

10.2 Anvendelser

Når vi nå har funnet ut hvordan vi kan løse førsteordens, lineære differensialligninger, er det på tide å se på hvordan vi kan bruke disse ligningene i praksis. Aller først må vi lære hvordan vi kan omforme et praktisk problem til en differensialligning. Siden en førsteordens differensialligning uttrykker en sammenheng mellom en funksjon og dens deriverte, må vi først finne en slik sammenheng i det opprinnelige problemet. Siden den deriverte forteller oss hvor mye en størrelse endrer seg, betyr dette at vi må finne en sammenheng mellom hvor stor en størrelse er og hvor fort den endrer seg. Ofte gjør vi dette ved å finne to uttrykk for endringen – det ene er y' , det andre uttrykker endringen ved hjelp av y . Det er lettere å forstå dette gjennom eksempler enn gjennom ordrike forklaringer, så la oss komme i gang. Bare én bemerkning først – når den underliggende variabelen betegner tiden, vil vi markere dette ved å kalle den t istedenfor x .

10.2.1 Eksempel

En dyrepopulasjon består idag av P dyr og har en vekstrate r . Hvor stor er populasjonen om t år?

La $y(t)$ være populasjonens størrelse etter t år. I tidsrommet fra t til $t + \Delta t$ øker populasjonen fra $y(t)$ til $y(t + \Delta t)$, altså en økning på $y(t + \Delta t) - y(t)$. Vi kan også regne ut denne økningen på en annen måte: At vekstraten er r , betyr at populasjonsøkningen per tidsenhet er $ry(t)$. I et lite tidsrom fra t til $t + \Delta t$ er altså økningen tilnærmet lik $ry(t) \Delta t$ med en nøyaktighet som blir bedre jo mindre Δt er. Setter vi disse uttrykkene for økningen (tilnærmet) lik hverandre, får vi

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx ry(t) \Delta t.$$

Deler vi på Δt , får vi

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx ry(t).$$

Lar vi Δt gå mot null, gir dette

$$y'(t) = ry(t)$$

siden tilnærmelsene blir bedre desto mindre Δt er.

Dermed har vi fått en differensialligning

$$y' - ry = 0$$

som y må tilfredsstille.

For å løse denne differensialligningen, observerer vi først at siden $f(t) = -r$, så er $F(t) = -rt$. Dermed er e^{-rt} en integrerende faktor, og multipliserer vi denne inn i ligningen, får vi

$$e^{-rt}y' - e^{-rt}ry = 0.$$

Dette gjenkjenner vi som

$$(e^{-rt}y)' = 0$$

og integrerer vi på begge sider, ser vi at

$$e^{-rt}y = C.$$

Altså er $y = Ce^{rt}$ den generelle løsningen av differensialligningen.

Vårt opprinnelige problem er imidlertid fortsatt uløst – vi må finne ut hvilken av disse løsningene vi er interessert i. Legg merke til at det er én opplysning vi ennå ikke har brukt, nemlig at populasjonstørrelsen idag er P . Det betyr at $y(0) = P$, eller med andre ord

$$P = y(0) = Ce^{r \cdot 0} = C.$$

Altså må $C = P$, og den løsningen vi er på jakt etter, er

$$y(t) = Pe^{rt}.$$

Ved hjelp av denne formelen kan vi finne populasjonens størrelse ved et hvilket som helst tidspunkt. ■

Bemerkning

Vi kunne ha satt opp differensialligningen raskere ved å bruke at vekstrate r per definisjon betyr at $y'(t) = ry(t)$. Vi har valgt den mer omstendelige fremgangsmåten ovenfor fordi den viser en generell tankegang som kan brukes i flere sammenhenger.

La oss prøve et litt mer komplisert problem av den samme arten.

10.2.2 Eksempel

Et lands befolkning formerer seg med en vekstrate r . I tillegg har landet et befolkningstilskudd per år på Ne^{at} grunnet innvandring. Vi antar at befolkningen er B ved $t = 0$. Hvor stor er befolkningen etter t år?

La $y(t)$ være befolkningen ved tiden t . Tilveksten i perioden fra t til $t + \Delta t$ er $y(t + \Delta t) - y(t)$. Denne tilveksten skyldes dels en reproduksjon på (tilnærmet) $ry(t) \Delta t$ og dels en immigrasjon på (tilnærmet) $Ne^{at} \Delta t$. Dette gir ligningen

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx ry(t) \Delta t + Ne^{at} \Delta t.$$

Deler vi på Δt og går til grensen, får vi

$$y'(t) = ry(t) + Ne^{at}$$

siden tilnærmelsene blir bedre dess mindre Δt er. Dermed har vi funnet en differensialligning

$$y' - ry = Ne^{at}$$

som y må tilfredsstille.

For å løse ligningen observerer vi at siden $f(t) = -r$, så er $F(t) = -rt$. Altså er e^{-rt} en integrerende faktor også i dette tilfellet, og vi får

$$e^{-rt}y' - e^{-rt}ry = Ne^{(a-r)t}.$$

Vi gjenkjenner dette som

$$(e^{-rt}y)' = Ne^{(a-r)t}.$$

Når vi integrerer, må vi ta tilfellene $a = r$ og $a \neq r$ hver for seg. La oss først anta at $a \neq r$. Da blir

$$e^{-rt}y = \frac{N}{a-r}e^{(a-r)t} + C$$

som gir

$$y = \frac{N}{a-r}e^{at} + Ce^{rt}.$$

Siden dagens befolkning er B , kan vi bestemme C ved ligningen

$$B = y(0) = \frac{N}{a-r}e^{a \cdot 0} + Ce^{r \cdot 0} = \frac{N}{a-r} + C.$$

Vi får $C = B - N/(a-r)$, og følgelig er befolkningen ved tiden t gitt ved

$$y(t) = \frac{N}{a-r}e^{at} + \left(B - \frac{N}{a-r}\right)e^{rt}.$$

Dette betyr at i det lange løp vil det største av de to tallene a og r bestemme befolkningsveksten.

Dersom $a = r$, kan vi gjennomføre tilsvarende regninger (gjør det!) og få

$$y(t) = e^{rt}(Nt + B).$$



I det neste eksemplet får vi akkurat samme differensialligning som i eksempel 10.2.1, men problemstillingen blir litt annerledes fordi vi også har en ukjent proporsjonalitetsfaktor som må bestemmes.

10.2.3 Eksempel

Radioaktive stoffer nedbrytes ved at atomene spaltes. Det er umulig å si på forhånd hvilke atomer som spaltes først, men sannsynligheten for at et gitt atom nedbrytes i

løpet av en fast tidsperiode, er alltid den samme. *Halveringstiden* er den tiden det tar før den opprinnelige massen er halvert, og denne tiden varierer sterkt fra stoff til stoff – fra en ørliten brøkdel av et sekund til milliarder av år. Karbonisotopen ^{14}C har en halveringstid på 5568 år. Hvis vi starter med en masse N , ønsker vi å regne ut hvor mye som er igjen etter t år.

La $y(t)$ være den massen som er igjen etter t år. Den deriverte $y'(t)$ måler masseendringen per tidsenhet. Siden alle atomene brytes ned med samme sannsynlighet, vil masseendringen per tidsenhet være proporsjonal med hvor mange atomer vi har, som igjen er proporsjonalt med massen. Kaller vi proporsjonalitetsfaktoren k , får vi

$$y'(t) = -ky(t)$$

(det er naturlig å ta med en minus siden massen er avtagende). Foreløpig vet vi ikke hva proporsjonalitetsfaktoren k er, men den skal vi finne senere. Skriver vi om ligningen ovenfor til

$$y'(t) + ky(t) = 0$$

ser vi at vi har en førsteordens, lineær differensialligning. Vi løser på vanlig måte og får

$$y = Ce^{-kt}.$$

Dermed har vi løst differensialligningen, men vi vet fortsatt ikke hva de to konstantene C og k er. Vi har imidlertid to opplysninger vi ikke har brukt ennå; vi vet at vi starter med en masse N og at halveringstiden er 5568 år. Med formler kan dette skrives som

$$N = y(0) = Ce^{-k \cdot 0}$$

og

$$\frac{N}{2} = y(5568) = Ce^{-k \cdot 5568}.$$

Fra den første ligningen ser vi at $C = N$, og setter vi dette inn i den andre, får vi

$$\frac{N}{2} = Ne^{-k \cdot 5568}.$$

Vi forkorter bort N og får

$$\frac{1}{2} = e^{-k \cdot 5568}.$$

For å løse denne ligningen tar vi logaritmer på begge sider og får

$$\ln \frac{1}{2} = -k \cdot 5568.$$

Bruker vi at $\ln(1/2) = -\ln 2$, ser vi at $k = \ln(2)/5568 \approx 1.245 \cdot 10^{-4}$. Dermed har vi funnet den endelige løsningen

$$y(t) = Ne^{-t \cdot \ln(2)/5568}.$$

Ved hjelp av denne formelen kan vi altså finne ut hvor mye ^{14}C som er tilstede ved et hvilket som helst tidspunkt.

Legg merke til hvordan vi brukte løsningen av differensialligningen til å bestemme proporsjonalitetsfaktoren k . Dette er en teknikk man ofte får bruk for. ■

Bemerkning

Regningene ovenfor danner grunnlaget for en revolusjonerende metode til å bestemme alderen på historisk og arkeologisk materiale. Metoden ble utarbeidet av den amerikanske kjemikeren Willard Libby som i 1960 fikk nobelprisen i kjemi for sine oppdagelser. Metoden baserer seg på at alle planter og dyr inneholder en viss mengde av isotopen ^{14}C (isotopen kommer inn i næringskjeden ved at plantene tar den opp fra luften som del av CO_2 opptaket). Så lenge organismene er i live, er det balanse mellom den mengden ^{14}C som blir tatt opp og den mengden som brytes ned radioaktivt. Når organismene dør, stopper inntaket, og mengden av ^{14}C avtar i takt med den radioaktive nedbrytingen. Ved å måle mengden av ^{14}C i dyre- og planterester knyttet til historiske funn, kan man derfor datere funnene med forbausende nøyaktighet (formelen i eksemplet ovenfor forteller oss hvor mye karbon det er igjen etter en viss tid). Metoden baserer seg på at ^{14}C -innholdet i atmosfæren er det samme til enhver tid slik at vi kan bruke moderne data til å anslå hvor mye ^{14}C det opprinnelig var i prøvene. Denne antagelsen holder ikke helt stikk, men ^{14}C -datering er likevel langt mer nøyaktig enn tidligere metoder. Også i geologi bruker man radioaktive metoder for å måle alder, men her er man avhengig av isotoper med en mye høyere halveringstid.

La oss nå se på et eksempel der det er litt vanskeligere å sette opp differensialligningen.

10.2.4 Eksempel

En innsjø som inneholder 10^7 kubikkmeter vann, er blitt forurenset av et skadelig stoff og inneholder 7 ganger den øvre grensen som helsemyndighetene har fastsatt. Det forurensete vannet renner ut av innsjøen med fart av 10^3 kubikkmeter i døgnet og blir erstattet med rent vann. Hvor lang tid vil det ta før man er under helsemyndighetenes grense dersom dette er den eneste måten innsjøen blir rensert på?

La $y(t)$ være mengden av det skadelige stoffet etter t dager. Bruker vi helsemyndighetenes øvre grense som enhet, er $y(0) = 7$, og vi ønsker å vite hvor lang tid det tar før $y(t) = 1$.

I løpet av et lite tidsrom fra t til $t + \Delta t$ endrer giftmengden seg med $y(t + \Delta t) - y(t)$. For å finne et annet uttrykk for denne størrelsen observerer vi først at det i løpet av perioden renner $10^3 \Delta t$ kubikkmeter vann ut av innsjøen. Den totale mengden gift i innsjøen er $y(t)$ fordelt på 10^7 kubikkmeter vann. Giftmengden i de $10^3 \Delta t$ kubikkmetrene som renner ut, er dermed $y(t) \cdot 10^3 \Delta t / 10^7 = y(t) \cdot 10^{-4} \Delta t$ masseenheter forutsatt at giften er jevnt fordelt i innsjøen (noe som sikkert ikke er tilfellet, men som vi antar som en rimelig tilnærming). Setter vi de to uttrykkene for endring i giftmengde lik hverandre, får vi

$$y(t + \Delta t) - y(t) = -y(t) \cdot 10^{-4} \Delta t$$

(vi må ha med minustegnet siden et tap på $10^{-4} \cdot y(t) \Delta t$ er en negativ endring). Deler vi først på Δt og lar deretter Δt gå mot null, ser vi at

$$y'(t) = -y(t) \cdot 10^{-4}.$$

Skriver vi om dette uttrykket, får vi

$$y'(t) + 10^{-4} \cdot y(t) = 0.$$

Dette er en differensialligning av samme type som tidligere, og løsningen er

$$y(t) = Ce^{-10^{-4}t}.$$

Vi er interessert i den løsningen der $y(0) = 7$. Siden vi generelt har $y(0) = C$, må vi altså velge $C = 7$. Dermed blir

$$y(t) = 7e^{-10^{-4}t}.$$

Hvor lang tid tar det så før $y(t) = 1$? Vi løser ligningen

$$7e^{-10^{-4}t} = 1$$

ved å ta logaritmer på begge sider. Løsningen er

$$t = 10^4 \ln 7 \approx 19\,459.$$

Rensingsprosessen vil altså ta 19 459 dager (det vil si drøye 53 år) dersom ingen andre mekanismer griper inn! ■

Vi avslutter med et eksempel av en litt annen type. Denne gang er det en naturlov som gjør det mulig for oss å sette opp differensialligningen.

10.2.5 Eksempel

Et legeme med masse m faller under påvirkning av tyngdens akselerasjon g . Luftmotstanden er proporsjonal med farten, og proporsjonalitetsfaktoren er k . Hvor stor fart har legemet etter t sekunder dersom startfarten er v_0 ?

Ifølge Newtons annen lov er $F = ma$. De to kreftene som virker på legemet, trekker i hver sin retning og har samlet størrelse

$$F = mg - kv.$$

Vi får dermed

$$ma = mg - kv.$$

Siden akselerasjonen a er den deriverte av farten v , kan vi skrive denne ligningen

$$mv' = mg - kv.$$

Skriver vi om litt, får vi

$$v' + \frac{k}{m}v = g$$

som er en førsteordens, lineær differensialligning med v som ukjent funksjon. Siden $f(t) = k/m$, er $e^{kt/m}$ en integrerende faktor, og vi får

$$e^{kt/m}v' + e^{kt/m}\frac{k}{m}v = ge^{kt/m}.$$

Vi gjenkjenner venstresiden som $(e^{kt/m}v)'$, og dermed er

$$(e^{kt/m}v)' = ge^{kt/m}.$$

Integrasjon gir

$$e^{kt/m}v = \int ge^{kt/m} dt + C = \frac{gm}{k}e^{kt/m} + C.$$

Vi deler på $e^{kt/m}$ og får

$$v = \frac{gm}{k} + Ce^{-kt/m}.$$

Dette er den generelle løsningen av differensialligningen. Vi er interessert i den løsningen der $v(0) = v_0$. Ligningen

$$v_0 = \frac{gm}{k} + Ce^{-k \cdot 0/m} = \frac{gm}{k} + C$$

gir $C = v_0 - gm/k$. Dermed blir vår løsning

$$v(t) = \frac{gm}{k} + \left(v_0 - \frac{gm}{k}\right)e^{-kt/m}.$$

Legg merke til at uansett hva v_0 er, så vil farten nærme seg gm/k etter som tiden går.

Antagelsen om at luftmotstanden er proporsjonal med hastigheten, gjelder godt så lenge farten er liten. Løsningen ovenfor gir derfor en god beskrivelse av hvordan legemer med stor luftmotstand faller. Når farten blir større, er det mer realistisk å anta at luftmotstanden er proporsjonal med *kvadratet* av hastigheten. Differensialligningen vi da får, kan ikke behandles med teknikkene vi har lært hittil, men du vil kunne løse den etter å ha lest seksjon 10.4 (se oppgave 5 i den seksjonen). ■

Bemerkning

Før vi begynner på oppgavene, er det et terminologispørsmål det kan være lurt å si noen ord om. Vi kan ta utgangspunkt i den først oppgaven nedenfor der det står at i et land er den årlige befolkningsveksten 2 %. Dette kan tolkes på to måter. Den ene er å tenke at om ett år er befolkningen 1.02 ganger det den er i dag, så hvis befolkningen etter t år er $y(t)$, så må befolkningen ett år senere være $y(t+1) = 1.02y(t)$. Den andre måten er å tolke «befolkningsvekst» som momentan veksthastighet, dvs. at $y'(t) = 0.02y(t)$ når tiden måles i år. De to tolkning gir litt forskjellig tidsutvikling siden den første ikke tar hensyn til at befolkningen (og dermed befolkningsøkningen) endrer seg i løpet av året. Det er ikke alltid så lett å vite hvilken tolkning folk tenker på, men i oppgavene nedenfor er det alltid momentan veksthastighet (altså den deriverte) vi er interessert i når vi beskriver hvordan ting endrer seg.

Oppgaver i seksjon 10.2

1. (UiO) I et land er den årlige befolkningsveksten 2 %. I tillegg har landet en netto innvandring på 40 000 personer per år. Sett opp en differensialligning for funksjonen $y(t)$ som angir hvor mange personer det er i landet ved tiden t . Anta at befolkningen i landet er 2 000 000 ved tiden $t = 0$. Finn $y(t)$.

2. (UiO) Nitrogenpentoksid (N_2O_5) er et fast stoff som spalter seg i gassene nitrogendioksid (NO_2) og oksygen (O_2). Hvis $M(t)$ betegner mengden av N_2O_5 etter t sekunder, så er

$$M'(t) = -0.0005M(t).$$

Hvor stor brøkdel av N_2O_5 er det igjen etter 1000 sekunder? Når er mengden av N_2O_5 redusert til 10 % av den opprinnelige?

3. (UiO) Anta at det i levende organisk materiale er en konstant ^{14}C -aktivitet som vi kaller c_0 . I dødt organisk materiale avtar ^{14}C -aktiviteten eksponentielt med halveringstid 5568 år. Et gammelt trestykke fra et museum har en ^{14}C -aktivitet som er 75 % av c_0 . Hvor gammelt er trestykket?

4. (UiO) En pasient får intravenøst en jevn, kontinuerlig tilførsel av medisin med en hastighet av 10 milliliter i timen. Medisinen skilles ut av kroppen med en hastighet av 5 % per time. La $y(t)$ være mengden av medisin i kroppen t timer etter at behandlingen har begynt. Vis at dersom $y(t)$ måles i milliliter, så er

$$y'(t) + \frac{1}{20}y(t) = 10, \quad y(0) = 0$$

Finn $y(t)$ og $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

5. (UiO) 10 millioner tonn søppel blir ved tiden $t = 0$ deponert på en midlertidig lagringsplass. Søppelet inneholder 200 000 tonn av et skadelig stoff som brytes ned med en jevn fart av 5 % per år.

a) La $y(t)$ være prosentdelen av skadelig stoff i søppelet etter t år. Forklar hvorfor

$$y'(t) = -0.05y(t), \quad y(0) = 2$$

og vis at $y(t) = 2e^{-0.05t}$.

b) Søppelet blir overført til en permanent lagringsplass med en jevn fart av 1/2 million tonn per år. På den nye lagringsplassen blir søppelet behandlet slik at det skadelige stoffet brytes ned med en fart av 10 % per år. La $z(t)$ være antall millioner tonn skadelig stoff på den nye lagringsplassen etter t år. Forklar hvorfor

$$z'(t) = -0.1z(t) + 0.01e^{-0.05t}, \quad z(0) = 0$$

c) Vis at $z(t) = \frac{1}{5}e^{-0.05t} - \frac{1}{5}e^{-0.1t}$.

6. (UiO) *Peranema trichophorum* er en art encellede alger som beveger seg ved hjelp av to flageller. En av dem peker forover i bevegelsesretningen, og vi skal konsentrere oss om lengden av denne forreste flagellen. Vi skal stille opp en modell for veksten. Vi lar tiden $t = 0$ være tidspunktet da algen ble skilt fra modercellen. Flagellens lengde var da $47 \mu\text{m}$. Ferdig utvokst er flagellens lengde $L^* = 63 \mu\text{m}$. La L være flagellens lengde ved tiden t . Vi antar at vekstraten til L er proporsjonal med differansen $L^* - L$. Målinger i laboratoriet har vist at proporsjonalitetskonstanten kan settes lik 0.087 når tiden måles i timer.

a) Still opp en differensialligning som L må tilfredsstille.

b) Finn en formel for L som funksjon av tiden.

7. (UiO) Vi skal kjøre bil fra Oslo til Kragerø. Når vi starter, har vi 30 l bensin på tanken. Bilen kjører med jevn fart, og motoren har da et konstant bensinforbruk på 0.8 l/mil. Uheldigvis er det også en lekkasje i bensintanken der bensinen strømmer ut. Utstrømningsraten (i l/mil) er proporsjonal med bensinvolumet i tanken, med proporsjonalitetskonstant 0.1 mil^{-1} . Vi lar $V(x)$ være bensinvolumet i tanken (målt i liter) som funksjon av kjørt distanse x (målt i mil).

- a) Still opp en differensialligning for $V(x)$ og løs denne med initialbetingelse $V(0) = 30$.
- b) Regn ut hvor langt vi kan kjøre (uten å etterfylle bensin) før tanken er tom. Fra Oslo til Kragerø er det 19.7 mil. Hvor mye bensin måtte vi ha på tanken ved start for å kunne komme helt frem?

8. (UiO) I en by med 10 000 innbyggere sprer det seg en sykdom på en slik måte at veksten i antall smittede personer på ethvert tidspunkt er proporsjonal med det antall personer som ennå ikke er smittet.

- a) Skriv ned en differensialligning for antall smittede personer som funksjon av tiden, og løs denne.
- b) Det er oppgitt at ved tiden $t = 0$ var 5000 personer smittet, og ved tiden $t = 5$ var 9000 personer smittet. Avgjør på hvilket tidspunkt 7000 personer var smittet (helst med eksakt svar).

9. (NTNU) En demning er utstyrt med en automatisk reguleringsmekanisme som hvert sekund slipper ut en milliondel av det vannet som befinner seg i den. Gjør rede for at dersom demningen har et tilsig på 100 m^3 vann per sekund, så vil vannmengden $y(t)$ i demningen ved tiden t tilfredsstille differensialligningen

$$y'(t) + 10^{-6}y(t) = 100.$$

Når demningen er full, inneholder den 10^8 m^3 vann. Hvor lang tid tar det fra demningen er tom til den er halvfull?

10. (UiO) Et svømmebasseng er fylt med 1 000 000 liter badevann som inneholder 0.004 % klor (eller rettere sagt et klorderivat). Eieren synes klorprosenten er for høy og begynner derfor å tappe ut 50 000 liter per dag samtidig som bassenget fylles opp med 50 000 liter per dag nytt badevann som kun inneholder 0.001 % klor. Vi antar her at blandingen vann/klor hele tiden er perfekt.

La $y(t)$ betegne antall liter klor som finnes i badevannet ved tiden t (målt i dager), der vi setter $t = 0$ når prosessen begynner. Forklar hvorfor y tilfredsstiller differensialligningen

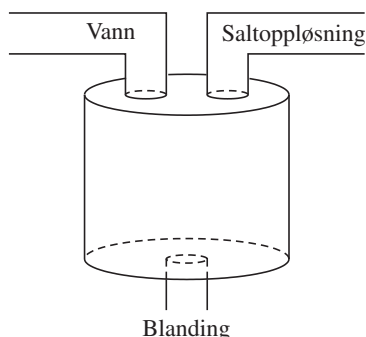
$$y' + \frac{1}{20}y = \frac{1}{2},$$

og regn ut hvor lang tid det tar før klorprosenten er nede i 0.003 %.

11. (NTNU) En tank inneholder 200 liter vann. Ved tidspunktet $t = 0$ begynner en saltopløsning som inneholder 0.25 kg salt per liter å strømme inn i tanken med 2 liter per minutt. Vi antar at væskene blander seg raskt. Etter $t = 3$ minutter begynner blandingen å strømme ut av tanken med 2 liter per minutt (slik at væskemengden i tanken nå holder seg konstant).

Hvor mye salt er det i tanken når $t = 25$ min? Hvordan går det med saltinnholdet i tanken når $t \rightarrow \infty$?

12. (NTNU) Figuren viser en tank hvor det fra et rør strømmer inn rent vann med 100 l/min , og fra et annet rør strømmer inn en saltopløsning med 50 l/min .



Oppløsningen inneholder 10 g salt per liter. Vi kan regne med at væskene blander seg raskt, og at oppløsningen som strømmer ut med 150 l/min har samme konsentrasjon som den i tanken. Ved tiden $t = 0$ inneholder tanken 100 l rent vann. Hvor mange g salt, $x = x(t)$, er det da i tanken ved tiden t ? Hvordan går det med saltinnholdet i tanken når $t \rightarrow \infty$?

13. (UiO) Når en gjenstand er kaldere eller varmere enn omgivelsene, vil temperaturen til gjenstanden stige eller synke med en hastighet som er proporsjonal med differansen mellom omgivelsenes temperatur og gjenstandens temperatur (dette kalles ofte *Newtons avkjølingslov*).

- a) En kanne med kaldt vann settes inn i et rom der temperaturen er konstant lik 22°C . La $y(t)$ være temperaturen i vannet etter t timer. Forklar hvorfor

$$y'(t) = k(22 - y(t))$$

der k er en positiv konstant. Finn den generelle løsningen til denne differensialligningen.

- b) Temperaturen i vannet ved tiden $t = 0$ er 6°C . Fem timer senere er temperaturen 14°C . Hva er temperaturen etter 10 timer? Hva skjer med $y(t)$ når $t \rightarrow \infty$? Den samme kannen med vann blir satt inn i et uthus der temperaturen er 2°C . I løpet av 10 timer øker temperaturen i uthuset jevnt til den når 22°C . La $z(t)$ være temperaturen i vannet etter t timer. Forklar hvorfor

$$z'(t) + kz(t) = 2k(1 + t), \quad 0 \leq t \leq 10$$

Konstanten k har samme verdi som før.

- c) Finn temperaturen $z(t)$ etter t timer ($0 \leq t \leq 10$) når $z(0) = 4$.

14. a) (UiO) I differensialligningen $y' + ky = 3kt$ er k en konstant. Vis at den generelle løsningen til denne ligningen er

$$y(t) = 3t - \frac{3}{k} + Ce^{-kt}$$

Newtons avkjølingslov sier at en gjenstand avkjøles eller oppvarmes med en fart som er proporsjonal med differansen mellom omgivelsenes temperatur og gjenstandens temperatur.

- b) Ved tiden $t = 0$ er temperaturen i et rom 0°C . Rommet varmes opp med en jevn fart av 3°C per time. La $y(t)$ være temperaturen til en gjenstand i rommet etter t timer. Forklar kort hvorfor

$$y' + ky = 3kt$$

for en konstant k .

- c) Anta at $y(0) = 0$. Vis at dersom $k = 0.5$, er temperaturen til gjenstanden etter 10 timer tilnærmet lik 24°C , og hvis $k = 1$ er temperaturen etter 10 timer tilnærmet lik 27°C .
- d) Vis at det finnes nøyaktig én verdi av k slik at temperaturen etter 10 timer er akkurat 25°C .

15. (UiO) En melkekartong der temperaturen i melken var 6°C ble stående på kjøkkenbenken i 2 timer. Da var temperaturen i melken steget til 13°C . Lufttemperaturen i kjøkkenet var 20°C .

Vi regner med at temperaturen i melken endres med en hastighet som er proporsjonal med differansen mellom lufttemperaturen og temperaturen i melken.

- a) Still opp en differensialligning for temperaturen T i melken som funksjon av tiden t , og vis at den har en løsning av form

$$T(t) = A + Be^{-\alpha t},$$

der A er lufttemperaturen utenfor kartongen. Finn B og α .

- b) Hva blir temperaturen i melken hvis kartongen blir stående på kjøkkenbenken i enda en time?
- c) Da temperaturen i melken var 15°C , ble kartongen satt inn i kjøleskapet. Etter 1 time var temperaturen i melken sunket til 12°C . Hva var temperaturen i kjøleskapet?

16. (NTNU) En kasserolle med fruktsuppe står til avkjøling i et værelse der temperaturen er 10°C . La T stå for suppens temperatur. Ved tiden $t = 0$ er $T = 70^\circ\text{C}$, og når $t = 30$ min er $T = 40^\circ\text{C}$. Hva er temperaturen T når $t = 60$ min? (Vi går ut fra at $T'(t)$ er proporsjonal med temperaturdifferansen mellom suppe og omgivelser.)

17. (UiO) En varmtvannstank står i en kjeller hvor temperaturen er 0 grader. Fra et elektrisk varmeelement føres varme-energi inn i tanken med jevn hastighet Q kJ (kilo-Joule) i timen. Samtidig avgir tanken energi til sine omgivelser med en hastighet som er proporsjonal med temperaturen U i vannet; vi lar hastigheten være kU kJ i timen.

For å endre temperaturen i vannet med 1 grad, regner vi at energi-innholdet må endres med c kJ. (Vi lar Q , k og c være konstante.)

- a) Forklar hvordan opplysningene ovenfor kan oversettes til at temperaturen U i vannet, som funksjon av tiden t , må være løsning av differensialligningen

$$U'(t) = \frac{1}{c}[Q - kU(t)].$$

- b) Finn en formel for $U(t)$, $t \geq 0$, når du antar at $U(0) = U_0$ er kjent. Hva skjer med $U(t)$ når $t \rightarrow \infty$?
- c) Noenlunde realistiske verdier for konstantene ovenfor er $k = 50$, $c = 500$, og $Q = 7000$. Hvor lang tid vil det, med disse verdiene, ta å varme opp vannet i tanken fra 0 til 70 grader? Hvordan går det hvis du bruker $Q = 3500$ i stedet for 7000?
- 18.** a) (UiO) Finn alle funksjoner $y = f(x)$ med følgende egenskap: La P være et vilkårlig punkt på grafen til f og T_P tangenten til f i punktet P . Da deles det rette linjestykket mellom T_P 's skjæringspunkter med koordinataksene på midten av punktet P .
- b) Bruk resultatet ovenfor til å angi en praktisk regel for konstruksjon av tangenten til en hyperbel med vinkelrette asymptoter i et vilkårlig punkt på hyperbelen.
- 19.** (UiO) La f være en funksjon som er definert for alle x og som tilfredsstiller ligningen $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ for alle x og y .
- a) Anta at $f'(0)$ eksisterer. Vis at da er f deriverbar for alle x .
- b) Finn alle slike f .
- 20.** (UiO) I et forsøk studerer en to bakterietyper X_1 «mørk rød» og X_2 «lys rød» som kan oppstå av hverandre ved mutasjon. En koloni av disse bakteriene vokser under optimale betingelser eksponentielt med en fordoblingstid på 64 min. Uansett hvilken av de to bakterietypene som brukes til å starte en slik koloni, vil det etter hvert utvikle seg et stabilt forhold mellom de to typene. Forsøk viser at brøkdelen Ψ av mørk røde celler går eksponentielt mot verdien $\Psi_\infty = 0.97$, og halveringstiden for $\Psi - \Psi_\infty$ er 4.03 dager.
- Vi vil prøve å forklare disse resultatene ved en differensialligningsmodell. Vi lar da $n_1(t)$ og $n_2(t)$ betegne antall celler etter t dager av type X_1 og X_2 henholdsvis, og antar at veksten følger differensialligningene

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= kn_1 - \mu n_1 + \beta n_2 \\ \frac{dn_2}{dt} &= kn_2 - \beta n_2 + \mu n_1\end{aligned}\tag{1}$$

der k , μ og β er positive konstanter. k er den spesifikke vekstraten til bakteriekolonien som helhet, mens μ og β er mutasjonsrater for de to bakterietypene.

- a) Sett $N = n_1 + n_2$ og $\Psi = n_1/N$ og utled av (1) differensialligningene

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= kN \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \beta - (\mu + \beta)\Psi.\end{aligned}\tag{2}$$

- b) Løs (2) med initialbetingelsene $N(0) = N_0$, $\Psi(0) = \Psi_0$ og finn $\Psi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t)$.
- c) Bestem konstantene k , μ og β ut fra de dataene som er gitt innledningsvis.

21. a) (UiO) Vis at dersom a og k er to tall forskjellig fra 0, så er

$$\int e^{kt} \sin at \, dt = \frac{e^{kt}}{a^2 + k^2} (k \sin at - a \cos at) + C$$

- b) Vis at uttrykket i a) kan skrives som

$$\int e^{kt} \sin at \, dt = \frac{e^{kt}}{\sqrt{a^2 + k^2}} \sin(at + \phi) + C$$

for en passende vinkel ϕ .

- c) Et firma planlegger å bygge en demning over en elv. Vanntilførselen i elven varierer med årstidene, men firmaet anslår at dersom vi måler tiden i måneder og vannmassene i millioner kubikkmeter, vil vanntilførselen per måned være

$$20 + 10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Vann slippes ut av demningen i en mengde som er proporsjonal med den totale vannmengden i demningen, og proporsjonalitetsfaktoren er $\frac{1}{2}$. Hvis $y(t)$ er vannmengden i demningen ved tiden t , vis at

$$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = 20 + 10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Finn løsningen $y(t)$ når $y(0) = 0$.

- d) Demningen er tom ved tiden $t = 0$. Firmaet ønsker å være sikre på at demningen aldri oversvømmes. Hvor stor må kapasiteten være?

22. En by har to identiske brøytebiler. Disse brøytebilene har den egenskapen at de alltid brøyter bort like mye sne per tidsenhet uansett hvor mye sne som ligger på bakken. En formiddag begynte det å sne og det snedde jevnt resten av dagen. Presis klokken 12 kjørte den ene brøytebilen ut og begynte å måke. Presis klokken 13 kjørte den andre brøytebilen ut og begynte å måke den samme ruten som den første. Presis klokken 14 kjørte den andre brøytebilen inn i den første bakfra. Når begynte det å sne?

10.3 Eksistens og entydighet

I de praktiske eksemplene i forrige seksjon var vi stadig på jakt etter én spesiell løsning av differensialligningen vår – som regel den som samsvarte med en oppgitt startverdi. Det er naturlig å spørre seg om det alltid finnes en slik løsning. Det kunne jo tenkes at det var noen startverdier som ikke svarte til noen løsning, og andre som svarte til flere enn én. Vi skal nå bevise et resultat som sier at det til hver startverdi svarer én og bare én løsning.

10.3.1 Setning

Anta at f og g er kontinuerlige funksjoner på det åpne intervallet I . La c være et tall i I og anta at d er et fritt valgt tall i \mathbb{R} . Da finnes det nøyaktig én løsning av differensialligningen

$$y' + f(x)y = g(x) \quad x \in I$$

slik at $y(c) = d$. Denne løsningen er

$$y(x) = e^{-\int_c^x f(t) dt} \left(\int_c^x g(t) e^{\int_c^t f(s) ds} dt + d \right).$$

Bevis: La oss først vise at grafen til to forskjellige løsninger y_1 og y_2 ikke kan gå gjennom samme punkt. Velger vi oss en antiderivert F av f , vet vi at y_1 og y_2 er gitt ved

$$y_1(x) = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x) dx + C_1 \right)$$

og

$$y_2(x) = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x) dx + C_2 \right)$$

der C_1 og C_2 er to forskjellige konstanter. Trekker vi y_2 fra y_1 , får vi

$$y_1(x) - y_2(x) = e^{-F(x)} (C_1 - C_2).$$

Velger vi $x = c$, ser vi at

$$y_1(c) - y_2(c) = e^{-F(c)} (C_1 - C_2)$$

som er ulik null siden $C_1 \neq C_2$. Dette viser at forskjellige løsningskurver ikke kan gå igjennom samme punkt, og følgelig kan det høyst være én løsning slik at $y(c) = d$. Det gjenstår å sjekke at

$$y(x) = e^{-\int_c^x f(t) dt} \left(\int_c^x g(t) e^{\int_c^t f(s) ds} dt + d \right)$$

virkelig er en løsning av differensialligningen slik at $y(c) = d$. At $y(c) = d$, er lett å sjekke – siden alle integraler av formen \int_c^c er lik null, må

$$y(c) = e^{-\int_c^c f(t) dt} \left(\int_c^c g(t) e^{\int_c^t f(s) ds} dt + d \right) = e^0(0 + d) = d.$$

Men hvorfor er $y(x)$ en løsning av differensialligningen? Vi kan selvfølgelig sjekke at den er det ved innsetning, men det er lettere å gjenkjenne den som en forkledd variant av de løsningene vi allerede har. Legg merke til at $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ er en antiderivert til f . Uttrykket ovenfor kan dermed skrives

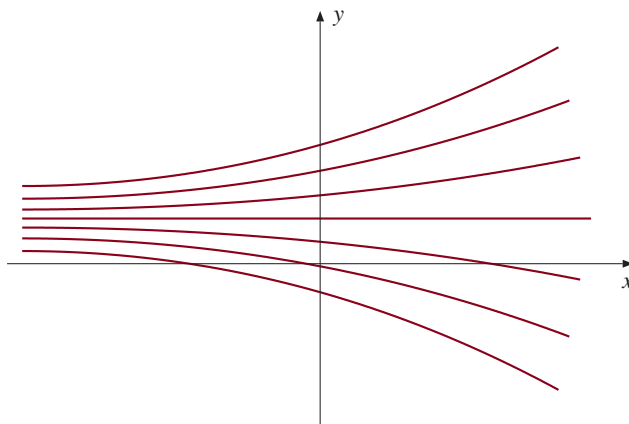
$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int_c^x g(t) e^{F(t)} dt + d \right).$$

Tilsvarende er $\int_c^x g(t)e^{F(t)} dt$ en spesiell antiderivert av $g(x)e^{F(x)}$, så uttrykket ovenfor er på formen

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int g(x)e^{F(x)} dx + C \right)$$

og vi gjenkjenner det dermed som en av løsningene av differensialligningen. Beviset er fullført. ■

Setningen ovenfor forteller oss at to løsningskurver av en førsteordens, lineær differensialligning aldri skjærer hverandre. Tegner vi opp alle løsningene, får vi en skare av funksjoner som ligger «ved siden av hverandre» som antydnet i figur 10.3.1.



Figur 10.3.1.

En betingelse av typen $y(c) = d$ kalles ofte et *initialkrav* eller et *randkrav*. Når vi skal finne løsningen til en differensialligning som oppfyller et gitt initialkrav, har vi to mulige fremgangsmåter. Det neste eksemplet viser begge.

10.3.2 Eksempel

Finn den løsningen til differensialligningen

$$y' + \sin x \cdot y = \sin x$$

som tilfredsstillter $y(\pi) = 2$.

Vi skal løse dette problemet på to måter. Den første metoden bygger på formelen i setning 10.3.1. Ifølge denne formelen er y gitt ved

$$y(x) = e^{-\int_{\pi}^x \sin t dt} \left(\int_{\pi}^x \sin t \cdot e^{\int_{\pi}^t \sin s ds} dt + 2 \right).$$

For å regne ut dette uttrykket ser vi først at

$$\int_{\pi}^x \sin t dt = [-\cos t]_{\pi}^x = -\cos x + \cos \pi = -\cos x - 1.$$

Setter vi dette inn i formelen ovenfor, får vi

$$y(x) = e^{\cos x + 1} \left(\int_{\pi}^x \sin t \cdot e^{-\cos t - 1} dt + 2 \right).$$

For å regne ut integralet $\int \sin t \cdot e^{-\cos t - 1} dt$ innfører vi en ny variabel $u = -\cos t - 1$. Da er $du = \sin t dt$, og vi får

$$\int \sin t \cdot e^{-\cos t - 1} dt = \int e^u du = e^u + C = e^{-\cos t - 1} + C.$$

Setter vi inn grensene, ser vi at

$$\int_{\pi}^x \sin t \cdot e^{-\cos t - 1} dt = \left[e^{-\cos t - 1} \right]_{\pi}^x = e^{-\cos x - 1} - e^{-\cos \pi - 1} = e^{-\cos x - 1} - 1.$$

Går vi tilbake til uttrykket for $y(x)$, får vi nå

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\cos x + 1} \left(\int_{\pi}^x \sin t \cdot e^{-\cos t - 1} dt + 2 \right) \\ &= e^{\cos x + 1} (e^{-\cos x - 1} - 1 + 2) \\ &= 1 + e^{\cos x + 1} \end{aligned}$$

som er svaret.

La oss gå over til den andre metoden. Her finner vi først den generelle løsningen til ligningen og tilpasser så konstanten etterpå. For å løse

$$y' + \sin x \cdot y = \sin x$$

observerer vi først at $F(x) = -\cos x$ er en antiderivert til $f(x) = \sin x$, og at $e^{-\cos x}$ følgelig er en integrerende faktor. Multipliserer vi den inn i ligningen, får vi

$$e^{-\cos x} \cdot y' + e^{-\cos x} \cdot \sin x \cdot y = e^{-\cos x} \cdot \sin x.$$

Venstresiden er lik $(e^{-\cos x} \cdot y)'$, og integrerer vi, får vi

$$e^{-\cos x} \cdot y = \int e^{-\cos x} \sin x dx = e^{-\cos x} + C.$$

Den generelle løsningen blir derfor

$$y = 1 + Ce^{\cos x}.$$

For å finne løsningen slik at $y(\pi) = 2$, løser vi ligningen

$$2 = y(\pi) = 1 + Ce^{\cos \pi} = 1 + Ce^{-1}.$$

Dette gir $C = e$, og følgelig får vi det endelige svaret

$$y = 1 + e \cdot e^{\cos x} = 1 + e^{\cos x + 1}.$$

Vi ser at vi i praksis ikke tjener noe på å bruke formelen i setning 10.3.1, men den er av og til nyttig for mer teoretiske formål. ■

Oftestøter vi på differensialligninger som med et enkelt håndgrep kan gjøres om til førsteordens, lineære ligninger. Et enkelt eksempel er

$$xy' + y = x \sin x. \quad (1)$$

Deler vi med x , får vi

$$y' + \frac{1}{x}y = \sin x.$$

Dette er en førsteordens, lineær differensialligning som kan løses ved hjelp av metodene ovenfor. Faktisk har vi løst den allerede; i eksempel 10.1.5 så vi at løsningen er

$$y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}.$$

Legg merke til at disse løsningene bare er definert for $x \neq 0$ til tross for at koeffisientene i den opprinnelige ligningen (1) er definert og kontinuerlige for alle x . Årsaken er at koeffisientene i den førsteordens, lineære ligningen som vi egentlig løser, bare er definert for $x \neq 0$. Dette eksemplet viser oss at vi må være litt forsiktige når vi bruker teorien i denne seksjonen; selv om en førsteordens, lineær ligning har uendelig mange løsninger på ethvert intervall der koeffisientene er kontinuerlige, gjelder ikke dette automatisk for alle beslektede ligninger. For eksempel har ligning (1) bare én løsning definert på hele \mathbb{R} , og det er

$$y(x) = \begin{cases} -\cos x + \frac{\sin x}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0. \end{cases}$$

Oppgaver i seksjon 10.3

I oppgavene nedenfor skal du finne den løsningen av differensialligningen som oppfyller den gitte betingelsen:

1. $y' - 3y = e^{2x}$, $y(0) = 0$

2. $y' + 2e^x y = e^x$, $y(1) = e$

3. $y' + y \tan x = \sin 2x$, $y(0) = 2$

4. $y' + x^2 y = x^2$, $y(1) = 0$

5. $x^2 y' + 2xy = \arctan x$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$

6. $xy' - y = x^2 \cosh x$, $y(-1) = 2$

7. (UiO) Finn en funksjon y definert i $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ slik at

$$y' - (\tan x)y = \cos^2 x, \quad y(0) = 1$$

8. Løs differensialligningen $(\sin x)y' + (\cos x)y = x$ for $x \in (0, \pi)$. Finn to løsninger y_1 og y_2 slik at $\lim_{x \rightarrow 0^+} y_1(x)$ og $\lim_{x \rightarrow \pi^-} y_2(x)$ eksisterer.

9. (UiO) Løs differensialligningen

$$xy' + y - e^x = 0.$$

Finn en løsning slik at $y(a) = b$ ($a \neq 0$).

10. a) Finn alle løsningene til

$$x(x+1)y' + y = x(x+1)^2e^{-x^2} \quad (*)$$

på intervallet $(-1, 0)$. Vis at det bare er en løsning slik at $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x)$ eksisterer.

- b) Vis at $(*)$ har uendelig mange løsninger på intervallet $(-\infty, 0)$ og at alle går gjennom punktet $(-1, 0)$.

11. a) (UiO) Løs differensialligningen

$$y'x \ln x + y(\ln x + 1) = 1 \quad (*)$$

for $x > 1$.

- b) Vis at bare en av løsningsfunksjonene til $(*)$ kan utvides til en løsning for $x > 0$.

- c) Utfør integrasjonen

$$\int \frac{dx}{3e^{2x} + e^{-2x}}$$

og løs deretter differensialligningen

$$y'x \ln x + y(\ln x + 1) = \frac{1}{3e^{2x} + e^{-2x}}$$

for $x > 1$.

12. (UiO) Finn den løsningen av

$$y'' - 2y' = xe^{2x}$$

som tilfredsstiller $y(0) = 1$, $y'(0) = -1/4$.

13. (UiO) Betrakt differensialligningen

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = (1-x^2)^k \quad (*)$$

der $k \neq 0$ er en reell konstant.

- a) Finn den generelle løsningen av $(*)$ i tilfellet $k = 1/2$.

- b) La $k \neq 0$ være vilkårlig. Anta at $y(x)$ er en spesiell løsning av $(*)$ som er slik at $y'(1/2) = 0$. Hva er $y(1/2)$? Avgjør om $x = 1/2$ er et lokalt maksimumspunkt for $y(x)$, et lokalt minimumspunkt for $y(x)$ eller ingen av delene.

10.4 Separable differensialligninger

I denne seksjonen skal vi se på en klasse differensialligninger som er lette å løse, men som teoretisk er mer uryddige enn de vi hittil har sett på. En differensialligning kalles *separabel* dersom den kan skrives på formen

$$q(y)y' = p(x)$$

der q og p er kjente funksjoner. Betegnelsen «separabel» henspiller på at de to variablene x og y «separeres» av likhetstegnet.

10.4.1 Eksempel

Differensialligningen

$$e^{-x}y' = (1 + y^2)$$

er separabel siden vi kan skrive den som

$$\frac{y'}{1 + y^2} = e^x.$$

La oss forsøke å løse denne ligningen. Dersom $y(x)$ er en løsning, så er

$$\frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} = e^x.$$

Tar vi integralet av begge sider, får vi

$$\int \frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} dx = \int e^x dx.$$

Vi innfører nå en ny variabel $y = y(x)$ i det første integralet. Da er $dy = y'(x) dx$, så

$$\int \frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} dx = \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctan y + C_1 = \arctan y(x) + C_1.$$

Regner vi ut det andre integralet, får vi

$$\int e^x dx = e^x + C_2.$$

Dermed blir ligningen

$$\arctan y(x) = e^x + C$$

der vi har slått sammen de to integrasjonskonstantene C_1 og C_2 til én. For å være en løsning av denne ligningen må

$$y(x) = \tan(e^x + C)$$

der C er en vilkårlig konstant. Løsningene til differensialligningen er altså funksjonene $y(x) = \tan(e^x + C)$ (kontroller ved innsetting!). ■

Bemerkning

I utregningene ovenfor spiller bokstaven y en dobbelt rolle – den symboliserer både en funksjon $y(x)$ og en ny integrasjonsvariabel y . Logikken hadde blitt klarere om vi hadde kalt den nye integrasjonsvariabelen u istedenfor y , men i praktiske regninger er det greiere å holde seg til den samme bokstaven.

Det er denne fremgangsmåten vi alltid bruker for å løse separable differensialligninger. La oss gjenta trinnene for den generelle ligningen

$$q(y)y' = p(x).$$

Vi integrerer på begge sider med hensyn på x :

$$\int q(y)y' dx = \int p(x) dx.$$

I dette uttrykket er y egentlig en funksjon av x , og innfører vi en ny variabel $y = y(x)$, får vi $dy = y'(x) dx$. Dermed blir ligningen

$$\int q(y) dy = \int p(x) dx.$$

Vi løser disse integralene og får

$$\begin{aligned} \int q(y) dy &= Q(y) + C_1 \\ \int p(x) dx &= P(x) + C_2 \end{aligned}$$

der Q og P er antideriverte til q og p . Dermed er

$$Q(y) = P(x) + C$$

(vi slår sammen integrasjonskonstantene). Til slutt løser vi denne ligningen for y (dersom det er mulig) og får svaret.

La oss se på et eksempel til.

10.4.2 Eksempel

Løs ligningen

$$xy' = y + xy.$$

Deler vi med xy , får vi

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + 1$$

som viser at ligningen er separabel. (Her må vi forutsette at $y \neq 0$ og $x \neq 0$. Vi skal komme tilbake til disse forutsetningene nedenfor.) Tar vi integralet av begge sider, får vi

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx.$$

Vi bytter variabel i det første integralet:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx.$$

Integrasjon gir

$$\ln |y| = \ln |x| + x + C.$$

For å løse denne ligningen, anvender vi eksponentialfunksjonen på begge sider:

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + x + C}.$$

Dette gir

$$|y| = e^C |x| e^x$$

eller om vi fjerner tallverditegnene

$$y = \pm e^C x e^x.$$

I dette uttrykket er C en vilkårlig konstant. Det betyr at e^C er en vilkårlig, *positiv* konstant og at $\pm e^C$ er en vilkårlig, ikke-null konstant. Altså er

$$y = D x e^x$$

der D er en vilkårlig ikke-null konstant. Men hva er galt med $D = 0$? Dette valget vil gi oss løsningen $y = 0$. Går vi tilbake til begynnelsen av eksemplet, ser vi at vi måtte ekskludere muligheten $y = 0$ da vi omformet ligningen. Det er derfor mulig at $y = 0$ er en løsning av den opprinnelige ligningen. Setter vi inn, ser vi at den passer. Altså blir den generelle løsningen

$$y = D x e^x$$

der D er en *vilkårlig* konstant. Ved innsetning ser vi at løsningen også gjelder for $x = 0$ selv om vi har ekskludert denne verdien under utregningen. ■

Vi tar med et eksempel til:

10.4.3 Eksempel

Finn løsningene til

$$e^{-x} y y' = -1.$$

Vi separerer variablene ved å gange ligningen med e^x :

$$y y' = -e^x.$$

Integrerer vi begge sider, ser vi at

$$\int y y' dx = \int -e^x dx.$$

Vi skifter variabel i første integral:

$$\int y dy = \int -e^x dx.$$

Regner vi ut integralene, får vi

$$\frac{1}{2} y^2 = -e^x + C$$

som gir

$$y = \pm \sqrt{D - 2e^x}$$

der $D = 2C$ er en vilkårlig konstant. Ligningen er løst. ■

La oss se litt nærmere på løsningene i det siste eksemplet. Til tross for at funksjonene i ligningen er definert for alle x , er løsningen bare definert når $D - 2e^x \geq 0$. Definisjonsområdet til løsningen avhenger altså av størrelsen på integrasjonskonstanten D .

Mens vi for lineære, førsteordens ligninger vet at løsningene eksisterer overalt hvor ligningen er definert, vil løsningsområdet for en separabel ligning variere fra løsning til løsning. Separable differensialligninger er *ikke-lineære* ligninger – en type ligninger som er atskillig vanskeligere å studere enn de lineære vi ellers har sett på. Holder vi oss til de separable ligningene, merker vi likevel ikke så mye til disse vanskelighetene – vi har vår løsningsmetode som i de aller fleste tilfeller gir oss den informasjonen vi trenger. La oss se hvordan det fungerer i noen praktiske eksempler.

10.4.4 Eksempel

I eksempel 10.2.1 så vi på en enkel modell for hvordan en dyrepopulasjon vokser. Vi antok at veksten var proporsjonal med bestanden, og viste at populasjonen da ville vokse eksponentielt. I det lange løp er en slik modell urealistisk; bestanden vil vokse over alle grenser og uttømme de tilgjengelige ressursene. I dette eksemplet skal vi se på en modell som tar hensyn til denne begrensningen. Modellen kalles ofte «logistisk vekst».

Anta at N er en øvre grense for den bestanden ressursene kan brødfø. Blir bestanden større enn N , rammes populasjonen av hungersnød, og bestanden avtar. Dersom $y(t)$ er bestandens størrelse ved tiden t , postulerer vi at

$$y'(t) = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{N} \right)$$

der r er en konstant. Så lenge y er liten sammenlignet med N , har vi tilnærmet

$$y'(t) = ry(t)$$

som er modellen for eksponentiell vekst. Når y vokser, blir den andre faktoren mindre, og veksten flater ut. Starter vi med en populasjon som er større enn N , er den andre faktoren negativ, og bestanden avtar.

La oss forsøke å løse ligningen. Antar vi at $y(t) \neq 0$ og $y(t) \neq N$, kan vi dele med $y(t)(1 - y(t)/N)$, og få

$$\frac{y'(t)}{y(t)(1 - y(t)/N)} = r$$

som er en separabel differensialligning. Vi tar integralet med hensyn på t :

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)(1 - y(t)/N)} dt = \int r dt.$$

Skifter vi variabel i det første integralet, får vi

$$\int \frac{1}{y(1 - y/N)} dy = \int r dt.$$

For å løse det første integralet bruker vi delbrøkkoppsettning. Siden

$$\frac{1}{y(1 - y/N)} = \frac{1}{y} + \frac{1/N}{1 - y/N} = \frac{1}{y} + \frac{1}{N - y}$$

er

$$\int \frac{1}{y(1-y/N)} dy = \ln|y| - \ln|N-y| + C = \ln\left|\frac{y}{N-y}\right| + C.$$

Dermed blir ligningen (husk logaritmeregelen $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$)

$$\ln\left|\frac{y}{N-y}\right| = rt + C.$$

Anvender vi eksponentialfunksjonen på begge sider, får vi

$$e^{\ln|y/(N-y)|} = e^{rt+C}.$$

Altså er

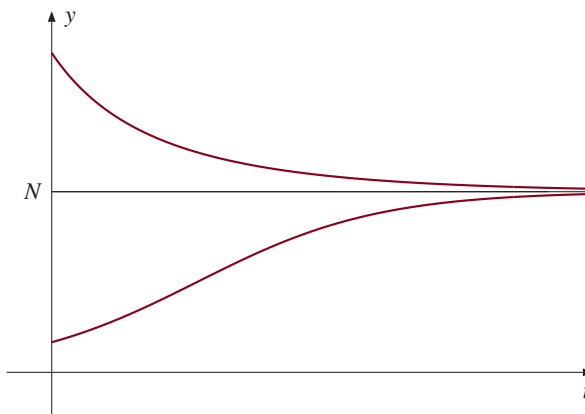
$$\frac{y}{N-y} = De^{rt}$$

der $D = \pm e^C$ er en ikke-null konstant. Løser vi denne ligningen for y , ser vi at

$$y = \frac{NDe^{rt}}{1 + De^{rt}}. \quad (1)$$

For å drøfte løsningene lønner det seg å dele på De^{rt} (husk at vi har antatt $D \neq 0$) slik at vi får

$$y = \frac{N}{1 + e^{-rt}/D},$$



Figur 10.4.1.

Vi ser at løsningene nærmer seg bæregrensen N når t går mot uendelig. Starter vi over N (det tilsvarer D negativ), nærmer vi oss N ovenfra, og starter vi under N (det tilsvarer D positiv), nærmer vi oss N nedenfra (se figur 10.4.1).

Svaret ovenfor er utledet under to forutsetninger, nemlig at $y(t) \neq 0$ og $y(t) \neq N$. Det er lett å sjekke at konstantene $y = 0$ og $y = N$ også er løsninger av ligningen. I tillegg viser (1) at dersom en løsning er forskjellig fra 0 eller N i ett punkt, så vil den også være forskjellig fra disse verdiene i alle andre punkter. ■

Ligningen i eksempelet ovenfor hører til en klasse differensialligninger som ofte dukker opp i anvendelser, nemlig

$$y' = ay^2 + by + c.$$

Antar vi at annengradsligningen $ay^2 + by + c = 0$ har to reelle røtter r_1 og r_2 , kan denne ligningen skrives

$$y' = a(y - r_1)(y - r_2).$$

Regninger av samme type som i eksempelet gir løsningene

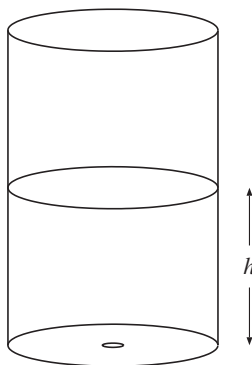
$$y = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{1 + Ce^{(r_2 - r_1)at}}$$

der C er en fritt valgt konstant (du blir bedt om å utlede denne formelen i oppgave 4 nedenfor). I tillegg har differensialligningen den konstante løsningen $y = r_1$. Du vil ha nytte av disse formlene i flere av oppgavene til denne seksjonen.

Vi avslutter med et eksempel der differensialligningen er enklere, men der det er mer arbeid med å sette den opp.

10.4.5 Eksempel

Torricellis lov sier at væske som strømmer ut av et lite hull i bunnen av et kar, har en fart som er proporsjonal med kvadratroten av høyden fra hullet til væskeoverflaten. Anta at vann strømmer ut av bunnen i et sylinderformet kar (se figur 10.4.2), og at det tar 10 minutter før tre fjerdedeler av vannet har rent ut. Hvor lang tid tar det før karet er tomt? (Torricellis lov er oppkalt etter den italienske fysikeren Evangelista Torricelli (1608–1647), best kjent som barometerets oppfinner. Vi skal utlede loven hans i bemerkningen nedenfor.)



Figur 10.4.2.

La $y(t)$ være vannvolumet i fatet ved tiden t , og la $h(t)$ være høyden. Da er

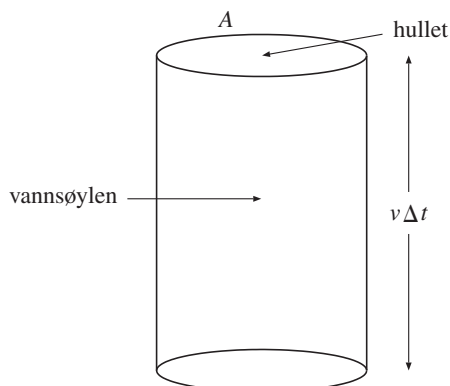
$$y(t) = \pi r^2 h(t)$$

som gir

$$h(t) = \frac{y(t)}{\pi r^2}.$$

Vannet som renner ut har en fart v som er proporsjonal med kvadratroten av høyden, og kaller vi proporsjonalitetsfaktoren k , får vi

$$v(t) = k\sqrt{h(t)} = \frac{k}{r\sqrt{\pi}}\sqrt{y(t)}.$$



Figur 10.4.3.

For å få satt opp differensialligningen må vi uttrykke volumendringen til vannet på to forskjellige måter. Vi vet at vannet forlater tønningen med en fart $v(t)$. Har hullet areal A , vil det vannet som forlater tønningen i løpet av et lite tidsrom Δt , danne et legeme med grunnflate A og høyde $v \Delta t$ (se figur 10.4.3). Vannmengden som renner ut har altså volum

$$Av(t)\Delta t.$$

Siden minkingen i vannmengde også kan uttrykkes som $y(t) - y(t + \Delta t)$, får vi ligningen

$$y(t) - y(t + \Delta t) = Av(t)\Delta t.$$

Deler vi på Δt , og lar deretter Δt gå mot null, får vi

$$-y'(t) = Av(t).$$

Setter vi inn $v(t) = \frac{k}{r\sqrt{\pi}}\sqrt{y(t)}$, får vi

$$-y'(t) = Av(t) = A\frac{k}{r\sqrt{\pi}}\sqrt{y(t)} = K\sqrt{y(t)}$$

der $K = A\frac{k}{r\sqrt{\pi}}$ er en konstant vi ikke kjenner.

For å løse denne ligningen, skriver vi den på formen

$$\frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} = -K.$$

Dette er separabel differensialligning, og integrerer vi på vanlig måte, får vi

$$2\sqrt{y(t)} = -Kt + C.$$

Løser vi for $y(t)$, ser vi at

$$y(t) = \left(-\frac{K}{2}t + D\right)^2$$

der $D = C/2$ er en vilkårlig konstant.

Neste trinn er å bestemme konstantene K og D . Kaller vi det opprinnelige volumet V , ser vi at

$$V = y(0) = \left(-\frac{K}{2} \cdot 0 + D\right)^2$$

$$\frac{V}{4} = y(10) = \left(-\frac{K}{2} \cdot 10 + D\right)^2.$$

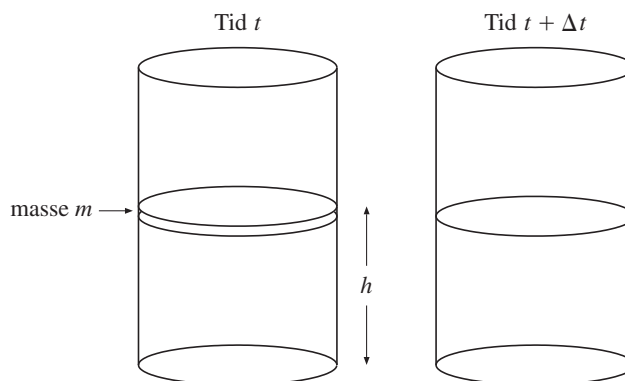
Løser vi disse ligningene, ser vi at $D = \sqrt{V}$ og $K = \sqrt{V}/10$. Dermed er

$$y(t) = \left(-\frac{\sqrt{V}}{20}t + \sqrt{V}\right)^2 = V\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2.$$

Dette uttrykket er 0 når $t = 20$, og følgelig tar det 20 minutter å tømme karet. Den siste fjerdedelen tar altså like lang tid som de første tre fjerdedelene til sammen. ■

Bemerkning

Utleddningen av Torricellis lov er så elegant at det ville være synd ikke å ta den med, selv om argumentet inneholder mer fysikk enn matematikk. På figur 10.4.4 ser vi på tanken ved tidspunktene t og $t + \Delta t$.



Figur 10.4.4.

Hvis m er massen som har rent ut i mellomtiden, er minskningen i potensiell energi lik mgh (siden den potensielle energien til det øverste laget er mgh). Antar vi at det ikke er noe friksjon, må dette energitapet gjenfinnes som kinetisk energi i det vannet som er rent ut. Denne energien er $\frac{1}{2}mv^2$, så vi må ha

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh.$$

Løser vi for v , får vi

$$v = \sqrt{2gh}$$

som er Torricellis lov med proporsjonalitetsfaktor $k = \sqrt{2g}$.

Et par bemerkninger er på sin plass. Vi har brukt antagelsen om at hullet er lite, til å se bort fra den kinetiske energien til vannet i karet (er hullet større, blir denne energien så stor at den ikke kan neglisjeres). Vår andre antagelse om at friksjonen kan neglisjeres, er mer tvilsom – det er rett og slett urealistisk i de fleste sammenhenger. Det viser seg imidlertid at Torricellis lov ofte gjelder ganske godt likevel, men med en mindre proporsjonalitetsfaktor enn $\sqrt{2g}$. Legg merke til at våre argumenter i eksemplet ikke avhenger av størrelsen på proporsjonalitetsfaktoren.

Oppgaver i seksjon 10.4

1. Løs differensialligningene:

a) $y' = yx^2$

b) $y' = \frac{x^2}{y^3}$

c) $(x + 1)y' + y^2 = 0$

d) $xyy' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$

e) $y' = \sqrt{y}x^3$

f) $(1 + x^2)y' + y^2 = 0$

2. Finn funksjonene som tilfredsstiller de gitte betingelsene.

a) $y' = 3yx$, $y(0) = 4$

b) $y' = x\sqrt{y}$, $y(4) = 5$

c) $y' = -\frac{y^2 + 1}{x^2 + 1}$, $y(0) = 2$

d) $(x^2 + x - 6)y' = y^{1/2} + y^{3/2}$, $y(0) = 4$

e) $y' + 2e^y = 0$, $y(0) = 0$

3. (UiO) Frysepunktet for saltvann er en funksjon av saltkonsentrasjonen. La $T(x)$ være frysepunktet til saltoppløsningen der x er konsentrasjonen av salt i vannet. Teoretiske betraktninger gir

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{aT^2}{b+x}$$

der a og b er positive konstanter. Løs differensialligningen gitt at $T(0) = T_0$.

4. (UiO) Utled formelen

$$y = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{1 + Ce^{(r_2 - r_1)at}}$$

rett før eksempel 10.4.5.

5. Denne oppgaven er en modifikasjon av eksempel 10.2.5. Vi ser på en gjenstand med masse m som faller under påvirkning av tyngdens akselerasjon g . Vi antar at luftmotstanden er proporsjonal med kvadratet av hastigheten v og at proporsjonalitetsfaktoren er c . Ifølge Newtons annen lov vil v da oppfylle differensialligningen

$$mv' = mg - cv^2$$

- Løs differensialligningen når $v(0) = 0$.
- Hvilken grensehastighet nærmer v seg når t vokser?
- Sett $m = 1$ kg og $g = 10$ m/s². Finn proporsjonalitetsfaktoren c når du vet at grensehastigheten i b) er 50 m/s.
- Finn konstanten k i eksempel 10.2.5 når grensehastigheten er 50 m/s (bruk fortsatt $m = 1$ kg og $g = 10$ m/s²). Sammenlign løsningen i denne oppgaven med den løsningen vi fant i eksempel 10.2.5, f.eks. ved å plote de to kurvene i samme koordinatssystem.

6. (UiO) La Q være en funksjon av tiden t ($t \geq 0$) og anta at Q tilfredsstiller differensialligningen

$$\frac{dQ}{dt} = nQ - sQ^2$$

der n og s er positive konstanter.

- Finn løsningen av denne differensialligningen med initialbetingelse $Q(0) = Q_0$.
- Tegn skisser som i grove trekk viser hvordan Q kan variere med tiden.
- Vekst av populasjoner av infusjonsdyret *Paramecium caudatum* har vist seg med god overensstemmelse å følge differensialligningen ovenfor, der $Q(t)$ nå betegner antall individer ved tiden t . I et forsøk valgte en å starte med $Q_0 = 100$ individer. Etter ca. 64 timer var det 10^4 individer, og etter ca én uke hadde populasjonen stabilisert seg på $2 \cdot 10^4$ individer. Bruk noen av disse dataene til å anslå verdier for konstantene n og s . Skisser grafen til Q .

7. (UiO) En modell for folketallet, p , i New York gir differensialligningen

$$\frac{dp}{dt} = 0.56p - 4.0 \cdot 10^{-8}p^2 - 16 \cdot 10^5 \quad \text{der } t \text{ måles i år.}$$

1/1-1960 var folketallet $6.0 \cdot 10^6$.

- Finn fra denne modellen folketallet i New York som funksjon av antall år etter 1/1-1960.
- Hva vil befolkningen stabilisere seg på etter lang tid?
- Når er vekstraten for folketallet størst? (*Hint*: Bruk differensialligningen.)

8. (UiO) I sosiologi hender det at man er interessert i å beskrive hvor fort en ny idé spres seg i en befolkning. Vi tenker oss en befolkning med et fast antall individer som vi antar er $P = 4 \cdot 10^7$. La $y = y(t)$ være en deriverbar funksjon som tilnærmet gir det antall individer som ved tiden t kjenner til den nye ideen. dy/dt kaller vi spredningsraten. La oss anta at spredningsraten til enhver tid er proporsjonal med produktet av antall individer som kjenner til ideen, og antall individer som ikke gjør det. Kall proporsjonalitetskonstanten k .

- Still opp en differensialligning for y . For hvilken verdi av y er spredningsraten størst?
- Anta at nøyaktig halvparten av befolkningen kjenner til ideen ved tiden $t = 0$. Anta videre at vi har $k = 0.25 \cdot 10^{-7}$ (år⁻¹). Finn y som funksjon av t .

9. (UiO) En dyrebestand består ved tiden $t = 0$ av $4 \cdot 10^3$ individer.

- Vi skal først betrakte en logistisk vekstmodell for denne dyrebestanden, og vi setter $\frac{dN}{dt} = 10^{-4}N(10^4 - N)$. Her er $N = N(t)$ antall individer t år etter tiden $t = 0$.

Finn fra dette et uttrykk for $N(t)$, og finn hvilken størrelse bestanden i det lange løp vil stabilisere seg på.

- Vi antar så at det drives jakt på bestanden og at det felles $2.1 \cdot 10^3$ dyr pr. år. Vi forandrer derfor modellen i pkt. a) idet vi setter

$$\frac{dN}{dt} = 10^{-4}N(10^4 - N) - 2.1 \cdot 10^3.$$

Finn hvilken størrelse bestanden vil stabilisere seg på ut fra dette. (Du skal her gå ut fra at jakten starter ved tiden $t = 0$, og at det fortsatt er $4 \cdot 10^3$ individer ved dette tidspunktet.)

- Anta at det drives jakt slik at differensialligningen i pkt. b) gjelder, men at det denne gang bare er $2 \cdot 10^3$ individer når jakten starter ved tiden $t = 0$. Vi vil da se at hele bestanden blir utryddet ved et gitt tidspunkt. Finn dette tidspunktet.

10. (UiO) Et vann er tynt befolket av et visst fiskeslag. La $x(t)$ være populasjonens størrelse (i antall) ved tiden t . Anta at sjansen for at en gitt fisk skal møte en vilkårlig annen fisk i et lite tidsintervall er proporsjonal med populasjonens størrelse.

- Anta at fødselsraten er proporsjonal med antall tilfeldige møter av to fisk og at dødsraten er proporsjonal med antall fisk, og vis at dette leder til differensialligningen

$$\frac{dx}{dt} = bx^2 - ax$$

der a, b er positive konstanter. Forklar spesielt fortolkningen av termene bx^2 og ax .

- Anta at den opprinnelige populasjonsstørrelsen er $x(0) = x_0$, og finn $x(t)$.

- c) Vis at det finnes en konstant k_0 slik at hvis $x_0 < k_0$, så vil populasjonen etter hvert dø ut, mens hvis $x_0 > k_0$, så vil populasjonen vokse over alle grenser på en endelig tid. Finn k_0 og denne endelige tiden.

Anta nå at fisken høstes med en konstant rate $c > 0$ fra tiden $t = 0$, slik at ligningen

$$\frac{dx}{dt} = bx^2 - ax - c$$

gjelder. Anta igjen at den opprinnelige populasjonsstørrelsen er $x(0) = x_0$, og anta at $x_0 > k_0$.

- d) Finn en verdi c_0 av c slik at fiskepopulasjonen holder seg konstant lik x_0 hvis fisken høstes med den konstante raten c_0 .

11. a) (UiO) Skisser grafen til funksjonen

$$z = f(u) = \ln \frac{1}{u} - u + 1 \quad \text{for } 0 < u \leq 1.$$

Begrunn at f har en omvendt funksjon g og skisser grafen til g på samme diagram.

- b) Michaelis-Mentens differensialligning brukes til å beskrive virkningen av et enzym i biokjemi. Differensialligningen er på formen

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{Vy}{K+y},$$

der V og K er konstanter. Vis at $y = y(t)$ tilfredsstiller ligningen

$$K \ln[y(t)] + y(t) = -Vt + C$$

for en konstant C .

- c) Sett $K = V = C = 1$. Begrunn at $y(0) = 1$. Hvor lang tid t tar det før $y(t) = 1/2$? Finn $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ og bruk den grafiske framstillingen i a) til å finne en tilnærmet verdi for $y(2)$.

12. (UiO) En fiskebestand er fredet og antas å følge den logistiske vekstmodell

$$\frac{dN}{dt} = rN(K - N)$$

hvor $N(t)$ er bestandens størrelse ved tiden t og hvor r og K er positive konstanter.

Fredningen oppheves og ved avtale blir det vedtatt at det skal fiskes en mengde F per tidsenhet. Vi velger å skrive

$$F = rs \frac{K^2}{4}$$

hvor s er en konstant som oppfyller $0 < s < 1$.

- a) Vis at funksjonen N nå vil oppfylle differensialligningen

$$\frac{dN}{dt} = r(K_1 - N)(N - K_2)$$

hvor K_1 og K_2 er gitt ved

$$K_1 = \frac{K}{2}(1 + \sqrt{1-s}), \quad K_2 = \frac{K}{2}(1 - \sqrt{1-s}).$$

- b) Finn den løsning av ovenstående ligning som oppfyller initialbetingelsene $N(0) = N_0$.
- c) Anta at $N_0 < K_2$. Vis at N er avtagende og avgjør når vi får «svart hav», det vil si når $N(t) = 0$.

- 13.** a) (UiO) Bestem eventuelle nullpunkter, maksimumspunkter og vendepunkter for funksjonen

$$h(t) = e^{-0.1t} - e^{-0.5t}.$$

- b) Skisser grafen til funksjonen $h(t)$ med t i intervallet $[0, 24]$. Velg 1 cm som enhet på t -aksen og 10 cm som enhet på den andre aksene.

En del medikamenter anvendes på den måten at en dose av stoffet innsprøytes under huden, for der langsomt å absorberes i blodet. Vi tenker oss at 10 enheter av et stoff A innsprøytes kl. 7.00. La $g(t)$ være det antall enheter som finnes i blodet t timer etter innsprøytingen, og la $f(t)$ være det antall enheter som ennå ikke er absorbert i blodet. Det antas at det til enhver tid foregår en viss nedbrytning av stoffet som er absorbert i blodet. Vi stiller opp følgende differensialligningsmodell:

$$\frac{df(t)}{dt} = -kf(t), \quad \frac{dg(t)}{dt} = kf(t) - lg(t)$$

der k og l er positive konstanter som forutsettes å være forskjellige.

- c) Løs dette ligningssystemet med initialbetingelsene

$$f(0) = 10 \text{ enheter} \quad \text{og} \quad g(0) = 0 \text{ enheter.}$$

- d) Sett nå $k = 0.1 \text{ time}^{-1}$ og $l = 0.5 \text{ time}^{-1}$. Hvor mange enheter av stoffet A finnes det i blodet kl. 17.00 samme dag?
- e) Vi tenker oss at konsentrasjonen av stoffet A i blodet ikke ved noe tidspunkt må overstige 5 enheter. Hva er den største dose en kan tillate innsprøytet på en gang?

- 14.** (UiO) Torricellis lov sier at væskehøyden $y(t)$ ved tiden t over utløpsrøret i en tank der det horisontale tverrsnitt ved høyden y har areal $A(y)$, oppfyller differensialligningen

$$A(y) \cdot \frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy},$$

der g er tyngdens akselerasjon og a er en konstant som bl.a. avhenger av utløpsrørets diameter.

Vi antar nå at tanken er det området som ligger innenfor omdreiningsflaten som framkommer når kurven $y = x^2$ roteres om y -aksen. Ved tiden $t = 0$ er væskehøyden i denne tanken $y_0 = 10$. Hvor lang tid tar det før tanken er tom hvis vi antar at enhetene er valgt slik at $a\sqrt{2g} = 1$?

15. I samfunnsvitenskapene kalles funksjoner av typen

$$f(t) = Ce^{ae^{-kt}}$$

der C, a, k er konstanter, $k > 0$, for *Gompertz-funksjoner*.

a) Løs differensialligningen

$$y' + 3e^{-2t}y = 0$$

og vis at løsningene er Gompertz-funksjoner.

I 1972 publiserte sosiologen Gudmund Hernes en studie av giftemålsalderen. Hvis $y(t)$ angir andelen av befolkningen som har giftet seg før de fyller $18 + t$ år, kom Hernes frem til differensialligningen

$$y' = be^{-kt}y(1 - y)$$

der b og k er positive konstanter.

b) Løs denne differensialligningen.

c) Vis at alle løsningene bortsett fra én kan skrives som

$$y(t) = \frac{1}{1 - f(t)}$$

der $f(t) = Ce^{\frac{b}{k}e^{-kt}}$ er en Gompertz-funksjon. Finn $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ uttrykt ved C . Verdiene til konstantene b og k avhenger av hvilken befolkningsgruppe vi ser på. For amerikanere med universitetsutdanning gir $b = 1.53$ og $k = 0.17$ god tilnærming til observerte data. Vi regner at det i denne befolkningsgruppen er en andel på 0.1 som aldri gifter seg.

d) Anslå hvor stor del det er av denne befolkningsgruppen som gifter seg før de fyller 18 år (husk at $t = 0$ svarer til 18 års alder).

16. a) (UiO) En kurve $y = y(x)$ har den egenskapen at tangenten i ethvert punkt (x, y) på kurven skjærer x -aksen i punktet $(x^2, 0)$. Vis at y oppfyller differensialligningen

$$y'(x^2 - x) + y = 0.$$

b) Finn den generelle løsningen av ligningen i a) og bestem så en partikulær løsning slik at $y'(0) = 1$.

c) La $y(x)$ være den partikulære løsningen fra punkt b). For hvilke valg av startpunkt x_0 vil Newtons metode for ligningen $y(x) = 0$ konvergere?

17. (UiO) I denne oppgaven skal vi studere en modell for dannelsen av sosiale normer for hensynfulle røykevaner. En røyker som viser hensyn overfor ikke-røykere, oppnår en høyere sosial status, men samtidig medfører det å ta hensyn personlige ulemper for røykeren. I denne oppgaven skal vi si at en røyker er hensynfull dersom han ikke røyker inne uten å spørre om tillatelse først. Vi lar $x(t)$ angi andelen av røykere som er hensynfulle ved tidspunktet t . Karine Nyborg og Mari Rege stiller i artikkelen «The

Evolution of Considerate Smoking Behavior»opp følgende separable differensialligning for $x(t)$:

$$x'(t) = kx(t)(1 - x(t))(x(t) - b)$$

der k og b er konstanter som er avhengig av blant annet hvor mange som røyker, røykelovgivning, folks oppfattelse av helseskadene ved å røyke osv.

a) Anta at $0 < b < 1$ og $k > 0$. Vis at dersom $x(t)$ ligger mellom 0 og b , så vil $x(t)$ være en avtagende funksjon. I 1988 ble røykelovgivningen i Norge endret, og samtidig ble folk mer bevisst på helseskadene ved å røyke. Dette førte til endringer i konstantene k og b .

b) Anta nå at $b = 0$. Vis at da er

$$\ln\left(\frac{x(t)}{1 - x(t)}\right) - \frac{1}{x(t)} = kt + C$$

der C er en konstant (du kan ikke regne med å løse denne ligningen med hensyn på $x(t)$). Spørreundersøkelser viser at bare 25 % var hensynsfulle i 1989, mens andelen var steget til 90 % i 1999. La t være målt i år og sett $t = 0$ i 1989.

c) Hva er $x(0)$ og $x(10)$? Anslå hvilket år halvparten av røykerne var hensynsfulle. Hva skjer med $x(t)$ etter lang tid?

18. (UiO) En deriverbar funksjon f er definert for $x > 0$, og tilfredsstiller ligningen

$$[f(x)]^2 = \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt. \quad (1)$$

a) Vis at da må $y = f(x)$ også tilfredsstille differensialligningen

$$yy' = \frac{y - y^2}{2x}, \quad x > 0.$$

b) Finn alle løsninger av (1).

19. En differensialligning kalles *prosjektiv* (eller homogen) dersom den kan skrives på formen

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (*)$$

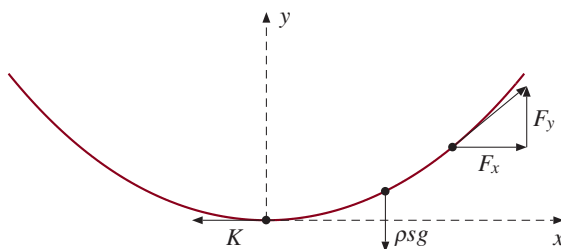
for en funksjon F . Vis at dersom y er en løsning av (*), så er $u(x) = y(x)/x$ en løsning av en separabel ligning. Bruk dette trikset til å løse ligningene nedenfor.

a) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

b) $x^2 y' = y^2 + xy$

c) $xyy' = 2y^2 - x^2$

20. (Denne oppgaven bruker funksjonene \sinh og \cosh fra den *-merkede seksjonen *7.7) En kabel eller ledning er hengt opp i begge ender. Vi skal finne en formel for den kurven som kabelen beskriver. Vi legger inn et koordinatsystem med origo i bunnpunktet til kabelen, og ser på den delen av kabelen som går fra origo til punktet med første koordinat x . På denne delen av kabelen virker det tre krefter – tyngdekraften og kabeldraget i de to endepunktene. Siden kabelen henger i ro, må disse kreftene oppheve hverandre. Vi forutsetter at kabelen ikke er stiv – det vil si at kabeldraget virker parallelt med kabelen.



Dersom kabelen har en tetthet på ρ kg/m, er tyngdekraften ρsg , der s er lengden av kablesegment og g er tyngdens akselerasjon. Denne kraften må oppheves av vertikalkomponenten av kabeldraget, så $F_y = \rho sg$. Siden horisontalkomponentene også må oppheve hverandre, er $F_x = K$.

- a) Forklar hvorfor

$$y' = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\rho sg}{K}$$

der $y(x)$ er kurven som kabelen beskriver.

- b) Vis at ligningen i a) kan omformes til

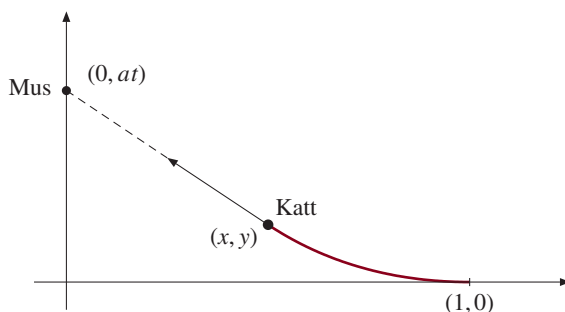
$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2},$$

der $a = \rho g/K$ er en konstant.

- c) Løs differensialligningen $u' = a\sqrt{1 + u^2}$, $u(0) = 0$.

- d) Vis at $y(x) = \cosh(ax)/a$.

21. (UiO) En katt jager en mus som løper langs en vegg med konstant hastighet a . Katten kommer løpende gjennom rommet slik at den til enhver tid har retning rett mot musen. Farten er konstant lik b . Vi legger et koordinatsystem i rommet slik at ved tiden $t = 0$ er musen i origo og katten i $(1, 0)$. y -aksen legges langs vegg. Ved tiden t vil musen ha posisjon $(0, at)$ og katten posisjon (x, y) . Vi skal studere kattens plassering $(x, y(x))$.



- a) Vis at

$$x \frac{dy}{dx} - y = -at.$$

b) Vis at

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = k \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

der $k = a/b$. (Hint: Husk at for bevegelse langs en kurve er hastigheten gitt ved buelengden derivert m.h.p. tiden. Her er $|ds|/dt = b$, og buelengdesegmentet $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ hvis x brukes som parameter. Pass på fortegnet!)

c) Bestem y som funksjon av x . (Hint: $\int dp/\sqrt{1+p^2} = \ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \operatorname{arsinh} p$.) Anta at $a = 1.5$, og at $b = 2.0$, og at det står en musefelle på y -aksen ved $y = 2$. Vil musen bli fanget av katten eller vil den gå i fella først? Svaret skal begrunnes!

10.5 Annenordens, homogene ligninger med konstante koeffisienter

De differensialligningene vi hittil har studert, kalles *førsteordens* fordi de bare inneholder den førstederiverte til den ukjente funksjonen y . I dette avsnittet skal vi se på *annenordens* ligninger som også inneholder den annenderiverte til y . Generelt er en *annenordens, lineær differensialligning* en ligning på formen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$$

der p , q og h er kjente funksjoner. Ligningen kalles *homogen* dersom $h(x)$ er null (for alle x), og vi sier at den har *konstante koeffisienter* dersom p og q er konstante. En *annenordens, homogen ligning med konstante koeffisienter* har altså formen

$$y'' + py' + qy = 0$$

der p og q er kjente, reelle tall. Det er disse ligningene vi skal studere i denne seksjonen, mens vi i neste seksjon skal studere inhomogene ligninger av typen

$$y'' + py' + qy = h(x).$$

En del av teknikkene vi skal benytte, kan også brukes på ligninger hvor koeffisientene ikke er konstante, men vi skal bare berøre dette i enkelte oppgaver. Som du snart vil oppdage, er det en sterk analogi mellom den teorien vi nå skal utvikle, og teorien for differensligninger i kapittel 4.

La oss starte med en annenordens, homogen ligning

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

med konstante koeffisienter. En *løsning* av (1) er en funksjon $y(x)$ slik at

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Det første resultatet forteller oss at dersom vi kan finne to løsninger, så kan vi automatisk generere uendelig mange andre løsninger (sammenlign med lemma 4.1.4).

10.5.1 Lemma

Anta at y_1 og y_2 er to løsninger av (1). Da er også

$$y(x) = Cy_1(x) + Dy_2(x)$$

en løsning for alle valg av konstanter C og D .

Bevis: Siden $y' = Cy_1' + Dy_2'$ og $y'' = Cy_1'' + Dy_2''$, er

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (Cy_1'' + Dy_2'') + p(Cy_1' + Dy_2') + q(Cy_1 + Dy_2) \\ &= C(y_1'' + py_1' + qy_1) + D(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= C \cdot 0 + D \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dette viser at y er en løsning av ligningen. ■

Men hvordan finner vi to løsninger y_1 og y_2 som vi kan bruke til å generere alle de andre? La oss gå ned et hakk i vanskelighetsgrad og studere *førsteordens*, homogene ligninger med konstante koeffisienter

$$y' + by = 0.$$

Denne ligningen er et enkelt eksempel på de ligningene vi allerede har studert, og et lite regnestykke forteller oss at løsningen er $y = Ce^{-bx}$. Førsteordens ligninger har altså eksponentialfunksjoner som løsninger. Har vi litt flaks, gjelder det samme for annenordens ligninger. Vi prøver oss med $y(x) = e^{rx}$, der r er en konstant. Da er $y' = re^{rx}$ og $y'' = r^2e^{rx}$. Setter vi inn i venstresiden i ligning (1), får vi

$$y'' + py' + qy = r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = e^{rx}(r^2 + pr + q).$$

Skal dette være null for alle x , må $r^2 + pr + q = 0$, det vil si at r må være rot i den *karakteristiske ligningen*

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Denne ligningen kan ha to, én eller ingen reelle røtter, og vi skal drøfte disse mulighetene hver for seg.

Tilfelle 1: To reelle røtter

Anta at den karakteristiske ligningen har to (forskjellige) reelle røtter r_1 og r_2 . Ifølge regningene ovenfor og lemma 10.5.1 er funksjonen

$$y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}$$

en løsning av differensialligningen for alle valg av konstanter C og D .

10.5.2 Eksempel

Finn løsninger av differensialligningen $y'' - y' - 6y = 0$.

Den karakteristiske ligningen er $r^2 - r - 6 = 0$ som har røttene $r_1 = -2$ og $r_2 = 3$. Dermed er

$$y = Ce^{-2x} + De^{3x}$$

en løsning av differensialligningen for alle valg av konstanter C og D . ■

Det neste spørsmålet er om vi har funnet alle løsningene, eller om det også finnes noen som ikke er på formen

$$y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}.$$

Det viser seg at vi har funnet alle, men beviset er ganske vanskelig og du kan godt hoppe over det. Vær imidlertid klar over at det illustrerer en generell teknikk som ofte er nyttig.

10.5.3 Setning

Anta at den karakteristiske ligningen til

$$y'' + py' + qy = 0$$

har to reelle røtter r_1 og r_2 . Da er alle løsningene på formen

$$y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}.$$

***Bevis:** Vi observerer først at siden den karakteristiske ligningen $r^2 + pr + q = 0$ har røttene r_1 og r_2 , må

$$r^2 + pr + q = (r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1r_2$$

Sammenligner vi koeffisientene foran r i uttrykkene helt til venstre og helt til høyre, ser vi at

$$r_1 + r_2 = -p.$$

Vi skal få bruk for den relasjonen mot slutten av beviset.

Anta nå at y er en vilkårlig løsning av differensialligningen. Vi må vise at y er på formen

$$y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}$$

for et passende valg av C og D . Knepet er å innføre en hjelpefunksjon $u = y/e^{r_1x}$. Siden $y = ue^{r_1x}$, får vi ved produktregelen

$$\begin{aligned} y' &= u'e^{r_1x} + ur_1e^{r_1x} \\ y'' &= u''e^{r_1x} + 2u'r_1e^{r_1x} + ur_1^2e^{r_1x}. \end{aligned}$$

Vi har antatt at y er en løsning av differensialligningen, så

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + py' + qy = u''e^{r_1x} + 2u'r_1e^{r_1x} + ur_1^2e^{r_1x} \\ &\quad + p(u'e^{r_1x} + ur_1e^{r_1x}) + que^{r_1x} \\ &= ue^{r_1x}(r_1^2 + pr_1 + q) + u''e^{r_1x} + 2u'r_1e^{r_1x} + pu'e^{r_1x} \\ &= 0 + [u'' + (2r_1 + p)u']e^{r_1x} \\ &= [u'' + (2r_1 + p)u']e^{r_1x}. \end{aligned}$$

Altså må

$$u'' + (2r_1 + p)u' = 0.$$

Her er vi ved poenget i beviset – hjelpefunksjonen u tilfredsstiller en enklere differensialligning enn den opprinnelige. Ved å løse denne ligningen finner vi først u og

deretter y . Før vi begynner, observerer vi at siden $r_1 \neq r_2$, så er $2r_1 + p \neq 0$ (dette følger fra relasjonen $r_1 + r_2 = -p$).

For å finne u , innfører vi en ny funksjon $z = u'$. Da er $u'' = z'$, så ligningen ovenfor kan skrives

$$z' + (2r_1 + p)z = 0.$$

Dette er en førsteordens, lineær differensialligning av den typen vi har løst tidligere. Den integrerende faktoren er $e^{(2r_1+p)x}$, og gjennomfører vi regningene, ser vi at den generelle løsningen er

$$z = Ke^{-(2r_1+p)x}$$

der K er en vilkårlig konstant. Siden vår z er én av disse løsningene, må den være på formen

$$z = Ke^{-(2r_1+p)x}$$

for en spesiell konstant K . Siden $z = u'$, er u en antiderivert av $Ke^{-(2r_1+p)x}$, det vil si at u er på formen

$$u = -\frac{K}{2r_1 + p}e^{-(2r_1+p)x} + C = De^{-(2r_1+p)x} + C$$

der C og $D = -K/(2r_1 + p)$ er to konstanter.

Siden $y = ue^{r_1x}$, får vi

$$y = ue^{r_1x} = (De^{-(2r_1+p)x} + C)e^{r_1x} = De^{-(r_1+p)x} + Ce^{r_1x}.$$

Vi observerte innledningsvis at $r_1 + r_2 = -p$, og følgelig er $-(r_1 + p) = r_2$. Dermed er

$$y = De^{r_2x} + Ce^{r_1x}$$

akkurat som vi skulle vise. ■

Bemerkning

Det er bryet verd å legge merke til strategien i beviset ovenfor. Vi startet med én løsning y_1 av differensialligningen (i dette tilfellet $y_1 = e^{r_1x}$) og ønsket å finne en vilkårlig annen løsning. Den deriverte $z = u'$ av hjelpefunksjonen $u = y/y_1$ viste seg å tilfredsstillte en differensialligning av lavere grad enn den opprinnelige, og ved å løse denne, fant vi først u og deretter y . Denne strategien viser seg å fungere for en stor klasse differensialligninger. Kjenner vi først én løsning, kan vi bruke den til å finne den generelle løsningen. Teknikken kalles ofte «reduksjon av ordenen» siden den reduserer ordenen til den differensialligningen vi er nødt til å løse.

Ved hjelp av setningen ovenfor kan vi bevise et eksistens- og entydighetsresultat for ligningene våre.

10.5.4 Setning

Anta at den karakteristiske ligning til

$$y'' + py' + qy = 0$$

har to reelle røtter r_1 og r_2 . La c , d og e være fritt valgte, reelle tall. Da finnes det nøyaktig én løsning av differensialligningen slik at

$$y(c) = d \quad \text{og} \quad y'(c) = e.$$

Vi kan med andre ord bestemme løsningen ved å angi hvilke verdier y og y' skal ha i et fritt valgt punkt.

Bevis: Ifølge setningen ovenfor vet vi at løsningene er gitt ved

$$y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}.$$

Vi ser at $y(c) = Ce^{r_1c} + De^{r_2c}$, mens $y'(c) = Cr_1e^{r_1c} + Dr_2e^{r_2c}$. Skal ligningene $y(c) = d$ og $y'(c) = e$ være oppfylt, må altså

$$Ce^{r_1c} + De^{r_2c} = d \quad \text{og} \quad Cr_1e^{r_1c} + Dr_2e^{r_2c} = e.$$

Løser vi dette ligningsettet for C og D , får vi

$$C = \frac{e - r_2d}{r_1 - r_2}e^{-r_1c} \quad \text{og} \quad D = \frac{e - r_1d}{r_2 - r_1}e^{-r_2c}.$$

Siden ligningsettet har nøyaktig én løsning, er det nøyaktig én løsning av differensialligningen som tilfredsstiller de gitte kravene. ■

Bemerkning

Legg merke til at setningen ovenfor skiller seg fra setning 10.3.1 ved at vi nå legger krav på både $y(c)$ og $y'(c)$. I en viss forstand gjenspeiler dette bare at vi nå har to konstanter C og D å bestemme, og at vi derfor trenger to ligninger istedenfor én. Vi skal senere se at det også gjenspeiler hva slags fysiske prosesser de to ligningstypene modellerer.

10.5.5 Eksempel

Finn den løsningen til differensialligningen

$$y'' + y' - 2y = 0$$

som tilfredsstiller initialkravene $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Den karakteristiske ligningen

$$r^2 + r - 2 = 0$$

har løsningene $r_1 = 1$ og $r_2 = -2$. Den generelle løsningen er derfor

$$y = Ce^x + De^{-2x}.$$

Deriverer vi, får vi

$$y' = Ce^x - 2De^{-2x}.$$

Ligningene som må oppfylles, er altså

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C + D \\ 0 &= y'(0) = C - 2D. \end{aligned}$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $D = 1/3$, $C = 2/3$. Løsningen vi er på jakt etter, er altså

$$y = \frac{2}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-2x}.$$



Tilfelle 2: Én reell rot

Anta nå at den karakteristiske ligningen $r^2 + pr + q = 0$ bare har én rot r_1 . Da vet vi at $y = e^{r_1x}$ er en løsning av differensialligningen, men vi trenger en løsning til før vi kan bruke lemma 10.5.1 til å finne alle løsninger. Det viser seg at den andre løsningen er $y = xe^{r_1x}$. La oss først vise at dette er en løsning av differensialligningen.

Vi observerer først at siden r_1 er den eneste roten i den karakteristiske ligningen, så er

$$r^2 + pr + q = (r - r_1)^2 = r^2 - 2r_1r + r_1^2$$

for alle r . Dette betyr at $p = -2r_1$ og $q = r_1^2$, og at differensialligningen derfor kan skrives

$$y'' - 2r_1y' + r_1^2y = 0.$$

Før vi sjekker om funksjonen $y = xe^{r_1x}$ passer i denne ligningen, regner vi ut

$$\begin{aligned} y' &= e^{r_1x} + r_1xe^{r_1x} \\ y'' &= 2r_1e^{r_1x} + r_1^2xe^{r_1x}. \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i ligningen, får vi

$$y'' - 2r_1y' + r_1^2y = 2r_1e^{r_1x} + r_1^2xe^{r_1x} - 2r_1(e^{r_1x} + r_1xe^{r_1x}) + r_1^2xe^{r_1x} = 0.$$

Altså er $y = xe^{r_1x}$ en løsning av differensialligningen. Kombinerer vi dette med lemma 10.5.1, får vi setning 10.5.6.

10.5.6 Setning

Dersom den karakteristiske ligningen til $y'' + py' + qy = 0$ bare har én rot r_1 , så er alle funksjoner på formen

$$y = Ce^{r_1x} + Dxe^{r_1x}$$

løsninger av differensialligningen.

10.5.7 Eksempel

Finn løsninger av differensialligningen $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Den karakteristiske ligningen $r^2 - 4r + 4 = 0$ har $r_1 = 2$ som eneste løsning. Dermed er

$$y = Ce^{2x} + Dxe^{2x}$$

en løsning for alle valg av konstanter C og D . ■

Det er to naturlige spørsmål vi kan stille oss. Det ene er om vi nå har funnet alle løsningene, og det andre er hvordan man har kommet på at $y = xe^{r_1x}$ er en løsning av differensialligningen. Beviset for neste setning besvarer begge spørsmålene. Vi skal benytte den samme strategien som i beviset for setning 10.5.3 («reduksjon av ordenen»), men regningene er enklere denne gangen.

10.5.8 Setning

Dersom den karakteristiske ligningen til $y'' + py' + qy = 0$ bare har én rot r_1 , så er alle løsningene til differensialligningen på formen

$$y = Ce^{r_1x} + Dxe^{r_1x}.$$

Bevis: Anta at y er en vilkårlig løsning av differensialligningen. Vi må vise at

$$y = Ce^{r_1x} + Dxe^{r_1x}$$

for passende valg av konstanter C og D . Knepet er å innføre en hjelpefunksjon $u = y/e^{r_1x}$. Siden $y = ue^{r_1x}$, får vi ved produktregelen

$$\begin{aligned} y' &= u'e^{r_1x} + ur_1e^{r_1x} \\ y'' &= u''e^{r_1x} + 2u'r_1e^{r_1x} + ur_1^2e^{r_1x}. \end{aligned}$$

Vi har antatt at y er en løsning av differensialligningen, så

$$\begin{aligned} 0 = y'' + py' + qy &= u''e^{r_1x} + 2u'r_1e^{r_1x} + ur_1^2e^{r_1x} + p(u'e^{r_1x} + ur_1e^{r_1x}) + que^{r_1x} \\ &= ue^{r_1x}(r_1^2 + pr_1 + q) + u''e^{r_1x} + 2u'r_1e^{r_1x} + pu'e^{r_1x} \\ &= 0 + [u'' + (2r_1 + p)u']e^{r_1x} \\ &= [u'' + (2r_1 + p)u']e^{r_1x}. \end{aligned}$$

Altså må

$$u'' + (2r_1 + p)u' = 0.$$

Ovenfor så vi at når r_1 er en dobbelt rot, så er $p = -2r_1$. Dermed er

$$u'' = 0.$$

Dette betyr at $u' = D$ og $u = Dx + C$ for passende konstanter D og C . Siden $y = ue^{r_1x}$, får vi

$$y = ue^{r_1x} = (Dx + C)e^{r_1x} = Dxe^{r_1x} + Ce^{r_1x}$$

akkurat som vi skulle vise. ■

Bemerkning

Dersom vi ikke hadde visst om løsningen $y = xe^{r_1x}$, ville dette beviset ha funnet den for oss.

Ved hjelp av setning 10.5.8 kan vi vise følgende parallell til setning 10.5.4:

10.5.9 Setning

Anta at den karakteristiske ligningen til

$$y'' + py' + qy = 0$$

bare har en rot r_1 . La c , d og e være fritt valgte, reelle tall. Da finnes det nøyaktig én løsning av differensialligningen slik at

$$y(c) = d \quad \text{og} \quad y'(c) = e.$$

Beviset har nøyaktig samme idé som beviset for setning 10.5.4, og overlates til leserne.

10.5.10 Eksempel

Finn en løsning av differensialligningen $y'' - 4y' + 4y = 0$ slik at $y(1) = 0$ og $y'(1) = -2$.

Fra eksempel 10.5.7 vet vi at den generelle løsningen er

$$y = Ce^{2x} + Dxe^{2x}.$$

Dermed er $y' = 2Ce^{2x} + De^{2x} + 2Dxe^{2x} = 2Ce^{2x} + D(1 + 2x)e^{2x}$, og skal initialkravene være oppfylt, må

$$\begin{aligned} 0 &= y(1) = Ce^2 + De^2 \\ -2 &= y'(1) = 2Ce^2 + 3De^2. \end{aligned}$$

Løser vi dette ligningsettet for C og D (gjør det!), får vi $C = 2e^{-2}$, $D = -2e^{-2}$. Funksjonen vi er på jakt etter, er dermed

$$y = 2e^{2x-2} - 2xe^{2x-2}.$$

**Tilfelle 3: To komplekse røtter**

Vi har nå kommet frem til det tilfellet hvor den karakteristiske ligningen

$$r^2 + pr + q = 0$$

har to komplekse røtter r_1 og r_2 . Siden p og q er reelle, vet vi fra kapittel 3 at disse røttene er komplekskonjugerte av hverandre, det vil si at

$$r_1 = a + bi \quad \text{og} \quad r_2 = a - bi$$

der a og b er reelle tall.

Ifølge de regningene vi startet denne seksjonen med, burde

$$y = Ee^{r_1x} + Fe^{r_2x}$$

være løsninger av differensialligningen for alle valg av konstanter E og F . Men disse uttrykkene er vanligvis komplekse, og vi er normalt bare interessert i reelle løsninger. La oss se om vi kan velge E og F slik at løsningene blir reelle.

Bruker vi definisjonen av den komplekse eksponentialfunksjonen i seksjon 3.3, ser vi at

$$e^{r_1x} = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

og

$$e^{r_2x} = e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$$

som betyr at e^{r_1x} og e^{r_2x} er komplekskonjugerte av hverandre. Velger vi $E = A + iB$ og $F = A - iB$ til å være komplekskonjugerte av hverandre, blir også summen $y = Ee^{r_1x} + Fe^{r_2x}$ reell. Vi får

$$\begin{aligned} y &= Ee^{r_1x} + Fe^{r_2x} \\ &= (A + iB)e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) \\ &\quad + (A - iB)e^{ax}(\cos bx - i \sin bx) \\ &= 2Ae^{ax} \cos bx - 2Be^{ax} \sin bx. \end{aligned}$$

Siden A og B er vilkårlige reelle tall, betyr dette at alle funksjoner av typen

$$y = e^{ax}(C \cos bx + D \sin bx)$$

der C og D er reelle tall, burde være løsninger av differensialligningen (er du i tvil, kan du sjekke ved innsetning).

La oss oppsummere:

10.5.11 Setning

Dersom den karakteristiske ligningen til $y'' + py' + qy = 0$ har to komplekse røtter $r_1 = a + ib$ og $r_2 = a - ib$, så er alle funksjoner på formen

$$y = e^{ax}(C \cos bx + D \sin bx)$$

løsninger.

10.5.12 Eksempel

Finn løsninger av differensialligningen $y'' + 2y' + 4y = 0$.

Den karakteristiske ligningen $r^2 + 2r + 4 = 0$ har løsninger $r = -1 \pm i\sqrt{3}$. Dermed er

$$y = e^{-x}[C \cos(\sqrt{3}x) + D \sin(\sqrt{3}x)]$$

en løsning av differensialligningen for alle valg av C og D . ■

Akkurat som i de to tidligere tilfellene kan vi spørre om vi nå har funnet alle løsningene, og svaret er nok en gang ja. Beviset vi har gitt tidligere, kan tilpasses den nye situasjonen. Vi har også et eksistens- og entydighetsresultat.

10.5.13 Setning

Anta at den karakteristiske ligning til

$$y'' + py' + qy = 0$$

har to komplekse røtter r_1 og r_2 . La c , d og e være fritt valgte, reelle tall. Da finnes det nøyaktig én løsning av differensialligningen slik at

$$y(c) = d \quad \text{og} \quad y'(c) = e.$$

Beviset er som i de to foregående tilfellene.

Til slutt tar vi med en omskrivning som ofte er nyttig i fysiske anvendelser. Løsningene

$$y = e^{ax}(C \cos bx + D \sin bx)$$

kan også skrives på *faseform*

$$y = Ae^{ax} \sin(bx + \phi)$$

der $A = \sqrt{C^2 + D^2}$ kalles *amplituden* og der *fasen* ϕ er bestemt ved at

$$\sin \phi = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}}$$

og

$$\cos \phi = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}.$$

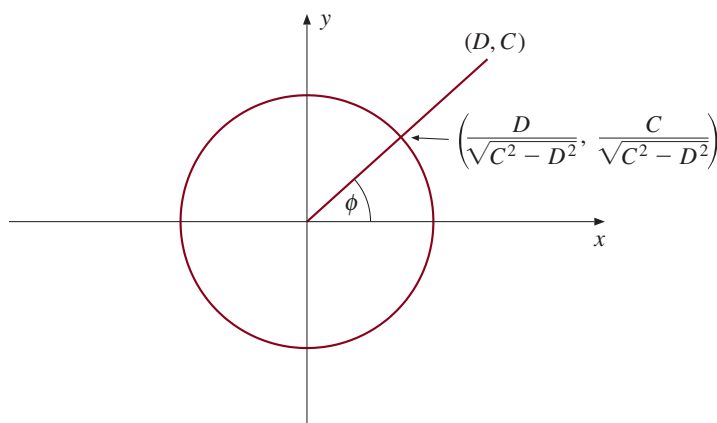
Dette følger umiddelbart fra den trigonometriske identiteten

$$C \cos bx + D \sin bx = A \sin(bx + \phi).$$

Denne identiteten burde være kjent fra skolematematikken, men for ordens skyld tar vi med en utledning:

Vi begynner med å skrive

$$\begin{aligned} & C \cos bx + D \sin bx \\ &= \sqrt{C^2 + D^2} \left(\frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \cos bx + \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}} \sin bx \right) \quad (2) \end{aligned}$$



Figur 10.5.1.

Punktet

$$\left(\frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}, \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \right)$$

ligger på enhetsirkelen og har derfor formen

$$\frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}} = \cos \phi, \quad \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} = \sin \phi,$$

der ϕ er vinkelen på figur 10.5.1. Følgelig kan vi skrive

$$\begin{aligned} \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \cos bx + \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}} \sin bx \\ = (\sin \phi \cos bx + \cos \phi \sin bx) = \sin(bx + \phi) \end{aligned} \quad (3)$$

der vi i den siste overgangen bruker formelen for sinus til en sum «baklengs». Kombinerer vi (2) og (3), får vi

$$\begin{aligned} C \cos bx + D \sin bx &= \sqrt{C^2 + D^2} \sin(bx + \phi) \\ &= A \sin(bx + \phi). \end{aligned}$$

Oppsummering

La oss oppsummere de tre tilfellene ovenfor i et felles resultat.

10.5.14 Teorem

Løsningene til differensialligningen

$$y'' + py' + qy = 0$$

avhenger av røttene i den karakteristiske ligningen $r^2 + pr + q = 0$.

- (i) Dersom den karakteristiske ligningen har to (forskjellige) reelle røtter r_1 og r_2 , er løsningene

$$y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}.$$

(ii) Dersom den karakteristiske ligningen bare har én rot r_1 , er løsningene

$$y = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x}.$$

(iii) Dersom den karakteristiske ligningen har to komplekse røtter $r_1 = a + ib$ og $r_2 = a - ib$ (der $b \neq 0$), er løsningene

$$y = e^{ax}(C \cos bx + D \sin bx).$$

Gitt tre reelle tall c, d og e vil det i alle tre tilfeller finnes nøyaktig én løsning slik at $y(c) = d$ og $y'(c) = e$.

Bemerkning

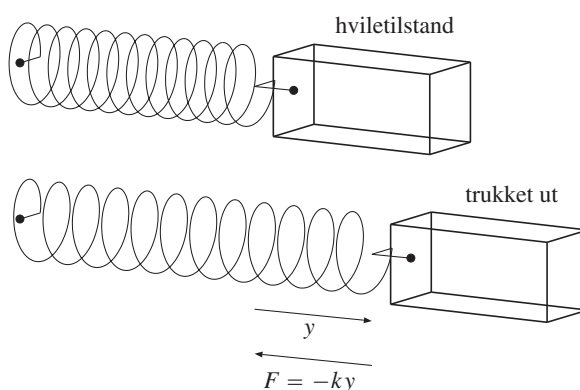
Det kan være lurt å sammenligne dette teoremet med den tilsvarende oppsummeringen for differensligninger i teorem 4.1.16, og legge merke til både likheter og ulikheter. Den viktigste ulikheten er at røttene r_1 og r_2 behandles forskjellig i de to tilfellene. For differensligninger får vi typisk uttrykk av typen r_1^n og r_2^n , mens vi for differensialligninger isteden har $e^{r_1 x}$ og $e^{r_2 x}$.

Anvendelser

Vi skal se på noen anvendelser av annenordens differensialligninger.

10.5.15 Eksempel

En kloss som ligger på et vannrett underlag, er bundet fast til en fjær (se figur 10.5.2). Klossen dras et stykke ut til siden og slippes så. Beskriv bevegelsen.



Figur 10.5.2.

Ser vi bort fra friksjon og luftmotstand (vi skal ta dem i betraktning i seksjon *10.7), er trekraften F fra fjæren den eneste kraften som virker på klossen. Ifølge Hookes

lov er denne kraften proporsjonal med fjærens forlengelse, altså $F = -ky$, der k er proporsjonalitetsfaktoren. Ifølge Newtons annen lov er $F = ma$ og følgelig er

$$ma = -ky$$

der m er klossens masse og a er akselerasjonen. Siden akselerasjonen er den annen-deriverte av veien, er $a = y''$. Dermed er

$$my'' = -ky.$$

Skriver vi denne ligningen som

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

ser vi at vi har en annenorden differensialligning med karakteristisk ligning

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0.$$

Røttene i denne ligningen er $r_1 = i\sqrt{k/m}$ og $r_2 = -i\sqrt{k/m}$. Dermed er løsningene av differensialligningen gitt ved

$$y = C \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + D \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

La oss anta at vi starter ved tiden null ved å holde klossen i ro 5 centimeter ut til siden. Da er $y(0) = 5$ og $y'(0) = 0$. Siden

$$y' = -C\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + D\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

får vi ligningene

$$5 = y(0) = C$$

$$0 = y'(0) = D\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dermed er $C = 5$, $D = 0$, og vår løsning

$$y = 5 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

Klossen svinger altså med en periodisk bevegelse om likevektspunktet. Legg merke til at *perioden* T (tiden klossen bruker på én svingning) bestemmes av k og m . Siden klossen er tilbake i utgangspunktet når «innmaten» i cosinusen er lik 2π , er perioden gitt ved

$$\sqrt{\frac{k}{m}} T = 2\pi.$$

Altså er $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. ■

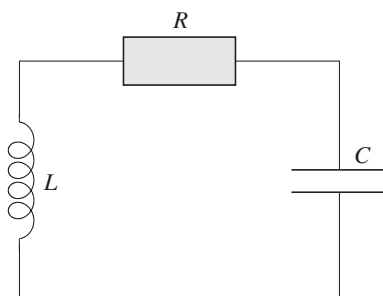
Bemerkning

Eksemplet ovenfor illustrerer hvorfor vi trenger *to* begynnelsesbetingelser for å bestemme løsningen til en annenordens differensialligning. Hadde vi hatt bare én betingelse $y(0) = 5$, ville vi ha visst hvor klossen var i starttidspunktet, men ikke hvor stor fart den hadde. Dette er ikke nok informasjon til å bestemme klossens fremtidige oppførsel; klosser som starter i samme punkt med forskjellig fart, vil opplagt oppføre seg ulikt. I prinsippet kunne det tenkes at heller ikke posisjon og hastighet var nok til å bestemme den fremtidige oppførselen, men at det var en tredje størrelse som også var av betydning. Ut fra vår erfaring med bevegelser er det vanskelig å tenke seg hva denne størrelsen skulle være, og eksistens- og entydighetssetningen sier da også at den ikke finnes – kjenner vi posisjon og hastighet ved ett tidspunkt, kan vi beregne resten av bevegelsen. Dette er en av grunnene til at eksistens- og entydighetssetninger er viktige – de gir oss presis kunnskap om hvor mye informasjon vi trenger for å beskrive et fenomen.

Det neste eksemplet forutsetter litt kjennskap til elektrisitetslæren.

10.5.16 Eksempel

Vi skal se på en strømkrets som består av en motstand, en spole og en kondensator (se figur 10.5.3). Vi ser først på spenningen over de tre delene hver for seg.



Figur 10.5.3.

En kondensator består av to parallelle, ledende plater adskilt av et tynt, isolerende luftlag. Når det går strøm i kretsen, hoper det seg opp negative ladninger (elektroner) på den ene kondensatorplaten, mens den andre blir positivt ladet. Siden motsatte ladninger tiltrekker hverandre, settes det opp et kraftfelt mellom de to platene. Dette kraftfeltet svarer til en spenning på q/C der q er ladningen på den ene kondensatorplaten, og C er en konstant (kapasitansen) som måler kondensatorens lagringsevne.

Spolen har ingen innvirkning på kretsen så lenge strømstyrken I er konstant, men når strømstyrken endrer seg, settes det opp et magnetisk felt i spolen som motvirker endringen. Dette feltet tilsvarende en spenning $LI'(t)$ der L er spolens selvinduktans.

Spenningen over en motstand R er RI .

Summerer vi nå opp spenningen rundt kretsen, må vi få null. Altså er

$$\frac{q}{C} + LI' + RI = 0.$$

For å komme videre trenger vi en sammenheng mellom I og q . Siden strømstyrken I er definert som den ladningen som passerer gjennom et tverrsnitt av kretsen per tidsenhet, må $I = q'(t)$ (legg tverrsnittet ved inngangen til en av kondensatorplatene). Dermed er $I' = q''$, og vi får

$$\frac{q}{C} + Lq'' + Rq' = 0.$$

Denne ligningen kan vi også skrive som

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{q}{LC} = 0.$$

Dette er en annenordens differensialligning med konstante koeffisienter. ■

Karakteren til løsningen avhenger av den innbyrdes størrelsen til R , L og C . Dersom resistansen er liten, vil strømmen svinge frem og tilbake uendelig mange ganger, men er resistansen større, vil strømmen raskt avta. Vi skal ikke gjennomføre en systematisk drøfting her siden vi skal studere et lignende problem i detalj i seksjon *10.7.

Oppgaver i seksjon 10.5

1. Finn de generelle løsningene til differensialligningene.

a) $y'' + y' - 6y = 0$

b) $y'' + 5y' + 4y = 0$

c) $y'' + 6y' + 9y = 0$

d) $y'' - 2y' + 5y = 0$

e) $y'' + 2y' + 7y = 0$

f) $y'' - y' + \frac{y}{4} = 0$

2. Finn de generelle løsningene til differensialligningene.

a) $y'' - 2y' + y = 0$

b) $y'' + 4y' + 13y = 0$

c) $y'' + 16y = 0$

d) $y'' - 8y' + 20y = 0$

e) $y''' + 2y'' - 8y' = 0$

3. Finn funksjonene som tilfredsstillor differensialligningene og begynnelsesbetingelsene.

a) $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$

b) $y'' - y' + y/2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$

c) $y'' - 4y' - y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$

d) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

e) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(1) = -e^3$, $y'(1) = -6e^3$

4. Finn løsningene til differensialligningen som går gjennom de oppgitte punktene.

a) $y'' - 4y' + 4y = 0$, punktene $(0, 1)$ og $(1, -1)$

b) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0$, punktene $(\pi/2, 1)$ og $(\pi, 1)$

c) $y'' + 6y' - 7y = 0$, punktene $(1/7, 0)$ og $(1, 7)$.

5. a) (UiO) Finn en annenordens, homogen differensialligning med konstante koeffisienter slik at $f(x) = xe^{-2x}$ er en løsning.

b) Finn den generelle løsningen til denne differensialligningen. Bestem også den løsningen som går gjennom punktet $(0, 0)$ med $y = x$ som tangentlinje.

6. Finn en annenordens, homogen differensialligning med konstante koeffisienter der $f(x) = e^{-3x} \sin 2x$ og $g(x) = e^{-3x} \cos 2x$ er løsninger

7. a) Vis at ligningen $y'' + y = 0$ ikke har noen løsning som går gjennom punktene $(0, 0)$ og $(2\pi, 1)$, men at den har uendelig mange løsninger som går gjennom punktene $(0, 0)$ og $(2\pi, 0)$.

b) Anta at den karakteristiske ligningen $x^2 + px + q = 0$ har to forskjellige, reelle røtter, og at (a, b) og (c, d) er to punkter i planet med $a \neq c$. Vis at det er nøyaktig én løsning av

$$y'' + py' + qy = 0$$

som går gjennom begge disse punktene.

c) Anta at den karakteristiske ligningen har en (reell) dobbelt rot. Vis at resultatet i b) gjelder også i dette tilfellet.

d) Kan du finne en tilleggsbetingelse på punktene (a, b) og (c, d) slik at resultatet også gjelder når den karakteristiske ligningen har komplekse røtter?

8. Skriv uttrykkene nedenfor på faseform, dvs. $A \sin(bx + \phi)$.

a) $\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x$

b) $\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}$

c) $\sqrt{3} \cos x - \sin x$

d) $3 \cos 4x + 4 \sin 4x$

9. En sylinder med grunnflate A og høyde h flyter i vann med grunnflaten ned. Tettheten til sylindere er $\rho \text{ kg/dm}^3$ og tettheten til vannet er 1 kg/dm^3 .

a) La s være dybden som sylindere stikker ned i vannet når den flyter i ro. Vis at $s = h\rho$.

- b) Vi dytter sylindren et lite stykke lenger ned i vannet og slipper, slik at sylindren begynner å duppe opp og ned. Vi ser på sylindren i det øyeblikket den er x dm under likevektstillingen. Forklar hvorfor

$$A\rho x''(t) = -Ax(t).$$

(Vi ser bort fra friksjonskreftene og antar at tyngdekraften og oppdriften er de eneste kreftene som virker på sylindren.)

- c) Anta at vi slipper sylindren ved tiden $t = 0$ og at den da ligger i ro x_0 dm under likevektstillingen. Finn $x(t)$.
- d) Finn perioden til bevegelsen.

10. (UiO) I denne oppgaven er $g = g(t)$ og $h = h(t)$ to funksjoner som er definert for alle reelle tall $t \geq 0$. Vi antar at g og h tilfredsstiller følgende system av differensialligninger

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt} &= -g - h \\ \frac{dh}{dt} &= 5g - 3h\end{aligned}$$

med initialbetingelser $g(0) = 0$ og $h(0) = 2$.

- a) Vis at g tilfredsstiller differensialligningen

$$\frac{d^2g}{dt^2} + 4\frac{dg}{dt} + 8g = 0$$

med initialbetingelser $g(0) = 0$ og $g'(0) = -2$.

- b) Finn g .
- c) Finn h .

11. (UiO) To dyrearter lever i et naturlig samspill. Vi lar $N_1(t)$ og $N_2(t)$ være antall individer av hver art ved tiden t . Sett

$$\begin{aligned}x(t) &= N_1(t) - 300 \\ y(t) &= N_2(t) - 10\,000.\end{aligned}$$

For å modellere samspillet mellom de to artene, har forskerne satt opp differensialligningene

$$x'(t) = by(t) \quad \text{og} \quad y'(t) = -cx(t)$$

der b og c er positive konstanter.

- a) Den ene arten er rovdyr og den andre byttedyr. Hvilken er rovdyr?
- b) Vis at $x''(t) = -bcx(t)$.
- c) Anta at $x(0) = x_0$ og $y(0) = y_0$. Finn $x(t)$ og $y(t)$.

- d) Observasjoner tyder på at de beste verdiene er $b = 0.05$, $c = 84$. Anta at $N_1(0) = 300$ og $N_2(0) = 1400$, og skisser grafene til $N_1(t)$ og $N_2(t)$. Kan du gi en intuitiv forklaring på hvorfor bunner og topper er forskjøvet i forhold til hverandre?

12. En differensialligning

$$x^2 u''(x) + axu'(x) + bu(x) = 0, \quad x > 0 \quad (*)$$

der $a, b \in \mathbb{R}$, kalles en *Euler-ligning*.

- a) Anta at $u(x)$ er en løsning av (*) for $x > 0$. Definer en ny funksjon y ved

$$y(t) = u(e^t).$$

Vis at y er en løsning av differensialligningen

$$y''(t) + (a-1)y'(t) + by(t) = 0.$$

Vi skal kalle $r^2 + (a-1)r + b = 0$ den karakteristiske ligningen til (*).

- b) Vis at dersom den karakteristiske ligningen har to forskjellige, reelle røtter r_1 og r_2 , så er

$$u(x) = Cx^{r_1} + Dx^{r_2}$$

den generelle løsningen til (*).

- c) Anta at den karakteristiske ligningen har en dobbelrot r . Vis at

$$u(x) = (C + D \ln x)x^r$$

er den generelle løsningen til (*).

- d) Anta at den karakteristiske ligningen har to komplekse røtter $\alpha \pm i\beta$. Vis at

$$u(x) = x^\alpha [C \cos(\beta \ln x) + D \sin(\beta \ln x)]$$

er den generelle løsningen til (*).

- e) Finn den generelle løsningen til

$$x^2 u'' + 3xu' + 5u = 0.$$

10.6 Annenordens, inhomogene ligninger

I denne seksjonen skal vi studere inhomogene ligninger av typen

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

der p og q er tall, og f er en kjent funksjon. Vi skal se på to løsningsmetoder. Begge baserer seg på følgende observasjon som viser at det er nok å finne én løsning av den inhomogene ligningen.

10.6.1 Lemma

Anta at y_p er en løsning av den inhomogene ligningen

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Da er de andre løsningene gitt ved

$$y = y_p + y_h$$

der y_h er en vilkårlig løsning av den homogene ligningen $y'' + py' + qy = 0$.

Bevis: Ved innsetting ser vi at $y = y_p + y_h$ er en løsning av den inhomogene ligningen. Anta at z er en vilkårlig løsning av den inhomogene ligningen. Vi må vise at z kan skrives på formen

$$z = y_p + u$$

der u er en løsning av den homogene ligningen. Definer $u = z - y_p$. Siden både z og y_p er løsninger av den inhomogene ligningen, får vi

$$\begin{aligned} u'' + pu' + qu &= (z'' - y_p'' + p(z' - y_p')) + q(z - y_p) \\ &= (z'' + pz' + qz) - (y_p'' + py_p' + qy_p) \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Dette viser at u er en løsning av den homogene ligningen, og følgelig er z på formen $z = y_p + y_h$ der $y_h = u$ er en løsning av den homogene ligningen. ■

Ved hjelp av dette lemmaet kan man vise at eksistens- og entydighetssetningen fra forrige seksjon også gjelder for inhomogene ligninger – gitt tre tall c , d og e finnes det nøyaktig én løsning slik at $y(c) = d$ og $y'(c) = e$.

Ukjente koeffisienters metode

Den første løsningsmetoden vi skal se på, er helt analog til den vi brukte for inhomogene differensligninger i seksjon 4.2. Ideen er at differensialligningen ofte vil ha en løsning «av samme type» som f . Er for eksempel f et polynom, vil ligningen også ha en løsning som er et polynom, og det gjelder bare å finne ut hvilket polynom dette er. Det er lettest å forstå fremgangsmåten fra et eksempel.

10.6.2 Eksempel

Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + y' - 2y = 2x.$$

Her er $f(x) = 2x$ som er et polynom av første grad. La oss prøve å finne en løsning $y_p = Ax + B$ som også er et polynom av første grad. Setter vi inn i ligningen, får vi

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = 0 + A - 2(Ax + B) = -2Ax + (A - 2B).$$

Skal dette være lik $2x$ for alle x , må

$$-2A = 2 \quad \text{og} \quad (A - 2B) = 0.$$

Løser vi disse ligningene, får vi $A = -1$, $B = -1/2$. Altså er $y_p = -x - \frac{1}{2}$ en (partikulær) løsning av differensialligningen. For å finne den generelle løsningen, må vi først finne den generelle løsningen av den homogene ligningen

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Siden den karakteristiske ligningen $r^2 + r - 2 = 0$ har løsningene $r_1 = 1$ og $r_2 = -2$, ser vi at

$$y_h = Ce^x + De^{-2x}.$$

Den generelle løsningen av den inhomogene ligningen er dermed

$$y = y_p + y_h = -x - \frac{1}{2} + Ce^x + De^{-2x}.$$



Bemerkning

Dette eksemplet viser hvorfor metoden kalles «ukjente koeffisienters metode»; når vi kjenner *formen* til løsningen, er resten bare et spørsmål om å finne de rette koeffisientene. De to indeksene h og p i y_h og y_p skal minne oss om ordene «homogen» og «partikulær».

Når $f(x)$ er et polynom, kan man i de aller fleste tilfeller tippe på en løsning $y_p(x) = g(x)$ der $g(x)$ er et polynom av samme grad som $f(x)$. I noen tilfeller må man imidlertid tippe på løsninger av typen $y_p(x) = xg(x)$ eller $y_p(x) = x^2g(x)$ der $g(x)$ fortsatt er et polynom av samme grad som $f(x)$. Dette skjer når 0 er en rot i den karakteristiske ligningen til den homogene differensialligningen. Den presise regelen er:

Regel 1: Dersom $f(x)$ er et polynom, tipper man løsninger på formen

- a) $y_p(x) = g(x)$ dersom 0 *ikke* er en rot i den karakteristiske ligningen
- b) $y_p(x) = xg(x)$ dersom 0 er en *enkeltrot* i den karakteristiske ligningen
- c) $y_p(x) = x^2g(x)$ dersom 0 er en *dobbelrot* i den karakteristiske ligningen

og der $g(x)$ i alle tilfeller er et polynom av samme grad som $f(x)$. Siden en konstant er et nulltegradspolynom, gjelder regelen også når $f(x)$ er en konstant.

Bemerkning

Legg merke til $xg(x)$ er et polynom av én grad mer enn $g(x)$, og at $x^2g(x)$ er et polynom av to grader mer enn $g(x)$. Grunnen til at vi skriver disse polynomene på en såpass uvanlig måte, er for at du skal slippe å dra med deg ledd du ikke har bruk for.

I tilfellet ovenfor er det lite aktuelt å gå opp i grad fordi konstantfunksjonen 0 bare er løsning av den homogene ligningen dersom $q = 0$, det vil si når ligningen er på formen $y'' + py' = f(x)$. I neste regel er unntaket mer aktuelt.

Regel 2: Dersom $f(x) = e^{ax}P(x)$ der a er et reelt tall og $P(x)$ er et polynom, tipper man en løsning på formen $y_p = e^{ax}Q(x)$ der $Q(x)$ er et polynom. Mer presist tipper vi

- a) $y_p(x) = e^{ax}Q(x)$ dersom a ikke er en rot i den karakteristiske ligningen
- b) $y_p(x) = e^{ax}xQ(x)$ dersom a er en *enkeltrot* i den karakteristiske ligningen
- c) $y_p(x) = e^{ax}x^2Q(x)$ dersom a er en *dobbeltrot* i den karakteristiske ligningen

og der $Q(x)$ i alle tilfeller er et polynom av samme grad som $f(x)$. Siden en konstant er et nulltegradspolynom, gjelder regelen også når $f(x)$ er en konstant.

Bemerkning

Siden $a^x = e^{x \ln a}$ dekker regelen ovenfor også høyrerider på formen $f(x) = a^x P(x)$.

10.6.3 Eksempel

Finn den generelle løsningen av

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(x - 2).$$

La oss først løse den homogene ligningen

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Siden den karakteristiske ligningen $r^2 - 6r + 9$ bare har én rot $r_1 = 3$, blir løsningen av den homogene ligningen

$$y_h = Ce^{3x} + Dxe^{3x}.$$

La oss nå forsøke å finne en partikulær løsning av den inhomogene ligningen. Normalt ville vi ha forsøkt en løsning av typen $y_p = e^{3x}(Ax + B)$, men siden 3 er en dobbeltrot i den karakteristiske ligningen, går vi opp to grader til

$$y_p = x^2 e^{3x}(Ax + B) = e^{3x}(Ax^3 + Bx^2)$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} y_p' &= 3e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) \\ y_p'' &= 9e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + 6e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) + e^{3x}(6Ax + 2B). \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i den opprinnelige ligningen, får vi

$$\begin{aligned} y_p'' - 6y_p' + 9y_p &= 9e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + 6e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) \\ &\quad + e^{3x}(6Ax + 2B) - 6[3e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) \\ &\quad + e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) + 9e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) \\ &= e^{3x}(6Ax + 2B) \end{aligned}$$

siden alle annen- og tredjegradsledd forsvinner. Skal vi ha en løsning, må dette uttrykket være lik $e^{3x}(x - 2)$ for alle x , det vil si at

$$6A = 1 \quad \text{og} \quad 2B = -2.$$

Altså er $A = 1/6$ og $B = -1$. Vår partikulære løsning er dermed

$$y_p = \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2\right)e^{3x}.$$

Den generelle løsningen av den inhomogene ligningen blir

$$y = y_p + y_h = \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2\right)e^{3x} + (Ce^{3x} + Dxe^{3x}) = e^{3x}\left(\frac{1}{6}x^3 - x^2 + Dx + C\right).$$



Regel 3: Dersom $f(x) = a^x(A \cos bx + B \sin bx)$, kan man som regel forsøke en løsning på formen $y_p = a^x(C \cos bx + D \sin bx)$. Dersom $y = a^x \cos bx$ (eller, ekvivalent, $y = a^x \sin bx$) er en løsning av den homogene ligningen, må vi isteden forsøke $y_p = x \cdot a^x(C \cos bx + D \sin bx)$.

10.6.4 Eksempel

Finn den løsningen av

$$y'' - 2y' + 5y = \sin x$$

som tilfredsstillers betingelsene $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Vi løser først den homogene ligningen. Den karakteristiske ligningen har røttene $r = 1 \pm 2i$, og dermed er

$$y_h = e^x(C \cos 2x + D \sin 2x).$$

For å finne en partikulær løsning av den inhomogene ligningen prøver vi

$$y_p = A \cos x + B \sin x.$$

Vi får

$$y'_p = -A \sin x + B \cos x$$

$$y''_p = -A \cos x - B \sin x$$

som innsatt i ligningen gir

$$\begin{aligned} y''_p - 2y'_p + 5y_p &= -A \cos x - B \sin x - 2(-A \sin x + B \cos x) \\ &\quad + 5(A \cos x + B \sin x) \\ &= (4A - 2B) \cos x + (2A + 4B) \sin x. \end{aligned}$$

Skal vi ha en løsning, må dette uttrykket være likt $\sin x$ for alle x , det vil si at vi må ha

$$4A - 2B = 0 \quad \text{og} \quad 2A + 4B = 1.$$

Vi løser dette ligningssystemet og får $A = 1/10$ og $B = 1/5$. Den partikulære løsningen blir dermed

$$y_p = \frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

Dette betyr at den generelle løsningen av den inhomogene ligningen er

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + e^x(C \cos 2x + D \sin 2x).$$

Vi er interessert i å finne en løsning slik at $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$. Fra uttrykket ovenfor ser vi at

$$y(0) = \frac{1}{10} + C.$$

Deriverer vi uttrykket for y , får vi

$$y' = -\frac{1}{10} \sin x + \frac{1}{5} \cos x + e^x[(C + 2D) \cos 2x + (D - 2C) \sin 2x]$$

som gir

$$y'(0) = \frac{1}{5} + (C + 2D).$$

Dermed har vi ligningene $1 = 1/10 + C$, $0 = 1/5 + (C + 2D)$. Løser vi disse, får vi $C = 9/10$ og $D = -11/20$. Løsningen vi er på jakt etter, er dermed

$$y = \frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + e^x \left(\frac{9}{10} \cos 2x - \frac{11}{20} \sin 2x \right).$$

■

Legg merke til at reglene ovenfor kan kombineres. Har du for eksempel ligningen

$$y'' + 4y = 3x + 2 + \cos x$$

resonnerer du slik: Hadde høyresiden bare bestått av leddet $3x + 2$, ville jeg ha forsøkt en løsning på formen $y_p = Ax + B$. Hadde den derimot bare bestått av $\cos x$, ville jeg ha prøvd $y_p = C \cos x + D \sin x$. I dette tilfellet prøver jeg summen, altså

$$y_p = Ax + B + C \cos x + D \sin x.$$

Det er også mulig å generalisere reglene ovenfor på andre måter, men det skal vi ikke komme inn på her.

*Variasjon av parametre

Metoden ovenfor er rask og effektiv når den virker, men den forutsetter at funksjonen f har en spesiell form. Vi skal nå se på en metode som i prinsippet fungerer for alle funksjoner f , men som til gjengjeld kan være tungvinn å bruke i praksis. I tillegg til å ha et bredere anvendelsessområde, er den nye metoden bedre egnet for teoretiske undersøkelser, og den er lettere å generalisere til andre klasser av ligninger.

Fra forrige seksjon vet vi at løsningen til en annenordens, *homogen* differensialligning

$$y'' + py' + qy = 0$$

alltid kan skrives som en sum $y = Cy_1 + Dy_2$ der y_1 og y_2 er to spesielle løsninger. For å finne en løsning av den *inhomogene* ligningen

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

forsøker vi følgende triks: Vi erstatter de to konstantene C og D med to funksjoner $c(x)$ og $d(x)$, og søker løsninger på formen

$$y(x) = c(x)y_1(x) + d(x)y_2(x).$$

Vår oppgave er altså å finne ut hva $c(x)$ og $d(x)$ må være for at y skal være en løsning av den inhomogene løsningen. Metoden kalles «variasjon av parametrene» fordi vi erstatter parametrene C og D i den homogene ligningen med varierende størrelser $c(x)$ og $d(x)$.

Man kan spørre seg selv om hvorfor det er gunstig å erstatte den ene ukjente funksjonen y med to ukjente funksjoner c og d . Del av svaret er at det å ha to ukjente funksjoner, gir oss en ekstra handlefrihet som vi kan utnytte. La oss se på regningene.

Ved produktregelen har vi

$$y'(x) = c'(x)y_1(x) + d'(x)y_2(x) + c(x)y_1'(x) + d(x)y_2'(x).$$

Deriverer vi en gang til, får vi

$$\begin{aligned} y''(x) &= [c'(x)y_1(x) + d'(x)y_2(x)]' + c'(x)y_1'(x) \\ &\quad + d'(x)y_2'(x) + c(x)y_1''(x) + d(x)y_2''(x) \end{aligned}$$

der vi har brukt produktregelen på de to siste leddene, men beholdt de to første uten å regne ut. Setter vi inn i venstresiden i differensialligningen, får vi

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= [c'(x)y_1(x) + d'(x)y_2(x)]' + c'(x)y_1'(x) + d'(x)y_2'(x) \\ &\quad + c(x)y_1''(x) + d(x)y_2''(x) \\ &\quad + p[c'(x)y_1(x) + d'(x)y_2(x) + c(x)y_1'(x) + d(x)y_2'(x)] \\ &\quad + q[c(x)y_1(x) + d(x)y_2(x)] \\ &= [c'(x)y_1(x) + d'(x)y_2(x)]' + [c'(x)y_1'(x) + d'(x)y_2'(x)] \\ &\quad + p[c'(x)y_1(x) + d'(x)y_2(x)] \end{aligned}$$

der vi i den siste overgangen har brukt at y_1 og y_2 er løsninger av den homogene ligningen. Siden y skal være en løsning av den inhomogene ligningen, ønsker vi oss altså at

$$\begin{aligned} f(x) &= [c'(x)y_1(x) + d'(x)y_2(x)]' + [c'(x)y_1'(x) + d'(x)y_2'(x)] \\ &\quad + p[c'(x)y_1(x) + d'(x)y_2(x)]. \end{aligned}$$

Vi ser nå at hvis vi velger c og d slik at

$$c'(x)y_1(x) + d'(x)y_2(x) = 0,$$

så forsvinner to av hakeparentesene. Hvis vi samtidig sørger for at

$$c'(x)y_1'(x) + d'(x)y_2'(x) = f(x)$$

får vi den likheten vi er på jakt etter. Men kan vi velge c og d slik at disse ligningene er oppfylt? Ja, det kan vi! Ligningene ovenfor har ingen ting med differensialligninger å gjøre, de utgjør rett og slett et vanlig, lineært ligningssystem med to ukjente $c'(x)$ og $d'(x)$. Løser vi det, får vi

$$c'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} \quad \text{og} \quad d'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}.$$

Integrerer vi, ser vi at

$$c(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} dx$$

og

$$d(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} dx.$$

Det er vanlig å skrive disse uttrykkene litt mer kortfattet som

$$c(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{og} \quad d(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

der

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2$$

kalles *Wronski-determinanten* til y_1 og y_2 etter den polsk-franske matematikeren Josef Hoâné de Wronski (1778–1853). Denne størrelsen spiller en sentral rolle i teorien for lineære, annenordens differensialligninger. Vi har dermed fullført våre beregninger og kan konkludere med at

$$y(x) = -y_1(x) \cdot \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2(x) \cdot \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

er en løsning av vår inhomogene ligning. Legg merke til at det fortsatt er noe som kunne gå galt – det kunne tenkes at Wronski-determinanten var null. Man kan imidlertid vise at dette ikke er tilfellet (se oppgave 16).

La oss nå prøve metoden på et eksempel.

10.6.5 Eksempel

Finn den generelle løsningen til ligningen

$$y'' - y = \sin x.$$

Den homogene ligningen har løsninger $y = Ce^x + De^{-x}$, så vi kan ta $y_1(x) = e^x$ og $y_2(x) = e^{-x}$. Wronski-determinanten blir

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 = e^x(-e^{-x}) - e^xe^{-x} = -2$$

og vi får dermed

$$c(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin x dx.$$

Dette integralet kan løses ved to gangers delvis integrasjon (husk eksempel 9.1.5). Vi setter først $u = e^{-x}$, $v' = \sin x$, og får

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx.$$

Så setter vi $u = e^{-x}$, $v' = \cos x$, og får

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x \, dx.$$

Kombinerer vi disse uttrykkene, ser vi at

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x \, dx.$$

Løser vi denne ligningen for $\int e^{-x} \sin x \, dx$, får vi

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C.$$

Dermed er

$$c(x) = -\frac{1}{4}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C.$$

Tilsvarende ser vi at

$$d(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} \, dx = -\frac{1}{2} \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{4}e^x(\cos x - \sin x) + D.$$

Løsningen av differensialligningen blir dermed

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x)y_1(x) + d(x)y_2(x) = \left[-\frac{1}{4}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C \right] e^x \\ &\quad + \left[\frac{1}{4}e^x(\cos x - \sin x) + D \right] e^{-x} \\ &= -\frac{1}{2} \sin x + Ce^x + De^{-x}. \end{aligned}$$

Legg merke til at dette er den *generelle* løsningen; integrasjonskonstantene i de ubestemte integralene $c(x)$ og $d(x)$ tar automatisk hånd om den homogene løsningen. ■

Eksemplet ovenfor viser noen av ulempene ved metoden. Selv når Wronski-determinanten er så enkel som her, blir integrasjonene tidkrevende. Det er instruktivt også å løse eksemplet ved hjelp av ubestemte koeffisienters metode og sammenligne arbeidsmengden.

I neste seksjon skal vi se på noen viktige anvendelser av annenordens, inhomogene differensialligninger.

Oppgaver i seksjon 10.6

1. a) (UiO) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

- b) Finn en partikulær løsning av $y'' - y' - 2y = e^x$.

- c) Finn en løsning av $y'' - y' - 2y = e^x$ slik at $y(0) = y'(0) = 2$.

2. a) Finn den generelle løsningen av

$$y'' - 2y' - 8y = 0.$$

- b) Finn en partikulær løsning av $y'' - 2y' - 8y = 6 - 8x$.

- c) Finn en løsning av $y'' - 2y' - 8y = 6 - 8x$ slik at $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

3. a) (UiO) Vis at differensialligningen

$$y'' - 2y' - 3y = e^x \sin 2x \quad (*)$$

har en løsning på formen $y = Ae^x \sin 2x$.

- b) Finn den generelle løsningen av (*).

4. a) Finn den generelle løsningen til

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

- b) Finn løsningen til

$$y'' - 4y' + 4y = x$$

slik at $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. (UiO) Finn den generelle løsningen til

$$2y'' + y' - y = 2e^x.$$

6. Finn den generelle løsningen til

$$y'' + 2y' + 5y = \cos x.$$

7. (UiO) Løs differensialligningen

$$y'' - 8y' + 6y = x^2.$$

8. a) (UiO) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

- b) Vis at

$$y'' - 4y' + 5y = 4 \sin x + 4 \cos x \quad (*)$$

har en løsning på formen

$$y = A \sin x + B \cos x.$$

c) Finn en løsning av (*) slik at $y(0) = 2$ og $y'(0) = 1/2$.

9. a) (UiO) Finn den generelle løsningen av

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

b) Vis at differensialligningen

$$y'' + 3y' + 2y = 4x + 10 \sin x \quad (*)$$

har en løsning på formen $Ax + B + E \sin x + F \cos x$.

c) Finn en løsning av (*) slik at $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

10. (UiO) Finn den generelle løsningen av

$$y'' - 6y' + 10y = 5xe^x.$$

11. a) (UiO) Finn den generelle løsningen av

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

b) Finn løsningen av

$$y'' + 2y' + 2y = 1 + x + 2e^{2x}$$

slik at $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

12. Finn den generelle løsningen av

$$y'' + 2y' + y = e^x.$$

13. (NTNU) Finn den generelle løsningen av

$$y'' + y = \sin x.$$

14. Løs ligningen i eksempel 10.6.5 ved hjelp av ukjente koeffisienters metode.

15. Bruk variasjon av parametre til å løse

a) $y'' + y = \tan x$

b) $y'' + 4y' + 3y = \cosh x$

16. La y_1 og y_2 være to løsninger av

$$y'' + py' + qy = 0,$$

og la $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ være Wronski-determinanten.

a) Vis at W tilfredsstiller differensialligningen

$$W' + pW = 0.$$

b) Vis at $W(x) = W(0)e^{-px}$ og konkluder med at hvis $W(x) \neq 0$ for én x , så er $W(x) \neq 0$ for alle x .

*10.7 Svingninger og resonans

I denne seksjonen skal vi se hvordan annenordens differensialligninger kan brukes til å studere et viktig fysisk fenomen. Systemet vi skal se på er en variant av systemet i eksempel 10.5.15. Vi har en kloss med masse m som er hengt opp i en fjær (se figur 10.7.1). Drar vi klossen nedover et stykke og slipper deretter taket, vil klossen begynne å svinge opp og ned. Vi skal studere disse svingningene.

Frie svingninger

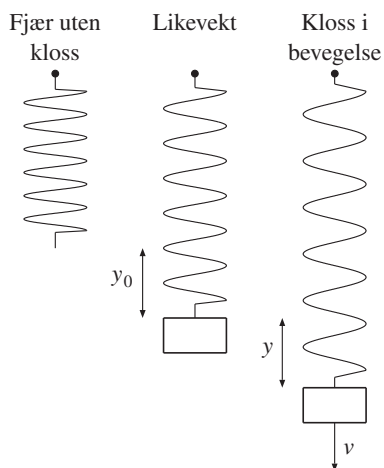
I vår modell skal vi regne at fjæren er så lett at vi kan se bort fra massen, og vi skal anta at klossen er utsatt for tre krefter; tyngdekraften, fjærkraften og en friksjonskraft (for eksempel luftmotstand). Tyngdekraften er mg , der m er klossens masse og g er tyngdens akselerasjon. Ifølge Hookes lov er fjærkraften lik $-ky$, der y er fjærens forlengelse, og k er en konstant («fjærkonstanten»). Minuset skyldes at kraften er rettet motsatt av forlengelsen.

Vi skal regne med at friksjonen alltid er proporsjonal med hastigheten med proporsjonalitetsfaktor q . Friksjonskraften er dermed $-qv$, der v er hastigheten (minuset skyldes at friksjonen virker *mot* hastigheten).

La oss først se på systemet når det henger i ro. I dette tilfellet er det bare tyngdekraften og fjærkraften som virker, og summen av dem må være null. Sier vi at y_0 er fjærens forlengelse i denne stillingen, får vi

$$mg - ky_0 = 0.$$

Vi kaller denne stillingen for systemets *likevektsstilling*.



Figur 10.7.1.

La oss nå gå over til å betrakte en generell situasjon hvor klossen har et utslag y fra likevektstillingen og beveger seg med en fart v (se figur 10.7.1). Den totale kraften på systemet er da

$$F = mg - k(y + y_0) - qv$$

(vi velger positiv retning nedover). Vi har allerede sett at $mg - ky_0 = 0$, så vi kan forenkle uttrykket til

$$F = -ky - qv. \quad (1)$$

Ifølge Newtons annen lov er $F = ma$, så

$$ma = -ky - qv.$$

Bruker vi så at $v = y'$ og $a = y''$, får vi

$$my'' = -ky - qy'.$$

Denne ligningen kan vi også skrive

$$y'' + \frac{q}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

som er en annenordens differensialligning med konstante koeffisienter. Den karakteristiske ligningen

$$r^2 + \frac{q}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

har løsningene

$$r = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4km}}{2m} = -\frac{q}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.$$

Hva slags løsninger differensialligningen har, bestemmes av størrelsen til $q^2 - 4km$. Siden q er friksjonskoeffisienten, avhenger altså løsningenes natur av hvor stor friksjonen er sammenlignet med de to andre kreftene. La oss se på hvert tilfelle for seg.

Tilfellet $q = 0$ (altså ingen friksjon): I dette tilfellet er $r = \pm\sqrt{-k/m} = \pm i\sqrt{k/m}$, så differensialligningen har løsningene

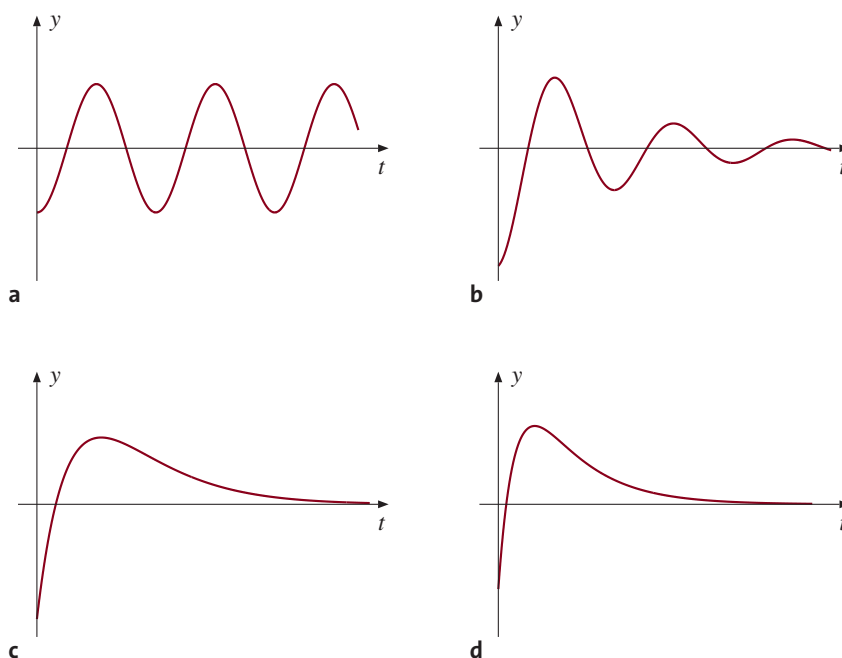
$$y(t) = C \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + D \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

Klossen vil fortsette å svinge forbi likevektspunktet med de samme utslagene til evig tid. Dette kalles *harmoniske* (eller *udempede*) svingninger (se figur 10.7.2a)).

Tilfellet $0 < q < 2\sqrt{km}$: I dette tilfellet har den karakteristiske ligningen to komplekse røtter med realdel $-q/2m$ og imaginærdel $\pm\sqrt{k/m - (q/2m)^2}$, så løsningene blir

$$y(t) = e^{-qt/2m} \left\{ C \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{q}{2m}\right)^2} t \right] + D \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{q}{2m}\right)^2} t \right] \right\}.$$

En typisk løsningskurve er tegnet opp i figur 10.7.2b). Vi har *dempede* svingninger – klossen svinger frem og tilbake om likevektspunktet med stadig mindre utslag.



Figur 10.7.2.

Tilfellet $q = 2\sqrt{km}$: I dette tilfellet er $-q/2m$ en dobbelt rot i den karakteristiske ligningen. Løsningen av differensialligningen er

$$y(t) = e^{-qt/2m}(C + Dt).$$

Figur 10.7.2c) viser en typisk løsning. Klossen svinger ikke lenger frem og tilbake, men nærmer seg likevektstilstanden asymptotisk fra den ene siden (den kan passere likevektspunktet en gang underveis). Dette tilfellet kalles *kritisk* dempning.

Tilfellet $q > 2\sqrt{km}$: I dette tilfellet har den karakteristiske ligningen to reelle røtter

$$r_1 = -\frac{q}{2m} + \sqrt{\left(\frac{q}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{og} \quad r_2 = -\frac{q}{2m} - \sqrt{\left(\frac{q}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

og løsningen av differensialligningen blir

$$y(t) = Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t}.$$

Legg merke til at både r_1 og r_2 er negative, så y går mot 0 når t går mot uendelig. Figur 10.7.2d) viser en typisk løsning. Dette tilfellet kalles *overkritisk* dempning.

Vi ser altså at verdien $q = 2\sqrt{km}$ markerer skillet mellom to forskjellige typer oppførsel; er $q < 2\sqrt{km}$, vil klossen svinge uendelig mange ganger forbi likevektspunktet, men er $q \geq 2\sqrt{km}$, vil den langsomt si seg inn mot likevekt fra den ene siden. Der er lettest å forestille seg hva som skjer i det siste tilfellet dersom du tenker deg at klossen er opphengt i en seig væske (sirup?).

La oss til slutt se litt nærmere på det udempede tilfellet $q = 0$ og løsningen

$$y(t) = C \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + D \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

Det er ofte tungvint å dra rundt med uttrykket $\sqrt{k/m}$, så det er vanlig å innføre *vinkel-frekvensen*

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

for å kunne skrive løsningen på den enklere formen

$$y(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t.$$

Skriver vi løsningen på faseform, får vi

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

der $A = \sqrt{C^2 + D^2}$ og der ϕ er gitt ved

$$\sin \phi = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \quad \text{og} \quad \cos \phi = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}.$$

Det er nå lett å se hvorfor denne skrivemåten er nyttig; *amplityden* A forteller oss hvor store utslagene er, mens *fasen* ϕ forteller hvor mye kurven er forskjøvet i forhold til en vanlig sinusfunksjon.

Ytre krefter og resonans

La oss nå anta at klossen vår er utsatt for en ytre kraft som også svinger, for eksempel mekaniske vibrasjoner fra en motor. I tillegg til de kreftene vi har sett på ovenfor, får vi altså en tilleggskraft

$$F_{\text{ytre}} = K \sin \nu t$$

der ν er vinkelfrekvensen til den ytre kraften og K er en konstant (ν er den greske bokstaven ν). I regnestykket ovenfor må vi da forandre (1) til

$$F = -ky - qv + K \sin \nu t,$$

og differensialligningen endres til

$$y'' + \frac{q}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{K}{m} \sin \nu t.$$

Dette er en inhomogen, annenordens differensialligning som kan løses ved hjelp av teknikkene i forrige seksjon.

Vi skal først se på det friksjonsløse tilfellet der $q = 0$. Differensialligningen blir da

$$y'' + \frac{k}{m}y = \frac{K}{m} \sin \nu t.$$

Vi forsøker å finne en løsning på formen

$$y_p = A \sin \nu t + B \cos \nu t.$$

Setter vi inn i ligningen, får vi

$$\begin{aligned} y_p'' + \frac{k}{m}y_p &= (-A\nu^2 \sin \nu t - B\nu^2 \cos \nu t) + \frac{k}{m}(A \sin \nu t + B \cos \nu t) \\ &= A\left(\frac{k}{m} - \nu^2\right) \sin \nu t + B\left(\frac{k}{m} - \nu^2\right) \cos \nu t. \end{aligned}$$

Dette skal være lik $K \sin \nu t/m$, så vi må ha

$$\begin{aligned} A\left(\frac{k}{m} - \nu^2\right) &= \frac{K}{m} \\ B\left(\frac{k}{m} - \nu^2\right) &= 0. \end{aligned}$$

Dersom $k/m - \nu^2 \neq 0$, kan vi løse dette ligningssystemet og få $A = \frac{K}{k - m\nu^2}$ og $B = 0$. Følgelig er

$$y_p = \frac{K}{k - m\nu^2} \sin \nu t$$

en spesiell løsning av differensialligningen. Den generelle løsningen får vi ved å addere den generelle løsningen y_h til den homogene ligningen. Velger vi å skrive y_h på faseform, får vi

$$y = y_h + y_p = A \sin(\omega t + \phi) + \frac{K}{m(\omega^2 - \nu^2)} \sin \nu t$$

der $\omega = \sqrt{k/m}$ er vinkelfrekvensen til det uforstyrrede systemet. Bevegelsen blir altså en sum av to svingebevegelser, én med systemets egen frekvens ω og én med den påtrykte frekvensen ν . Legg merke til at når de to frekvensene ν og ω ligger nær hverandre, er koeffisienten $K/m(\omega^2 - \nu^2)$ stor, og svingningene blir svært kraftige. Selv om størrelsen K til den ytre kraften er liten, kan vi altså oppnå store effekter bare den påtrykte frekvensen ν ligger nær systemets egen frekvens ω . Dette fenomenet kalles *resonans*.

Et slående inntrykk av hvordan resonans arter seg, får vi ved å velge $\nu = \omega = \sqrt{k/m}$. Da bryter regningene ovenfor sammen (fordi $y = \sin \omega t$ er en løsning av den homogene differensialligningen), og vi må isteden forsøke en løsning på formen

$$y_p = At \sin \omega t + Bt \cos \omega t.$$

Deriverer vi to ganger, får vi

$$y_p'' = 2A\omega \cos \omega t - At\omega^2 \sin \omega t - 2B\omega \sin \omega t - Bt\omega^2 \cos \omega t.$$

Vi setter inn i ligningen:

$$\begin{aligned} y_p'' + \frac{k}{m}y_p &= y_p'' + \omega^2 y_p = 2A\omega \cos \omega t - At\omega^2 \sin \omega t - 2B\omega \sin \omega t \\ &\quad - Bt\omega^2 \cos \omega t + \omega^2(At \sin \omega t + Bt \cos \omega t) \\ &= 2A\omega \cos \omega t - 2B\omega \sin \omega t. \end{aligned}$$

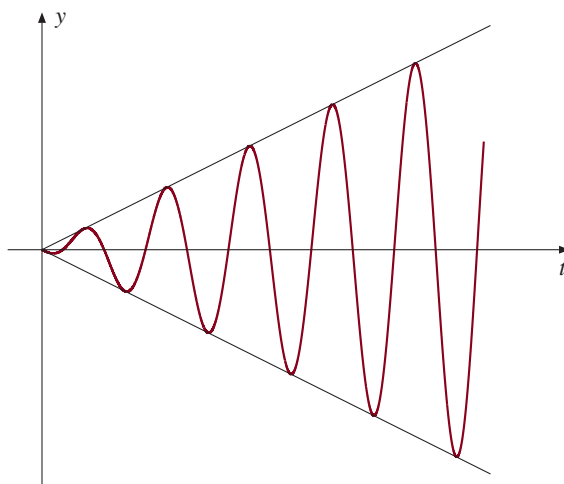
Skal dette være lik $(K/m) \sin \omega t$, må vi velge $A = 0$ og $B = -\frac{K}{2m\omega}$. Altså er

$$y_p = -\frac{K}{2m\omega} t \cos \omega t$$

en partikulær løsning, og den generelle løsningen blir

$$y = A \sin(\omega t + \phi) - \frac{K}{2m\omega} t \cos \omega t.$$

På grunn av faktoren t vil det andre leddet gi større og større utslag etter som tiden går, og vi får en svingende bevegelse hvor farten og utslagene stadig blir større. Figur 10.7.3 viser en typisk løsningskurve. Uansett hvor liten K er, vil systemet før eller senere riste i stykker!



Figur 10.7.3.

Ovenfor har vi sett på et svært enkelt system, men også kompliserte systemer vil ofte være spesielt følsomme overfor én eller flere frekvenser. Disse frekvensene blir gjerne kalt *egenfrekvensene* til systemet. På grunn av slike resonansfenomener bør man være forsiktig med å utsette mekaniske konstruksjoner for periodiske krefter. I mange hundre år har man for eksempel vært klar over at militære tropper ikke bør marsjere i takt over broer. På Aamodt Bro fra 1852 kan man lese denne innskriften: «100 Mand kan ieg bære, men svinger under taktfast Marsch». (Aamodt Bro er en vakker, liten hengebro som opprinnelig stod ved Åmot i Modum i Buskerud, men som senere er flyttet til Akerselven i Oslo.)

Det mest slående eksemplet på at resonans virkelig har praktisk interesse, er ulykken med Tacoma Bridge over Puget Sound i staten Washington i USA. Denne broen ble åpnet 1. juli 1940, og fikk raskt tilnavnet «Galloping Gertie» fordi den stadig svingte opp og ned i regelmessige bevegelser.

Fenomenet tiltrakk seg turister og andre nysgjerrige som moret seg med å kjøre over broen mens den galloperte. Om morgenen den 7. november overgikk Gertie seg selv; i flere timer holdt hun det gående med utslag på opp til en meter. Ved 10-tiden

ble bevegelsene enda villere, og differensen fra topp til bunn kom opp i nesten 10 meter. Halv elleve begynte broen å sprekke, og førte minutter senere falt den sammen. En journalist som befant seg på broen, reddet seg i land i siste øyeblikk ved å forlate bilen og løpe for livet. (Søker du på «Tacoma Bridge» på nettet, finner du filmklipp fra hendelsen.)

Tacoma Bridge-ulykken skyldtes et resonansfenomen. Når vinden passerte broen, ble det dannet hvirvler i luften. Disse hvirvlene ga opphav til en periodisk kraft som virket på broen. Frekvensen til en slik kraft avhenger av vindens retning og styrke, men for vanlige vindforhold i Puget Sound lå den nær en av broens egenfrekvenser. Den 7. november 1940 lå den for nær, og broen ristet i stykker. Etter at broen var ødelagt, holdt guvernøren i Washington en inntrengende tale hvor han erklærte: «We are going to build the exact same bridge, exactly as before». Men den lokale banken som reklamerte med at den var like sikker som Tacoma Bridge, fjernet diskre reklameplakaten.

Siden maskiner setter opp vibrasjoner med en fast frekvens, er det umulig å unngå at mekaniske systemer blir utsatt for periodiske krefter. For at resonans ikke skal skade eller ødelegge systemene, må man derfor konstruere dem på en slik måte at egenfrekvensene ligger langt unna de påtrykte frekvensene. Mens resonans er en ulempe i mange mekaniske systemer, er det i andre sammenhenger en fordel man forsøker å utnytte best mulig. I akustikk har man spesielt mange resonansfenomener. Et enkelt eksempel får du om du har to stemmegaffer med samme tone i nærheten av hverandre. Slår du på den ene, vil den andre klinge med. Grunnen er at den første stemmegaffelen setter luften i regelmessige svingninger, og at disse svingningene virker som en periodisk kraft på den andre stemmegaffelen. Siden egenfrekvensene er de samme, vil resonans få den andre stemmegaffelen til å klinge. Dersom de to stemmegafflene har ulik tone, vil den andre fortsatt bli påvirket av luftsvingningene fra den første, men siden egenfrekvensene nå er forskjellige, blir ikke resultatet sterkt nok til at vi hører det.

Et annet viktig eksempel på resonans har vi i elektrisitetslæren. I eksempel 10.5.16 så vi at en elektrisk krets med resistans, spole og kondensator oppfyller samme type differensialligning som en kloss i en fjær. Setter vi på en periodisk, ytre kraft, vil vi derfor få de samme resonansfenomene som i det mekaniske systemet. En måte å skape en slik kraft på, er å utsette strømkretsen for elektromagnetiske bølger. Har disse bølgene samme frekvens som kretsen selv, vil resonansen sørge for en kraftig strømføring i kretsen. Det er dette resonansfenomenet som gjør radio- og TV-overføringer mulig; det gir oss både middelet til å forsterke svake signaler, og muligheten til å skille signaler med ulike frekvenser fra hverandre. Når vi stiller på radioen for å finne en ny stasjon, forandrer vi kretsen slik at egenfrekvensen blir en annen.

Hittil har vi bare regnet på resonans i systemer uten dempning. La oss helt til slutt se litt på hva som skjer med klossen vår når friksjonen er positiv. Vi går tilbake til differensialligningen

$$y'' + \frac{q}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{K}{m} \sin \nu t$$

og forsøker å finne en løsning på formen

$$y_p = A \sin \nu t + B \cos \nu t.$$

Setter vi inn i ligningen, får vi

$$\begin{aligned} y_p'' + \frac{q}{m}y_p' + \frac{k}{m}y_p &= (-A\nu^2 \sin \nu t - B\nu^2 \cos \nu t) + \frac{q}{m}(A\nu \cos \nu t \\ &\quad - B\nu \sin \nu t) + \frac{k}{m}(A \sin \nu t + B \cos \nu t) \\ &= \left[A\left(\frac{k}{m} - \nu^2\right) - B\nu\frac{q}{m} \right] \sin \nu t \\ &\quad + \left[B\left(\frac{k}{m} - \nu^2\right) + A\nu\frac{q}{m} \right] \cos \nu t. \end{aligned}$$

Dette skal være lik $K \sin \nu t/m$, så vi må ha

$$\begin{aligned} A\left(\frac{k}{m} - \nu^2\right) - B\nu\frac{q}{m} &= \frac{K}{m} \\ B\left(\frac{k}{m} - \nu^2\right) + A\nu\frac{q}{m} &= 0. \end{aligned}$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi

$$A = \frac{K(k/m - \nu^2)}{m[(k/m - \nu^2)^2 + (\nu q/m)^2]} = \frac{K(\omega^2 - \nu^2)}{m[(\omega^2 - \nu^2)^2 + (\nu q/m)^2]}$$

og

$$B = \frac{-Kq\nu}{m^2[(k/m - \nu^2)^2 + (\nu q/m)^2]} = \frac{-Kq\nu}{m^2[(\omega^2 - \nu^2)^2 + (\nu q/m)^2]}$$

der vi har innført frekvensen $\omega = \sqrt{k/m}$ til det uforstyrrede systemet *uten friksjon*.

Dette betyr at

$$y_p = \frac{K(\omega^2 - \nu^2)}{m[(\omega^2 - \nu^2)^2 + (\nu q/m)^2]} \sin \nu t - \frac{Kq\nu}{m^2[(\omega^2 - \nu^2)^2 + (\nu q/m)^2]} \cos \nu t$$

en løsning av differensialligningen. Skriver vi denne løsningen på faseform, får vi

$$y_p = \frac{K}{m\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + (\nu q/m)^2}} \sin(\nu t + \phi).$$

Den generelle løsningen av differensialligningen er dermed (vi antar at løsningen av den homogene ligningen er på trigonometrisk form)

$$y = Ce^{-qt/2m} \sin(\omega t + \theta) + \frac{K}{m\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + (\nu q/m)^2}} \sin(\nu t + \phi).$$

Her ser vi et nytt fenomen; den første delen av uttrykket vil dø ut på grunn av den eksponentielle faktoren $e^{-qt/2m}$, og etter en stund vil leddet

$$\frac{K}{m\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + (\nu q/m)^2}} \sin(\nu t + \phi)$$

dominere. Vi får ikke lenger en stabil blanding av frekvenser; systemets egenfrekvens dør ut, og den påtrykte frekvensen overtar. Etter en stund har vi tilnærmet en harmonisk svingning med frekvens ν og amplitude

$$\frac{K}{m\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + q^2\nu^2/m^2}}.$$

Med friksjon får vi ikke det ekstreme utslaget av resonans som vi hadde uten, men amplityden kan også i dette tilfellet bli svært stor. Velger vi $\nu = \omega$, ser vi at amplityden blir

$$\frac{K}{m\sqrt{0 + (\omega q/m)^2}} = \frac{K}{q\omega}.$$

Er friksjonen q liten, blir altså svingningene meget kraftige (vi kan faktisk få noe større amplityde ved et annet valg av ν , men vårt valg $\nu = \omega$ gir bølger med maksimal energi).

Oppgaver i seksjon 10.7

1. a) Vis at når $\nu \neq 1$, så er løsningen til initialverdiproblemet

$$y'' + y = \sin \nu t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (*)$$

gitt ved

$$y_\nu(t) = -\frac{\nu}{1 - \nu^2} \sin t + \cos t + \frac{1}{1 - \nu^2} \sin \nu t.$$

- b) Vis at når $\nu = 1$, så er løsningen av (*)

$$y_1(t) = \frac{1}{2} \sin t + \cos t - \frac{t}{2} \cos t.$$

- c) Vis at når $\lim_{\nu \rightarrow 1} y_\nu(t) = y_1(t)$ for alle t .
 d) Bruk en lommeregner eller en datamaskin til å tegne kurvene til $y_1(t)$ og $y_{1,1}(t)$ i samme koordinatsystem.

2. a) Vis at når $0 < |\epsilon| < 2$, så er løsningen til initialverdiproblemet

$$y'' + \epsilon y' + y = \sin t \quad (*)$$

gitt ved

$$y_\epsilon(t) = e^{-\epsilon t/2} \left[\frac{\epsilon + 1}{2} \sin t + \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \right) \cos t \right] - \frac{\cos t}{\epsilon}.$$

- b) Vis at når $\epsilon = 0$, så er løsningen til (*)

$$y_0(t) = \frac{1}{2} \sin t + \cos t - \frac{t}{2} \cos t$$

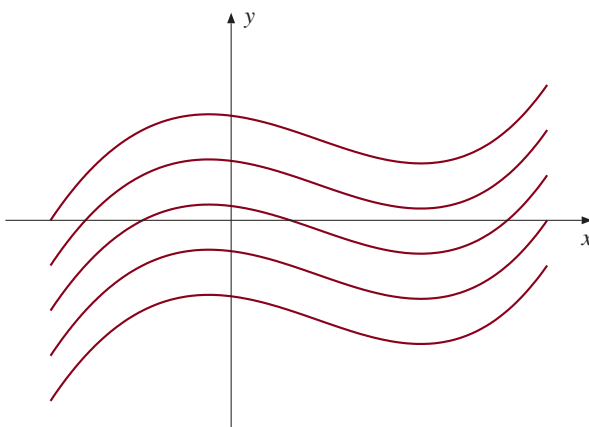
(dette er det samme problemet som oppgave 1b)).

- c) Vis at $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} y_\epsilon(t) = y_0(t)$ for alle t .
 d) Bruk en lommeregner eller en datamaskin til å tegne kurvene til $y_0(t)$ og $y_{0,1}(t)$ i samme koordinatsystem.

*10.8 Numeriske løsninger

Hittil har vi sett på differensialligninger som kan løses ved hjelp av en formel eller en regneoppskrift. Man kan lett få inntrykk av at dette er det normale – at alle (eller i hvert fall nesten alle) differensialligninger kan løses på denne måten. Men det er ikke riktig; det er bare helt spesielle klasser av differensialligninger som har slike løsninger. For de aller fleste ligninger må vi ty til andre midler for å skaffe oss informasjon om løsningsfunksjonene.

I denne seksjonen skal vi se litt på *numeriske metoder*. Dette er metoder som gir oss tilnærmede løsninger med så god nøyaktighet vi måtte ønske. Tidligere var disse metodene så arbeidskrevende at de bare kunne brukes på de aller viktigste problemene, men etter at datamaskinene overtok rutinearbeidet, er de blitt et vanlig redskap på alle fagområder der differensialligninger brukes.



Figur 10.8.1.

Vi skal stort sett illustrere de numeriske metodene på førsteordens differensialligninger

$$y'(x) = f[x, y(x)] \quad \text{med initialkrav} \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Her er f en kjent funksjon, mens (x_0, y_0) er et oppgitt startpunkt. Under passende betingelser på f kan man bevise et eksistens- og entydighetsresultat for slike ligninger: Gjennom hvert punkt (x, y) i planet går det nøyaktig én løsning av differensialligningen $y'(x) = f[x, y(x)]$. Figur 10.8.1 viser noen av løsningskurvene.

Det er lurt å holde fast ved dette geometriske bildet. Vi kan tenke på løsningen av initialverdiproblemet (1) på denne måten: Vi starter i punktet (x_0, y_0) , og når x vokser, flytter vi oss bortover langs løsningskurven gjennom (x_0, y_0) . Denne kurven kan være svært komplisert, og vi skal nå beskrive en enklere måte å bevege seg på.

Istedenfor å følge løsningskurven gjennom (x_0, y_0) , følger vi *tangenten* til løsningskurven et stykke h bortover (se figur 10.8.2). Vi er nå kommet til et punkt vi kaller (x_1, y_1) . Gjennom dette punktet går det også en løsningskurve, og vi følger tangenten til denne et stykke h til vi kommer til punktet (x_2, y_2) . Også gjennom dette punktet går det en løsningskurve, og vi følger tangenten til denne et nytt stykke h fremover til vi når punktet (x_3, y_3) . På denne måten fortsetter vi til vi får en følge av punkter $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$. Dersom h er tilstrekkelig liten,

vil den brukne linjen gjennom disse punktene gi en god tilnærming til løsningskurven gjennom startpunktet (x_0, y_0) .

Fordelen ved denne prosedyren er at vi er i stand til å følge den selv om vi ikke klarer å løse differensialligningen. Dersom vi har funnet punktet (x_{n-1}, y_{n-1}) kan vi nemlig finne det neste punktet (x_n, y_n) på følgende måte: Siden løsningskurven gjennom (x_{n-1}, y_{n-1}) oppfylder ligningen $y'(x) = f[x, y(x)]$, må $y'(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1})$. Dermed vet vi at stigningstallet til tangenten er $f(x_{n-1}, y_{n-1})$, og tangentligningen blir dermed

$$y - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

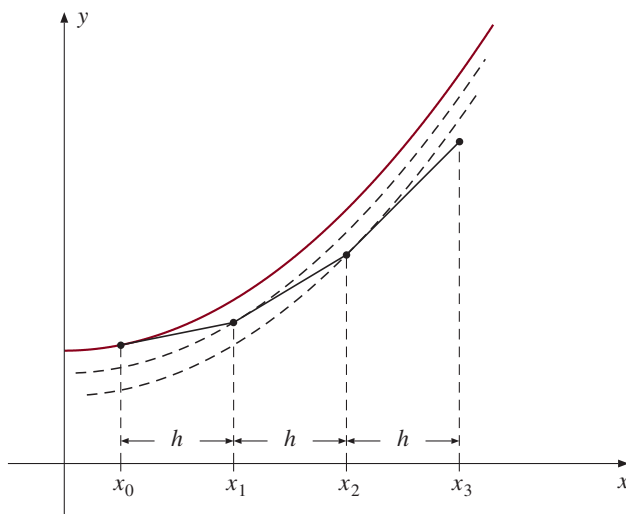
Siden $(x_{n-1} + h, y_n)$ er det punktet vi kommer til om vi følger tangenten et stykke h bortover, får vi

$$y_n - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})[(x_{n-1} + h) - x_{n-1}].$$

Løser vi denne ligningen for y_n , ser vi at

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h.$$

Ved hjelp av denne formelen kan vi regne ut y_n når vi kjenner y_{n-1} . Siden $x_n = x_0 + nh$, er det aldri noe problem med å finne x_n -ene.



Figur 10.8.2.

Denne metoden for å finne tilnærmede løsninger, kalles *Eulers metode med skritt-lengde h* . La oss oppsummere:

10.8.1 Eulers metode Når vi bruker Eulers metode med skrittlengde h til å regne ut en tilnærmet løsning av initialverdiproblemet

$$y'(x) = f[x, y(x)] \quad y(x_0) = y_0,$$

vil den tilnærmede løsningen være en brudden linje som går gjennom punktene (x_n, y_n) definert ved

$$x_n = x_0 + nh \quad y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h. \quad (2)$$

La oss prøve metoden på et eksempel. Vi velger et som er så enkelt at vi også kan løse ligningen eksakt. På denne måten får vi en mulighet til å kontrollere nøyaktigheten av den numeriske løsningen.

10.8.2 Eksempel

La oss se på differensialligningen

$$y' = ay \quad (3)$$

med initialkravet $y(0) = b$. Her er $f(x, y) = ay$, så funksjonen f er uavhengig av x . Løser vi ligningen eksakt ved hjelp av metodene i seksjon 10.1, får vi

$$y(x) = be^{ax}. \quad (4)$$

La oss se hva vi får ved å bruke Eulers metode isteden.

Ifølge (2) er

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h = y_{n-1} + ay_{n-1}h = (1 + ah)y_{n-1}. \quad (5)$$

Bruker vi at $y_0 = b$, får vi dermed

$$y_1 = (1 + ah)y_0 = (1 + ah)b.$$

Deretter får vi

$$y_2 = (1 + ah)y_1 = (1 + ah)(1 + ah)b = (1 + ah)^2b$$

$$y_3 = (1 + ah)y_2 = (1 + ah)(1 + ah)^2b = (1 + ah)^3b$$

og så videre. Generelt har vi åpenbart

$$y_n = (1 + ah)^n b.$$

Foreløpig har vi ikke spesifisert skrittlengden h . Dersom vi er interessert i løsningen i punktet x , er det hensiktsmessig å velge h slik at x blir et av delepunktene x_n . Det får vi til ved å velge $h = x/n$, der $n \in \mathbb{N}$. Løsningen får dermed formen

$$y_n = \left(1 + a\frac{x}{n}\right)^n b. \quad (6)$$

La oss sammenligne dette med det eksakte svaret i (4). I utgangspunktet ser svarene ganske ulike ut, men bruker vi L'Hôpitals regel på uttrykket i (6) (gjør det!), ser vi at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + a\frac{x}{n}\right)^n = e^{ax}.$$

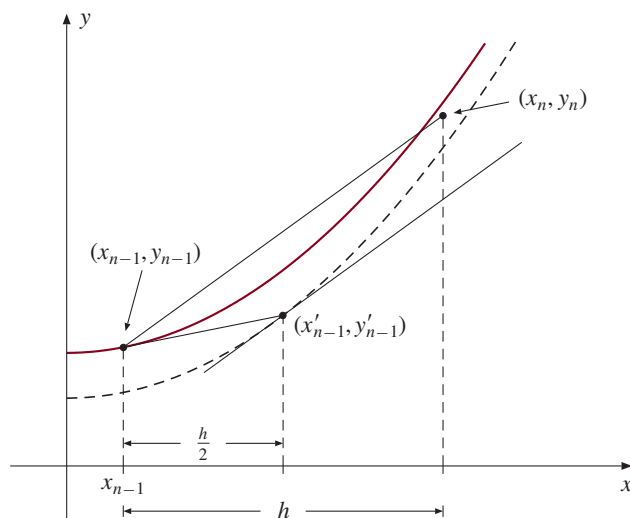
Dette viser at den tilnærmede løsningen konvergerer mot den eksakte, og følgelig ligger de to størrelsene nær hverandre når skritt lengden h er liten. ■

Bemerkning

I eksemplet ovenfor fant vi en enkel formel for y_n . Det er svært uvanlig og skyldes at vi så på en spesielt enkel ligning. Vanligvis må man nøye seg med å regne ut verdiene y_1, y_2, y_3, \dots én etter én ved hjelp av formel (2). Dette er ulidelig kjedelig og arbeidskrevende med papir og blyant, men det går raskt og effektivt med en datamaskin eller en programmerbar lommeregner. Legg forøvrig merke til at ligning (5) er en førsteordens, lineær differensligning. Dette er en av grunnene til de sterke likhetstrekkene mellom differens- og differensialligninger – differensligninger er tilnærminger til differensialligninger. Vi skal komme tilbake til dette temaet mot slutten av seksjonen.

Eulers metode er lett å forstå og enkel å programmere, men den brukes likevel ikke mye i praksis. Grunnen er at det finnes andre metoder som er nesten like enkle å bruke, og som gir atskillig bedre resultater. Vi skal nå se på et par av disse metodene.

En av ulempene ved Eulers metode er at den gir systematiske feil. Krummer for eksempel løsningskurvene oppover som på figur 10.8.2, ser vi at Eulers metode systematisk gir for liten tilvekst når vi går fra y_{n-1} til y_n . Krummer løsningskurvene nedover, vil metoden på tilsvarende måte gi for stor tilvekst. *Eulers midtpunktsmetode* retter opp noe av denne feilen ved å bruke et mer realistisk overslag over hvor fort kurven i gjennomsnitt vokser fra x_{n-1} til x_n .



Figur 10.8.3.

Fremgangsmåten er vist på figur 10.8.3. Som i den vanlige Eulermetoden finner vi først tangenten til løsningskurven i punktet (x_{n-1}, y_{n-1}) . Går vi et stykke $h/2$ ut langs denne tangenten, kommer vi til punktet

$$(x'_{n-1}, y'_{n-1}) = (x_{n-1} + h/2, y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h/2).$$

Vi beregner nå stigningstallet $f(x'_{n-1}, y'_{n-1})$ i dette punktet. Deretter går vi tilbake til (x_{n-1}, y_{n-1}) og forflytter oss et stykke h bortover linjestykket med stigningstall $f(x'_{n-1}, y'_{n-1})$. Det punktet vi nå er kommet til, er (x_n, y_n) . Som figur 10.8.3 antyder, vil denne fremgangsmåten gi en atskillig bedre tilnærming enn den opprinnelige Eulermetoden.

10.8.3 Eulers midtpunktsmetode Når vi bruker Eulers midtpunktsmetode med skrittlengde h til å regne ut en tilnærmet løsning av initialverdi problemet

$$y'(x) = f[x, y(x)], \quad y(x_0) = y_0,$$

vil den tilnærmede løsningen være en brudden linje som går gjennom punktene (x_n, y_n) definert ved

$$x_n = x_0 + nh \quad y_n = y_{n-1} + f(x'_{n-1}, y'_{n-1})h \quad (7)$$

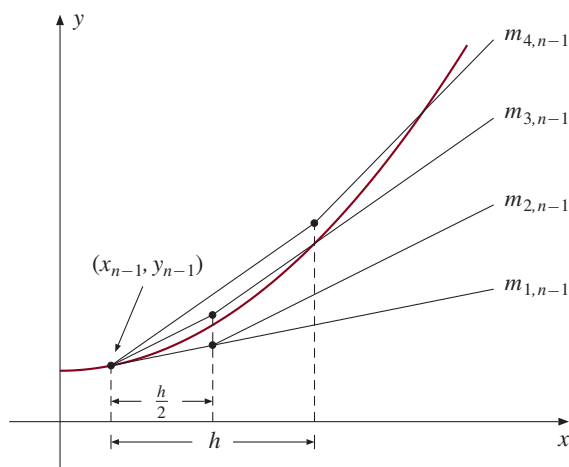
der $(x'_{n-1}, y'_{n-1}) = (x_{n-1} + h/2, y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h/2)$.

Eulers midtpunktsmetode brukes en del i praksis, men som regel utkonkurreres den av den siste metoden vi skal se på – *Runge-Kutta metoden*. Ideen er den samme som i midtpunktsmetoden; vi ønsker fortsatt å følge en brudden linje, men vi er enda nøyere med å finne det beste stigningstallet. Overlegningene som leder frem til metoden, bruker en del teknikker vi ikke har vært borti, så vi nøyer oss med å skrive opp resultatet.

Dersom vi etter $n - 1$ skritt befinner oss i punktet (x_{n-1}, y_{n-1}) , regner vi ut disse fire stigningstallene:

$$\begin{aligned} m_{1,n-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ m_{2,n-1} &= f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + m_{1,n-1} \frac{h}{2}\right) \\ m_{3,n-1} &= f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + m_{2,n-1} \frac{h}{2}\right) \\ m_{4,n-1} &= f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + m_{3,n-1}h). \end{aligned}$$

Vi ser at $m_{1,n-1}$ er stigningstallet til tangenten i punktet (x_{n-1}, y_{n-1}) – altså den stigningen vi bruker i Eulers metode. Følger vi denne stigningen i *halve* intervallet, kommer vi til punktet $(x_{n-1} + h/2, y_{n-1} + m_{1,n-1}h/2)$. Vårt neste tall, $m_{2,n-1}$, er stigningstallet til løsningskurven gjennom dette punktet – altså det stigningstallet vi brukte i midtpunktsmetoden. Starter vi igjen i (x_{n-1}, y_{n-1}) , men bruker stigningstallet $m_{2,n-1}$ istedenfor $m_{1,n-1}$, kommer vi til punktet $(x_{n-1} + h/2, y_{n-1} + m_{2,n-1}h/2)$. Løsningskurven gjennom dette punktet har stigningstall $m_{3,n-1}$. Starter vi atter en gang i (x_{n-1}, y_{n-1}) , men går denne gang med stigningstall $m_{3,n-1}$ over *hele* intervallet, ender vi i punktet $(x_{n-1} + h, y_{n-1} + m_{3,n-1}h)$. Vårt siste stigningstall, $m_{4,n-1}$, er stigningen til løsningskurven gjennom dette punktet (se figur 10.8.4).



Figur 10.8.4.

Vi regner nå ut et veiet gjennomsnitt

$$m_{n-1} = \frac{1}{6}(m_{1,n-1} + 2m_{2,n-1} + 2m_{3,n-1} + m_{4,n-1})$$

av disse tallene. Det er dette stigningstallet vi bruker når vi forflytter oss til neste punkt på den tilnærmede løsningen; altså

$$y_n = y_{n-1} + m_{n-1}h.$$

La oss raskt gå igjennom bruken av metoden. Vi ønsker altså å finne en numerisk løsning av ligningen

$$y'(x) = f[x, y(x)] \quad \text{med initialbetingelse} \quad y(0) = b.$$

Anta at vi har bestemt oss for en skrittlengde h . Initialbetingelsen gir $x_0 = 0$ og $y_0 = b$, og for å finne y_1 , regner vi først ut

$$\begin{aligned} m_{1,0} &= f(x_0, y_0) = f(0, b) \\ m_{2,0} &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + m_{1,0}\frac{h}{2}\right) = f\left(\frac{h}{2}, b + f(0, b)\frac{h}{2}\right) \\ m_{3,0} &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + m_{2,0}\frac{h}{2}\right) = f\left(\frac{h}{2}, b + m_{2,0}\frac{h}{2}\right) \\ m_{4,0} &= f(x_0 + h, y_0 + m_{3,0}h) = f(h, b + m_{3,0}h). \end{aligned}$$

Deretter tar vi det veiede gjennomsnittet

$$m_0 = \frac{1}{6}(m_{1,0} + 2m_{2,0} + 2m_{3,0} + m_{4,0})$$

og ved hjelp av dette kan vi beregne $y_1 = y_0 + m_0h = b + m_0h$. Så gjentar vi hele prosedyren med $x_1 = h$ og $y_1 = b + m_0h$ for å finne y_2 . Regner vi for hånd, blir det mye ubehagelig regning, men igjen er det lett å programmere en datamaskin til å gjøre arbeidet for oss.

La oss oppsummere.

10.8.4 Runge-Kuttas metode Når vi bruker Runge-Kuttas metode med skritt lengde h til å regne ut en tilnærmet løsning av initialverdi problemet

$$y'(x) = f[x, y(x)], \quad y(x_0) = y_0,$$

vil den tilnærmede løsningen være en brudde linje som går gjennom punktene (x_n, y_n) definert ved

$$x_n = x_0 + nh, \quad y_n = y_{n-1} + m_{n-1}h \quad (8)$$

der

$$m_{n-1} = \frac{1}{6}(m_{1,n-1} + 2m_{2,n-1} + 2m_{3,n-1} + m_{4,n-1})$$

og

$$m_{1,n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$m_{2,n-1} = f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + m_{1,n-1}\frac{h}{2}\right)$$

$$m_{3,n-1} = f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + m_{2,n-1}\frac{h}{2}\right)$$

$$m_{4,n-1} = f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + m_{3,n-1}h).$$

Vi legger til at metoden egentlig bør kalles *Runge-Kuttas metode av fjerde orden* – det finnes andre Runge-Kutta-metoder av andre ordener. Fjerdeordens-metoden er sannsynligvis den mest brukte; den gir god nøyaktighet uten å være altfor komplisert å programmere.

Hva mener vi egentlig når vi sier at midtpunktsmetoden er bedre enn Eulers metode, og at Runge-Kuttas metode er bedre enn midtpunktsmetoden igjen? Lar vi h gå mot null, vil (under rimelige betingelser) alle metodene gi tilnærmelser som konvergerer mot den virkelige løsningen, så det er ikke der forskjellen ligger. Forskjellen ligger i hvor *rask* denne konvergensen er. For å forstå dette, må vi tenke på hvordan vi bruker en numerisk teknikk i praksis. Det aller første vi må bestemme, er hvor liten skritt lengden h skal være. Er h liten, blir nøyaktigheten god og regnearbeidet stort, er h stor blir nøyaktigheten dårligere, men regnearbeidet mindre. Jo bedre en metode er, dess bedre nøyaktighet gir den for samme verdi av h . Eulers metode er av *første orden* i h , det vil si at det finnes en konstant C slik at feilen alltid er mindre enn Ch . Midtpunktsmetoden er av *annen orden*, det vil si at feilen er mindre enn Ch^2 for en konstant C . Når h blir liten, er h^2 atskillig mindre enn h , og følgelig gir midtpunktsmetoden mye større nøyaktighet enn den vanlige Eulermetoden. Runge-Kuttas metode er av fjerde orden, så feilen er mindre enn Ch^4 for en konstant C . Dette er en kraftig forbedring fra midtpunktsmetoden. I et problem hvor Eulermetoden gir en feil av størrelsesorden 0.1, vil altså Runge-Kuttas metode typisk gi en feil av størrelsesorden 0.0001 (men man må være litt forsiktig med slike «statiske» sammenligninger siden C 'ene kan være helt forskjellig i de ulike estimatene).

Helt til slutt skal vi si noen ord om numeriske løsninger av *annenordens* differensialligninger, men før vi gjør det, kan det være lurt å se litt på Eulers metode fra en

mer algebraisk og mindre geometrisk synsvinkel. Vi tar igjen utgangspunkt i ligningen

$$y'(x) = f[x, y(x)]. \quad (9)$$

Siden

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

ser vi at om vi velger h liten, så er

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

svært nær $y'(x)$. Erstatter vi derfor $y'(x)$ i ligning (9) med $[y(x+h) - y(x)]/h$ får vi

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = f[x, y(x)]. \quad (10)$$

Løser vi denne ligningen for $y(x+h)$, ser vi at

$$y(x+h) = y(x) + f[x, y(x)]h.$$

Setter vi $x = x_{n-1}$ og $x+h = x_n$, ser vi at dette er nøyaktig samme ligning som vi hadde i Eulers metode. Vi får altså Eulers metode hvis vi erstatter den deriverte $y'(x)$ med differenskvotienten $[y(x+h) - y(x)]/h$.

Det er denne observasjonen som gjør at vi kan bruke Eulers metode på annenordens differensialligninger. Siden vi vet at $y'(t)$ skal erstattes med $[y(t+h) - y(t)]/h$, kan vi også finne ut hva $y''(t)$ skal erstattes med. La oss gå frem trinnvis. Siden y'' er den deriverte av y' , er det naturlig først å erstatte $y''(t)$ med

$$\frac{y'(t+h) - y'(t)}{h}.$$

I neste omgang erstatter vi $y'(t)$ med $[y(t+h) - y(t)]/h$ og $y'(t+h)$ med $[y(t+2h) - y(t+h)]/h$. Alt i alt skal da $y''(t)$ erstattes med

$$\frac{\frac{y(t+2h) - y(t+h)}{h} - \frac{y(t+h) - y(t)}{h}}{h} = \frac{y(t+2h) - 2y(t+h) + y(t)}{h^2}.$$

Bruker vi dette på ligningen

$$y'' + ay' + by = 0$$

får vi

$$\frac{y(t+2h) - 2y(t+h) + y(t)}{h^2} + a \frac{y(t+h) - y(t)}{h} + by(t) = 0.$$

Dette kan også skrives

$$y(t+2h) + (-2+ah)y(t+h) + (1-ah+bh^2)y(t) = 0.$$

Anta at vi ønsker å regne ut $y(t)$ når t er på formen $t = nh$. Innfører vi $y_n = y(nh)$ får vi en annenordens, lineær differensligning

$$y_{n+2} + (-2+ah)y_{n+1} + (1-ah+bh^2)y_n = 0.$$

Dersom differensialligningen har initialbetingelser $y(0) = c$, $y'(0) = d$, får differensligningen initialbetingelser $y_0 = c$, $y_1 - y_0 = dh$ (hvorfor?). Igjen ser vi et nært samspill mellom differensial- og differensligninger.

Oppgaver i seksjon 10.8

1. a) Finn funksjonen y som oppfyller

$$y' = y + x, \quad y(0) = 0. \quad (*)$$

- b) Vis at om du løser (*) med Eulers metode, får du

$$y_n = y_{n-1}(1 + h) + x_{n-1}h.$$

Bruk metoden til å løse (*) på intervallet $[0, 1]$ med skritt lengde $h = 1/5$.

- c) Vis at om du løser (*) med Eulers midtpunktsmetode, så får du

$$y_n = y_{n-1} \left(1 + h + \frac{h^2}{2} \right) + x_{n-1} \left(h + \frac{h^2}{2} \right) + \frac{h^2}{2}.$$

Bruk metoden til å løse (*) på intervallet $[0, 1]$ med skritt lengde $h = 1/5$.

- d) Vis at om du løser (*) med Runge-Kuttas metode, så får du

$$y_n = y_{n-1} \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} \right) + x_{n-1} \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} \right) + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}.$$

Bruk metoden til å løse (*) på intervallet $[0, 1]$ med skritt lengde $h = 1/5$.

- e) Sammenlign verdiene du får for $y(0, 2)$, $y(0, 4)$, $y(0, 6)$, $y(0, 8)$ og $y(1)$ ved å bruke de fire metodene ovenfor.

2. Bruk Eulers metode og Eulers midtpunktsmetode til å finne $y(1)$. Bruk skritt lengde $h = 1/10$.

- a) $y' = \sin y + x$, $y(0) = 2$
 b) $y' = e^{-y} + x^2$, $y(0) = -1$
 c) $y' = \sqrt{y} + e^x$, $y(1) = 4$

3. a) (UiO) Finn løsningen av

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1.$$

- b) Vis at når du løser problemet ovenfor med Runge-Kuttas metode, får du

$$y_n = y_{n-1}p(h)$$

der $p(h)$ er et polynom i h .

- c) Bruk Runge-Kuttas metode med $h = 1/10$ til å finne en tilnærmet verdi for e .

4. a) La y være løsningen av

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Vis at $\lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = \infty$.

- b) Bruk Eulers metode, Eulers midtpunktsmetode og Runge-Kuttas metode på intervallet $[0, 1]$ med skrittlengde $h = 0.1$. Hvilke verdier får du for $y(1)$?

5. Vis at dersom du løser «differensialligningen»

$$y' = f(x), \quad y(a) = 0$$

på intervallet $[a, b]$ ved hjelp av Runge-Kuttas metode, så får du samme svar som om du beregner integralet

$$\int_a^b f(x) dx$$

ved hjelp av Simpsons metode.

6. a) Løs differensialligningen

$$y'' + ay' + by = 0, \quad y(0) = c, \quad y'(0) = d.$$

Løs differensialligningen

$$z_{n+2} + (-2 + ah)z_{n+1} + (1 - ah + bh^2)z_n = 0$$

med $z_0 = c, z_1 = c + dh$.

- b) Diskuter i hvilken forstand løsningen av differensialligningen nærmer seg løsningen av differensialligningen når $h \rightarrow 0$.

7. (UiO) Vi har gitt differensialligningen

$$x' = \frac{x^2}{1+t}, \quad x(0) = 1.$$

- a) Finn en formel for løsningen og skisser den i et plott på intervallet $[0, 1]$.
b) Finn en tilnærming til løsningen i $t = 0.25$ ved å ta ett steg med Eulers metode.

8. (UiO) Vi har gitt differensialligningen

$$x' = e^{-x}, \quad x(0) = 1$$

- a) Finn en formel for løsningen og skisser denne i et plott på intervallet $[0, 1]$.
b) Finn en tilnærming til løsningen i $t = h$ ved å ta ett steg med Eulers metode. Finn en øvre grense for feilen i denne tilnærmingen.

9. (UiO) Vi har gitt differensialligningen

$$x' - (1+t)x = 1+t, \quad x(0) = 0.$$

- a) Finn en formel for løsningen av differensialligningen.
b) Finn to tilnærminger til løsningen i $t = 0.25$: En ved å ta ett steg med Eulers metode, og en annen ved å ta ett steg med Eulers midtpunktsmetode. Hva er avvikene fra løsningen du fant i a)? Er dette rimelige verdier, ut fra hva du vet om nøyaktigheten for disse metodene?

10. (UiO) I denne oppgaven skal du løse en differensialligning numerisk ved hjelp av både Eulers metode og Eulers midtpunktmetode.

a) Funksjonen $x(t)$ er gitt som løsningen til differensialligningen

$$x' = t \sin x, \quad x(0) = 1$$

Finn to tilnærminger x_e og x_m til $x(0.1)$ ved å løse differensialligningen numerisk og ta ett steg med henholdsvis Eulers metode og Eulers midtpunktmetode.

b) Vis at feilen i Eulers metode i dette tilfellet er begrenset av $|x(0.1) - x_e| \leq 0.006$. Forventer du at feilen i Eulers midtpunktmetode vil være større eller mindre enn dette? Begrunn svaret ditt.

10.9 Historisk epistel: Glimt fra differensialligningenes historie

Algebra er bare geometri med bokstaver, og geometri er bare algebra med figurer.

— *Sophie Germain (1776–1831), Mémoire sur les surfaces élastiques.*

Differensialligningene vokste frem i takt med integral- og differensialregningen. Allerede i 1691 kunne Leibniz løse separable differensialligninger, og i 1694 fant han en løsningsmetode for førsteordens lineære ligninger. Også Newton arbeidet med differensialligninger, men han brukte hovedsakelig potensrekkeметoder (se seksjon 12.9). I 1739 oppdaget Euler at han kunne løse lineære differensialligninger med konstante koeffisienter

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

ved å se på røttene i den karakteristiske ligningen

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0.$$

For å bruke denne metoden på komplekse røtter, måtte Euler vise at

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{og} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

På denne måten kom differensialligningene til å kaste nytt lys over de komplekse tallene.

Til å begynne med brukte man differensialligninger til å finne kurver med spesielle geometriske egenskaper, men snart oppdaget man et stort bruksområde i fysikken. Selv om det på kontinentet sto strid om Newtons bidrag til matematisk analyse, hadde hans fysikk en gjennomslagskraft som etter hvert feide alle konkurrenter til side. Hans *Principia* ble oversatt til fransk av Gabrielle Émilie du Chatelet (1706–1749), en omsvermet sositetskvinne som også fant tid til å utvikle sine fremragende evner for språk og naturvitenskap. I en årrekke bodde hun sammen med Voltaire (1694–1778),

en av tidens mest innflytelsesrike filosofer og forfattere, og i ham fant Newtons fysikk en betydningsfull talsmann på kontinentet (selv om han nok måtte spørre sin samboer om de matematiske detaljene!).

Det var i første rekke franskmennene som kom til å videreutvikle Newtons mekanikk, og særlig ga Joseph Louis Lagrange (1736–1813) og Pierre Simon de Laplace (1749–1827) betydelige bidrag. Laplace utga et enormt fembindsverk, *Traité de mécanique céleste*, som oppsummerte alt som var kjent om himmelmekanikk på hans tid. Verket var storslagent, men forfatteren kunne være temmelig skjødesløs, og en av hans oversettere bemerket oppgitt: «Hver gang Laplace skriver ‘... og dermed ser man lett’, vet jeg at jeg har mange timer av hardt arbeid foran meg for å fylle avgrunnen og finne ut *hvordan* man ser lett». At Laplaces ideer likevel fikk stor utbredelse, skyldes blant annet Mary Fairfax Somerville (1780–1872) som i 1830 utga en meget elegant og lesverdig fremstilling av hans teorier, *The Mechanisms of the Heavens*.

De differensialligningene vi har sett på i dette kapitlet, er *ordinære* differensialligninger der de ukjente funksjonene bare avhenger av én variabel x . I mange fysiske eksempler er vi på jakt etter størrelser som avhenger av mer enn en variabel (de kan for eksempel avhenge av både posisjon og tid), og differensialligningen vil da som regel inneholde deriverte med hensyn på alle disse variablene. For å gjøre dette klarere kan vi gå tilbake til eksemplet med den svingende strengen som vi så på i seksjon 5.6. Dersom $u(x, t)$ betegner strengens utslag i posisjon x ved tiden t , viser det seg vi får ligningen

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Her er u_{tt} det uttrykket vi får om vi deriverer u to ganger med hensyn på t mens vi later som om x er en konstant, og u_{xx} er uttrykket vi får om vi deriverer u to ganger med hensyn på x mens vi later som om t er en konstant (c er en størrelse som avhenger av de fysiske egenskapene til strengen). En differensialligning som på denne måten inneholder deriverte med hensyn på flere variable, kalles *partiell* differensialligning. Selv om vi ikke har behandlet partielle differensialligninger i dette kapitlet, er det naturlig å ta dem med i den historiske oversikten.

Den svingende strengen er ikke det eneste fysiske problemet som kan beskrives ved hjelp av en differensialligning. Andre partielle differensialligninger forteller oss hvordan varme brer seg i et legeme, hvordan elektriske ladninger genererer et kraftfelt og hvordan olje strømmer gjennom et reservoar, for bare å nevne noen eksempler. Med så mange forskjellige anvendelser sier det seg selv at det ikke finnes noen enhetlig teori for partielle differensialligninger – vi kan ikke regne med at den samme teorien kan gi oss detaljerte opplysninger om så ulike fenomener som bølger og varmeledning. Det finnes likevel noen metoder og resultater som gjelder for store klasser av ligninger, og vi skal se på to av dem.

Cauchy-Kovalevskaas teorem blir ofte trukket frem som det første generelle teoremet om partielle differensialligninger. Varianter av dette teoremet (som garanterer eksistensen av lokale løsninger under svært generelle initialverdier) ble først bevist av Cauchy, men det var Sofja Kovalevskaia (1850–1891) som ga resultatet en generell form og et fullstendig bevis i sin doktoravhandling fra 1874.

Sofja Vasiljevna Korvin-Krukovskaja (som var hennes pikenavn) ble født i Moskva og vokste opp i en begivenhetsrik periode i russisk historie. Tsar Nikolaj II (1796–1855) hadde holdt Russland i et despotisk jerngrep helt fra han overtok makten i 1825. Da han døde, stilte den liberale opposisjonen store forhåpninger til sønnen Aleksander II (1818–1881). Til å begynne med ble disse forhåpningene innfridd, og spesielt

var frigivelsen av de livegne i 1861 en reform mange hadde sett frem til (en livegen var en tjener, jordarbeider eller husmann som var bundet til et jordgods og kunne kjøpes og selges etter godseierens behag). Men snart svingte Aleksander i konservativ retning, og samtidig ble opposisjonen kraftig radikalisert. Den sterke polariseringen gjorde de neste 20 årene til en kulturell og politisk brytningstid som produserte kunstneriske mesterverk som Turgenjevs, Dostojevskijs og Tolstojs store romaner, men som slett ikke la grunnlaget for fruktbare politiske kompromisser.



Figur 10.9.1. Sofja Kovalevskaja

I denne intense perioden kom kvinnene til å spille en spesiell rolle. De utgjorde ingen enhetlig gruppe; noen ville endre hele samfunnsordenen, andre ville bare ha sin rettmessige del av den eksisterende kulturen. Noen sloss med våpen i hånd, andre dro utenlands for å skaffe seg en utdanning. Sofja Perovskaja ledet attentatet mot Aleksander II; Sofja Kovalevskaja ble verdenskjent for sine bidrag til matematikken.

Siden universitetene var stengt for kvinner, ble det arrangert spesielle forelesningsserier andre steder. Ofte kunne disse forelesningene trekke hundrevis av tilhørere, men kvinner som ønsket en formell utdanning, måtte dra til utlandet. I Zürich ble det etter hvert en koloni av kvinnelige russiske studenter. De fleste valgte jordnære fag som jus og medisin – fag som ville gi dem en naturlig plattform i samfunnsstriden. Sofja Kovalevskaja valgte matematikk, men hun var ikke mindre engasjert i tidens spørsmål av den grunn.

Sonja (som hun ble kalt til daglig) kom fra en velstående godseierfamilie. Faren var general i hæren, men trakk seg tilbake til godset allerede mens Sonja var barn. Hun forteller selv at hennes interesse for matematikk først ble vakt ved en tilfældighet. Under en oppussing hadde man for lite tapet, og veggene på barneværelset ble derfor midlertidig tapetsert med en bunke papirer man fant på loftet. Det viste seg å være notatene til Ostrogradskijs forelesninger om integral- og differensialregning som faren hadde fulgt i sin ungdom. Elleve år gamle Sonja kunne stirre i timevis på de mystiske symbolene på veggen.

Av huslæreren rakk hun å lære algebra og geometri før faren satte en stopper for videre undervisning. Lærde kvinner var det verste han visste! Sonja tilranet seg lærerens kopi av Bourdons algebrabok og studerte den i hemmelighet om natten. Hun snappet også opp en fysikkbok som en professor i nabolaget hadde skrevet og forært

til generalen. Det gikk bra inntil hun støtte på de trigonometriske funksjonene som hun aldri hadde sett før. Å spørre huslæreren var til ingen nytte – han hadde aldri lært trigonometri og kunne ikke hjelpe henne. Forarget bestemte Sonja seg for å finne ut av mysteriet på egen hånd. Hun greide det godt nok til å komme gjennom boken, og da naboen neste gang kom på besøk, ble han så imponert at han fikk overtalt en motvillig general Korvin-Krukovskij til å betale for privatundervisning. I løpet av en vinter lærte Sonja seg trigonometri, analytisk geometri og integral- og differensialregning. Spørsmålet var bare hvordan hun skulle komme videre – det var utenkelig at faren ville gi henne tillatelse til å studere i utlandet.

En ulykke kommer sjelden alene, og stakkars general Korvin-Krukovskij var ikke bare forbannet med én vakker, begavet og viljesterk datter, men med to. Sonjas syv år eldre søster Anna kunne dominere et ball med sin skjønnhet og sitt vidd, men hun hadde andre mål i livet enn å kapre seg et best mulig parti. I 1864 sendte hun inn en novelle til Dostojevskijs tidsskrift *Epoke*. Han var tilstrekkelig imponert til å publisere den, og enda mer imponert ble han da han året etter traff henne i Sankt Petersburg. Han fridde, men fikk nei. Femtenårige Sonja var opprørt på hans vegne og overbevist om at han hadde fridd til gal søster.

Annas forbindelser til det intellektuelle miljøet ble imidlertid løsningen på Sonjas utdanningsproblem. Ved hennes hjelp fikk Sonja kontakt med Vladimir Kovalevskij som var villig til å inngå et proforma ekteskap for å hjelpe henne ut av landet. Vladimir var en lovende paleontolog som ønsket å underbygge utviklingslæren gjennom studiet av fossiler. Broren Aleksander var allerede en veletablert biolog og regnes i dag som en av Darwins viktigste etterfølgere. Sonja og Vladimir giftet seg i 1868, og våren etter tok de med seg Anna og dro til Heidelberg der Sonja skulle studere. Det viste seg at heller ikke universitetet i Heidelberg var åpent for kvinner, men Sonja greide i hvert fall å skaffe seg tillatelse til å følge forelesningene. Selv om hun også var interessert i fysikk og kjemi, innså hun raskt at det var matematikken som lå hennes hjerte nærmest. Bevæpnet med anbefalelsesbrev fra alle sine lærere i Heidelberg, dro hun til Berlin for å studere med Tysklands fremste matematiker, Karl Weierstrass. I Berlin hadde ikke kvinner adgang til universitetet overhodet, men Weierstrass tilbød seg å undervise henne privat. Hun ble raskt hans fremste elev, men doktorgraden måtte hun formelt avlegge ved universitetet i Göttingen.

I mellomtiden hadde Anna dratt videre til Paris på jakt etter større oppgaver. Hun forelsket seg i en revolusjonær fransk lege, Victor Jaclard, og under den radikale Pariserkommunen i 1871, da Paris erklærte seg uavhengig og ble beleiret av franske tropper, kom de til å spille en så sentral rolle at Jaclard sto i fare for å bli henrettet da kommunen falt. Sonja var bekymret for søsteren og reiste til Paris midt under den verste striden. Side om side arbeidet søstrene med syke og sårede. Gamle general Korvin-Krukovskij dro til Paris for å utnytte sine politiske forbindelser, og noen få dager senere unnslopp Jaclard under mystiske omstendigheter.

Etter doktorgraden i 1874 drar Sonja tilbake til Russland sammen med Vladimir. Nå kommer den merkeligste perioden i hennes liv. Hun legger matematikken helt til side, slutter å svare på Weierstrass' brev, og forsøker så godt som råd er å leve et konvensjonelt liv. Ekteskapet er ikke mer proforma enn at Sonja og Vladimir får en datter i 1878.

Først i 1880 våkner den faglige interessen på nytt. Den kjente russiske matematikeren Pavnutij Tsjebysjev inviterer henne til å holde et foredrag ved en stor, internasjonal konferanse i Sankt Petersburg. Foredraget blir en sensasjon, og Sonja begyn-

ner igjen å arbeide. Hun reiser til Berlin og Paris og blir kjent med tidens ledende matematikere.

Med Vladimir går det dårlig, Selv med en glimrende doktorgrad fra Tyskland får han ikke arbeid i Russland. Isteden slår han seg på eiendomsspekulasjon. Han har en livslang forkjærlighet for det storslåtte og ugjennomførbare, og i 1883 er alt håp ute. Han begår selvmord. Sonja får beskjeden i Paris.

Samme høst får hun brev fra en annen av Weierstrass' elever, Gösta Mittag-Leffler (1846–1927). Han vil ha henne til en stilling ved den nyopprettede Stockholms Högskola. Etter et prøveår blir hun den første kvinnelige professor i matematikk i moderne tid. Hun lærer seg raskt svensk og blir en sentral person i Stockholms selskapsliv. I 1888 vinner hun den store prisen til vitenskapsakademiet i Paris for en avhandling om rotasjon av stive legemer.

I Stockholm begynner hun også en ny karriere. Mittag-Lefflers søster, Anne-Charlotte Leffler, er en kjent forfatter, og hun og Sonja skriver et skuespill sammen. Sonja følger opp med en bok om sin egen barndom (i den svenske utgaven forkledd som en roman), og hun skriver også en politisk roman som først blir utgitt etter hennes død.

I 1887 forelsker hun seg i en mann som ved en tilfeldighet bærer hennes eget etternavn. Maksim Kovalevskij kommer til Stockholm for å forelese etter å ha blitt avsatt fra sitt professorat i Moskva av politiske grunner. Han frir til henne. Hun avslår, men kan likevel ikke frigjøre seg. Rett før jul i 1890 besøker hun ham i hans villa på rivieraen. De krangler, og hun tilbringer en kald dag ute i regn og vind i Genoa. På veien tilbake til Stockholm får hun lungebetennelse, og noen dager etter hjemkomsten dør hun, bare 41 år gammel.

Da Sofja Kovalevskaja kom til Stockholm første gang, skrev August Strindberg i en avisartikkel at en kvinnelig matematikkprofessor var «ett elakartat och obehageligt fenomen – man kan t.o.m. säga en ohyggenhet». I ettertid har hun blitt et symbol på det motsatte – på at kvinner har en naturlig plass i matematikken på lik linje med menn. Men hennes karriere symboliserer også alle de ekstra vanskelighetene som kvinner har hatt, og til dels ennå har. Hun var selv klar over at det ikke bare var de store vanskelighetene som måtte overvinnes. I et brev skriver hun: «Alle disse tåpelige, praktiske tingene som ikke lar seg utsette, er en prøvelse for min tålmodighet, og jeg begynner å forstå hvorfor menn setter slik pris på gode, praktiske husmødre. Var jeg en mann, skulle jeg velge meg en vakker liten kone som kunne frigjøre meg fra alt dette.»

Sofja Kovalevskajas avhandling om Cauchy-Kovalevskajas teorem er et bravadenummer i matematisk analyse – den er full av all verdens ulikheter og estimater. Under alle regnestykkene ligger det imidlertid en geometrisk observasjon om at visse «karakteristiske» kurver skiller seg ut og må behandles med forsiktighet. Den geometriske komponenten har alltid vært viktig i teorien for differensialligninger, og før Kovalevskajas tid hadde den særlig manifestert seg i Gaspard Monges (1746–1818) elegante teori for det som kalles førsteordens, kvasilineære ligninger. I 1870-årene skulle imidlertid den geometriske teorien for differensialligninger gjennomgå en revolusjon regissert av den unge Sophus Lie.



Figur 10.9.2. Marius Sophus Lie

Marius Sophus Lie (1842–1899) ble født i Nordfjordeid der faren var sogneprest. Han var den nest yngste av syv søsken. Moren døde tidlig, og mye av ansvaret for familien falt på den eldste søsteren.

I 1851 flyttet familien til Moss. Her gikk Sophus på skole inntil han begynte på Nissens latin- og realskole i Christiania. Karakterbøkene hans finnes fortsatt og viser at han utmerket seg i alle fag. Egentlig hadde han tenkt å bli offiser, men synet var for dårlig, og etter noe nøling valgte han å studere realfag og ikke språk.

Etter embedseksamen i 1865 følger noen søkende år der han leser videre på egen hånd og livnærer seg ved privatundervisning. Utlånsprotokollene ved Universitetetsbiblioteket viser hvordan han sakte sirkler inn den moderne geometrien som skulle bli hans store interesse. I 1869 løsner det, og han publiserer sin første avhandling, *Repräsentation der Imaginären der Plangeometrie*. Det var ingen andre i Norge som arbeidet med denne typen geometri, men man forsto likevel nok til at avhandlingen ble trykt for vitenskapsakademiets regning. Enda viktigere er det at Sophus Lie får et reisestipend slik at han kan reise til utlandet et år.

Første stopp er Berlin som på denne tiden er Tysklands matematiske sentrum. Lie treffer Tysklands ledende matematikere, Kummer, Weierstrass og Kronecker, men viktigere for hans videre utvikling er møtet med den unge Felix Klein (1849–1925). Klein var et vidunderbarn som hadde avlagt doktorgraden bare 19 år gammel, og hans og Lies arbeider hadde klare anknypningspunkter. De blir venner og samarbeidspartnere. Da Lie drar til Paris våren 1870, følger Klein snart etter, og de finner en leilighet sammen. Klein har skildret en av Lies viktigste oppdagelser i denne perioden:

«En morgen i begynnelsen av juli 1870 hadde jeg stått tidlig opp og var nettopp i ferd med å gå ut, da Lie, som ennå lå til sengs, ropte meg inn til seg og forklarte sammenhengen han i løpet av natten hadde funnet mellom en flates hovedtangenterkurver og en annen flates krumningskurver på en slik måte at jeg overhodet ikke forsto et ord... Han påsto at hovedtangenterkurvene til Kummer-flaten måtte være algebraiske kurver av sekstende grad.»

Bare noen dager etter brøt den tysk-franske krig ut, og Klein måtte skynde seg tilbake til Tyskland. Lie hadde tenkt seg videre til Italia, og bestemte seg sin vane tro for å gå. Han kom ikke langt – i Fontainebleau ble han arrestert som tysk spion. Brevene fra Klein – på tysk og fulle av mystiske symboler – hjalp ikke saken. En måned ble han sittende fengslet før hans franske venn Gaston Darboux nådde frem med et frigivelsesbrev fra innenriksministeren. Sophus Lie skrev hjem:

«Ulykken er ikke så stor nu som det er over, men det kunde være bleven en afskyelig Affære i denne forrykte Tid. . . Jeg har forresten, fraregnet det første Moment, hvor jeg dog kun troede at det gjaldt et par Dage, taget Tingene med en veritabel Philosophi. Jeg tror en Mathematiker er forholdsvis godt skikket til at være i Fængsel.»

Lie dro videre til Sveits og Italia. Vel hjemme igjen ble han universitetsstipendiat, og sommeren 1871 disputerte han for doktorgraden. Opponenten var tre professorer fra universitetet, Bjerknes, Guldberg og Münster. Lies yngre kollega, Elling Holst (1849–1915), har gitt en levende skildring av begivenheten:

«En doktordisputas var da en stor sjeldenhet, og den høytidelige akt, tross det uforståelige emnet, samlet spente tilhørere. Bjerknes' klassiske og Lies radikalt moderne syn var uten ethvert berøringspunkt. Guldberg innlot seg ikke på emnet, og Münster slapp å delta i opposisjonen. Med stor glans ble Lie kreert til doktor. Ikke en mors sjel hadde begrepet et ord av det hele.»

Med sin nyvunne doktorgrad søkte Lie en stilling ved universitetet i Lund, men Stortinget skyndtet seg å bevilge penger til et ekstraordinært professorat i Christiania slik at han kunne bli i landet. Med fast stilling fikk Sophus Lie den roen og sikkerheten han trengte til å utvikle sine teorier – og til å stifte familie. I 1872 fridde han til den attenårige Anna Sophie Birch og i 1874 giftet de seg. De fikk tre barn, to døtre og en sønn.

Som ung student hadde Lie i 1862 hørt Ludvig Sylow forelese om Galois' gruppeteori og dens anvendelser på algebraiske ligninger. Nå oppdaget Lie at han på en lignende måte kunne bruke grupper til å omforme og løse differensialligninger. De gruppene han brukte, var nært knyttet til den geometriske tolkningen av differensialligningen – de var en bro som bandt sammen den geometriske og analytiske siden av det samme problemet. Studiet av disse gruppene opptok ham etter hvert mer og mer. Han kalte dem transformasjonsgrupper. Idag kaller vi dem Lie-grupper til hans ære.

Årene som ekstraordinær professor var gode arbeidsår, men Sophus Lie følte seg ensom og oversett i Christiania – ingen av hans kolleger skjønnte stort av det han drev med, og han fikk heller ikke den oppmerksomheten i utlandet som han hadde håpet på. I 1885 åpnet det seg en mulighet for bedre kontakt med det internasjonale matematikkmiljøet. Felix Klein var blitt kallet til en stilling i Göttingen, og han ønsket Sophus Lie som sin etterfølger i Leipzig. Lie takket ja.

Den nye stillingen ga Sophus Lie en helt annen posisjon i internasjonal matematikk, og det gikk ikke lenge før universiteter over hele verden begynte å sende studenter til Leipzig for å lære om hans teorier. Stillingen innebar imidlertid også undervisningsmessige og administrative plikter langt utover det han tidligere hadde hatt, og i 1889 bryter han sammen under arbeidspresset. Han lider av søvnløshet, lysømfintlighet og depresjon. Etter noen måneder med sterk medisinerings på et nervesanatorium,

bestemmer han seg for å kutte ut medisinen og gjenvinne helsen på sin egen måte. Han skriver:

«Jeg vil nu curere mig paa egen Haand. Jeg vil gaa fra Morgen til Aften (hvad Lægene kalder for Daarskab). Da skal for det Første al Opiumsvisneriet drives ud og da vil med Tiden den naturlige Søvn vende tilbage. Saa er mitt Haab.»

Hestekuren virker, og Sophus Lie gjenvinner helsen og skaperkraften. Men det har kostet – han føler seg eldre, og det ser ut til at noe av gleden og overskuddet er borte for alltid. Han blir provosert av Kleins historiske fremstilling av samspillet mellom grupper og geometri, og føler at hans gamle venn vil ta æren for hans egne oppdagelser. De krangler, og Lie skriver: «Jeg er ingen elev av Klein. Det motsatte er heller ikke tilfelle, selv om det kanskje er nærmere sannheten.»

Han lengter hjem, vekk fra storbyliv og administrasjon. Samtidig er det en økende interesse i Norge for å få ham tilbake – unionstriden tilspisser seg, og alle nasjonale symboler pusses blanke. Stortinget bevilger et professorat med de samme lønnsvilkårene som i Leipzig. Men Sophus Lie har et problem – familien trives i Leipzig. Barna begynner å bli voksne og vil ikke flytte fra sine venner. Anna Lie har det godt som tysk professorfrue. Først sommeren 1898 kommer Sophus Lie hjem, men da er det for sent. Han er dødssyk og må avbryte sine forelesninger etter et par måneder. Seminarene fortsetter han med hjemme, men kreftene ebber ut og i februar 1899 dør han.

Sophus Lies livsverk har en sentral plass i moderne matematikk. Begrepene som han skapte, og som er oppkalt etter ham – Lie-grupper, Lie-algebraer og så videre – dukker opp i alle deler av matematikken. Hans egen analyse av disse begrepene og deres anvendelser på differensialligninger var i mange år trengt litt i bakgrunnen, men i de senere år er de igjen kommet frem i lyset. Hundre år etter sin død er Sophus Lie viktigere enn noen gang.

Vil du vite mer om differensialligninger, er det mange bøker å velge mellom. Braun har skrevet en god og utradisjonell bok [4] som legger stor vekt på anvendelser, og som ikke forutsetter spesielle forkunnskaper. Boken til Hubbard og West [7] fremhever geometriske og numeriske metoder på en interessant måte. En mer tradisjonell fremstilling finner du i Boyce og DiPrimas velbrukte lærebok [3]. Vil du ha fremstillingen elegant og avansert, kan du prøve Birkhoff og Rota [2]. De fleste av disse bøkene går etter hvert over til å behandle partielle differensialligninger, men du trenger nok å vite litt om funksjoner av flere variable før du går løs på dette temaet, se f.eks. [10]. En liten smakebit kan du likevel få ved å se på Holdens artikkel [6] om differensialligninger og bilkøer.

Er du interessert i Sofja Kovalevskaja, er det mye litteratur å velge i, blant annet en biografi [8] og en systematisk gjennomgang av hennes matematikk (supplert med fyldige biografiske opplysninger) i [5]. Du finner også et kapittel om henne i Osens bok [12] om kvinnelig matematikere (her finner du i tillegg mer om Émilie du Chatelet og Mary Fairfax Somerville). Kovalevskajas skildring av sin egen barndom [9] er også vel verd å ta med seg. (I det samme bindet finner du også en biografisk artikkel og en gjennomgang av hennes matematikk.)

Arild Stubhaug har skrevet en utmerket biografi av Sophus Lie [14], og kortere biografiske omtaler finner du f.eks. i [1], [13] og [15]. For øvrig var et helt hefte av *NORMAT* [11] viet Sophus Lie i forbindelse med 150-års dagen for hans fødsel. Her

finner du først og fremst artikler om Sophus Lies matematikk – og de kan nok være krevende å lese!

Litteratur

- [1] Baas, Nils Andreas: «Sophus Lie», i Hag, Per og Ben Johnsen (red.): *Fra matematikkens spennende verden*, Tapir, Trondheim, 1993, 21–27.
- [2] Birkhoff, G. og G.-C. Rota: *Ordinary Differential Equations*, 4th Edition, Wiley, New York, 1989.
- [3] Boyce, W.E. og R.C. DiPrima: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 5th Edition, Wiley, New York, 1992.
- [4] Braun, Martin: *Differential Equations and their Applications*, 4th Edition, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [5] Cooke, Roger: *The Mathematics of Sonya Kovalevskaya*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [6] Holden, Helge: «En trafikkmodell», i Truls Sevje (red.): *Den levende matematikken*, Undervisningsforlaget, Sandefjord, 1994, 64–85.
- [7] Hubbard, John H. og Beverly H. West: *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach I*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [8] Koblitz, Ann Hibner: *A Convergence of Lives. Sofia Kovalevskaja: Scientist, Writer, Revolutionary*, Birkhäuser, Boston, 1983.
- [9] Kovalevskaya, Sonya: *A Russian Childhood*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [10] Lindstrøm, Tom og Klara Hveberg: *Flervariabel analyse og lineær algebra*, Gyldendal Akademisk, Oslo, 2015.
- [11] *NORMAT*, hefte 4, årgang 40, 1992.
- [12] Osen, Lynn M.: *Women in Mathematics*, MIT Press, Cambridge, 1974.
- [13] Strøm, Elin: «Marius Sophus Lie», i O.A. Laudal og B. Jahren (red.): *The Sophus Lie Memorial Conference*, Universitetsforlaget, Oslo, 1994.
- [14] Stubhaug, Arild: *Det var mine tankers djervhet: Matematikeren Sophus Lie*, Aschehoug, Oslo, 2000.
- [15] Svare, Helge: «Sophus Lie», *NORMAT* 40 (1992), 148–159 (finnes også i Truls Sevje (red.): *Den levende matematikken*, Undervisningsforlaget, Sandefjord, 1994, 276–284).

11

Funksjonsfølger

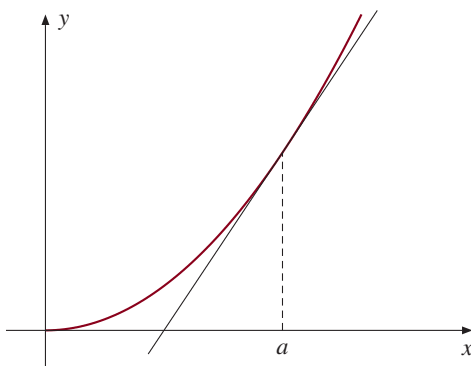
Det synes for meg at en dikter må se hva andre ikke ser – må se dypere enn dem. Og det samme må en matematiker.

— Sofja Kovalevskaja (1850–1891),
Brev

I kapittel 4 studerte vi følger av tall. I dette kapitlet skal vi studere følger av funksjoner. Slike følger er nyttige både når vi skal konstruere nye funksjoner, og når vi skal utforske nye egenskaper ved velkjente funksjoner.

11.1 Taylor-polynomer

Vi skal begynne med en konkret problemstilling. Vi vet at tangenten til grafen $y = f(x)$ i punktet a er den rette linjen som smyer seg best inntil grafen i nærheten av a . Er vi tilstrekkelig nær a , er det nesten umulig å se forskjell på grafen og tangenten, men går vi et stykke unna, kan forskjellen bli stor (se figur 11.1.1). Spørsmålet vårt er: Kan vi finne enkle kurver som følger grafen tett over et større område?



Figur 11.1.1.

Først må vi presisere hva vi skal mene med «enkle kurver». En rett linje er grafen til et førstegradspolynom, så tangenten er opplagt den beste førstegradskurven vi kan finne. Men hva med annengradskurver – kanskje vi kan finne en kurve av annen grad

som følger grafen bedre enn det tangenten gjør? Hvilken annengradskurve skulle det i så fall være?

Husk at tangenten smyer seg så godt inntil grafen fordi den har samme funksjonsverdi og stigningstall i a som grafen selv. Grunnen til at den ikke følger grafen over et større område, er at grafen krummer mens linjen er rett. Dersom vi kunne finne en annengradskurve som krummet like mye som grafen i punktet a , ville den sannsynligvis følge grafen bedre enn det tangenten gjør. Det enkleste målet for krumning er den annenderiverte. Vi ønsker oss derfor et annengradspolynom som har samme funksjonsverdi, førstederivert og annenderivert som den opprinnelige grafen.

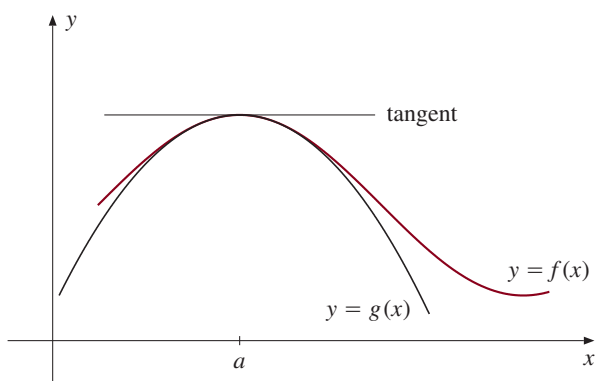
Hva betyr så dette i praksis? En generell annengradsfunksjon er på formen

$$g(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2$$

der c_0 , c_1 og c_2 er konstanter. (Du er sikkert mer vant til den ekvivalente formen $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, men den er mindre hendig for vårt formål.) Deriverer vi, ser vi at

$$g'(x) = c_1 + 2c_2(x - a)$$

$$g''(x) = 2c_2.$$



Figur 11.1.2.

I punktet $x = a$, har vi derfor

$$g(a) = c_0, \quad g'(a) = c_1, \quad g''(a) = 2c_2.$$

Skal disse verdiene være lik henholdsvis $f(a)$, $f'(a)$ og $f''(a)$, får vi

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2}.$$

Annengradspolynomet blir dermed

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

Grafen til dette polynomet er altså den annengradskurven som smyer seg best inntil grafen $y = f(x)$ i nærheten av a . Figur 11.1.2 viser grafen til $f(x)$, tangenten i $x =$

a og annengradskurven $y = g(x)$. Vi ser at annengradskurven gir en langt bedre tilnærming enn tangenten.

Ideen ovenfor er lett å generalisere. Det n -te gradspolynom $h(x)$ som passer best til grafen $y = f(x)$ i nærheten av a , er det som har den samme funksjonsverdien og de samme n første deriverte som f i punktet a . Siden et n -te gradspolynom kan skrives på formen

$$h(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n$$

behøver vi bare bestemme koeffisientene $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$. Før vi starter arbeidet, minner vi om notasjonen $f^{(n)}$ for den n -te deriverte til f . Med den nullte-deriverte $f^{(0)}$ skal vi mene f selv.

Deriverer vi nå $h(x)$, får vi (gjør regningene selv, så ser du mønsteret bedre):

$$\begin{aligned} h'(x) &= c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \dots + nc_n(x - a)^{n-1} \\ h''(x) &= 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + \dots + (n - 1)nc_n(x - a)^{n-2} \\ h'''(x) &= 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + \dots + (n - 2)(n - 1)nc_n(x - a)^{n-3} \\ &\dots \dots \dots \\ h^{(k)}(x) &= k! \cdot c_k + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k + 1)c_{k+1}(x - a) + \dots \\ &\quad + (n - k + 1)(n - k + 2) \dots nc_n(x - a)^{n-k} \\ &\dots \dots \dots \\ h^{(n)}(x) &= n!c_n. \end{aligned}$$

Setter vi inn $x = a$, ser vi at

$$\begin{aligned} h(a) &= c_0, \quad h'(a) = c_1, \quad h''(a) = 2c_2, \quad h'''(a) = 6c_3, \\ &\dots, \quad h^{(k)}(a) = k!c_k, \quad \dots, \quad h^{(n)}(a) = n!c_n. \end{aligned}$$

Disse verdiene skal altså være lik henholdsvis $f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \dots, f^{(k)}(a), \dots, f^{(n)}(a)$. Dette gir

$$\begin{aligned} c_0 &= f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2}, \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{6}, \\ &\dots, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad \dots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \end{aligned}$$

Polynomet vi er på jakt etter, er altså

$$\begin{aligned} h(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \end{aligned}$$

(der $f^{(0)}(a)$ betyr $f(a)$). Vi har dermed vist:

11.1.1 Setning

Anta at f er n ganger deriverbar i punktet a . Da er polynomet

$$\begin{aligned} h(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

det eneste n -te gradspolynomet som har samme funksjonsverdi og de samme n første deriverte som f i punktet a .

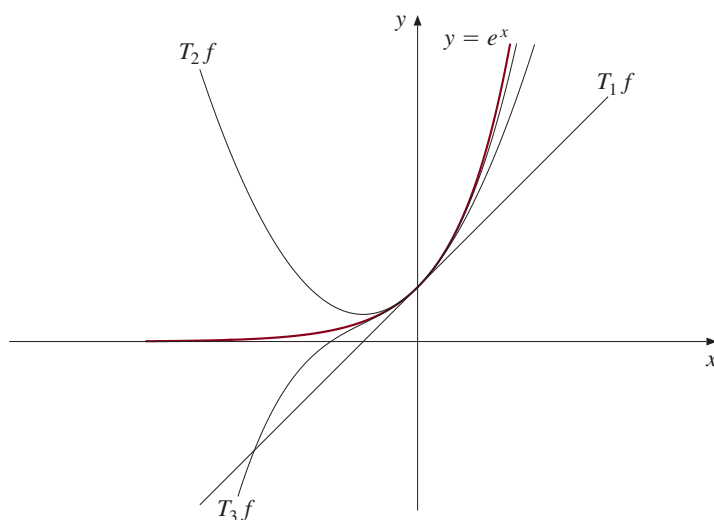
11.1.2 Definisjon

Polynomet ovenfor kalles *Taylor-polynomet* til f av grad n om punktet a . Vi betegner det med $T_n f$ – altså

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Bemerkning

Taylor-polynomer er oppkalt etter den engelske matematikeren Brook Taylor (1685–1731). Egentlig burde vi ha skrevet $T_n f(x; a)$ eller noe lignende for å markere hvilket punkt a vi utvikler rundt, men vi vil helst ikke gjøre notasjonen for tungvinn.



Figur 11.1.3.

Figur 11.1.3 viser funksjonen $f(x) = e^x$ og grafen til noen av dens Taylor-polynomer om punktet 0. Vi ser at jo høyere graden blir, desto bedre tilpasser Taylor-polynomene seg funksjonsgrafene.

La oss regne ut noen Taylor-polynomer.

11.1.3 Eksempel

Finn Taylor-polynomet av grad n til e^x om punktet 0.

Deriverer vi $f(x) = e^x$, får vi $f^{(n)}(x) = e^x$ for alle n . Dermed er $f^{(n)}(0) = 1$ for alle n , og vi får

$$T_n(e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Skriver vi dette uten summtegn, får vi

$$T_n(e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

■

Neste eksempel er litt verre.

11.1.4 Eksempel

Finn Taylor-polynomene til $f(x) = \sin x$ om punktet 0.

Deriverer vi $f(x) = \sin x$, får vi

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f''''(x) = \sin x.$$

Vi er nå tilbake til utgangspunktet, og derivasjonene begynner å gjenta seg selv. Setter vi inn $x = 0$, ser vi at

$$f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(0) = -\sin 0 = 0$$

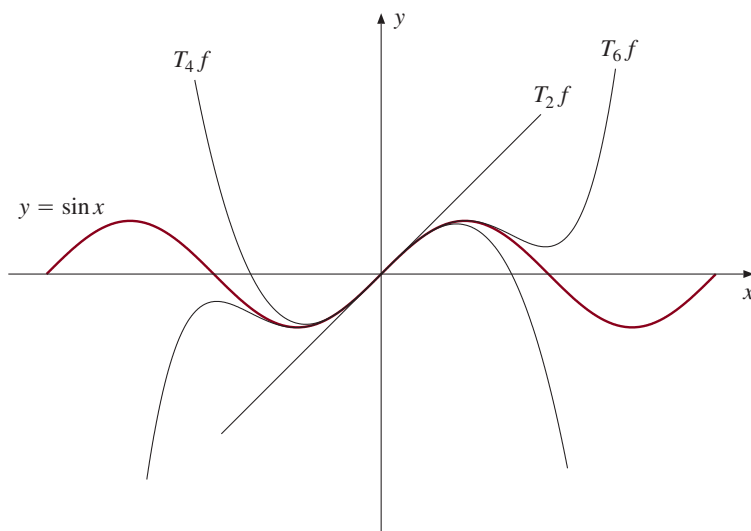
$$f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

og dette mønsteret vil gjenta seg nedover – annenhver derivert er null, og de andre veksler mellom 1 og -1 . Begynnelsen av Taylor-polynomene ser derfor slik ut:

$$\begin{aligned} T_n \sin(x) &= 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Hvordan Taylor-polynomene ender, avhenger av om n er like eller odde. Siden det $2n$ -te leddet i Taylor-polynomet $T_{2n} \sin(x)$ er lik null, må $T_{2n} \sin(x) = T_{2n-1} \sin(x)$. Vi nøyer oss derfor med å skrive opp de like Taylor-polynomene

$$\begin{aligned} T_{2n} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}. \end{aligned}$$



Figur 11.1.4.

Figur 11.1.4 viser $\sin x$ og noen av Taylor-polynomene. Legg merke til at Taylor-polynomene får med seg flere og flere av «bølgene» til $\sin x$ etter hvert som graden vokser. ■

En helt tilsvarende regning for $f(x) = \cos x$ gir

$$T_{2n+1} \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

I dette tilfellet er $T_{2n+1} \cos(x) = T_{2n} \cos(x)$, så det er nok å skrive opp Taylor-polynomene av odde orden.

La oss til slutt finne et Taylor-polynom om et annet punkt enn 0.

11.1.5 Eksempel

Finn Taylor-polynomiet til $f(x) = \ln x$ om punktet 1.

Deriverer vi, får vi

$$f'(x) = x^{-1}$$

$$f''(x) = -x^{-2}$$

$$f'''(x) = 2x^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3x^{-4}$$

$$f^{(5)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4x^{-5}.$$

Nå burde mønsteret begynne å bli klart;

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}$$

(bevis denne formelen ved induksjon!). Setter vi inn $x = 1$, får vi $f(1) = 0$ og

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

for $n \geq 1$. Dette gir

$$\begin{aligned} T_n \ln(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k \\ &= 0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{k!} (x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k} \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \\ &\quad + \frac{(x-1)^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

■

Bemerkning

I eksemplene ovenfor har vi forholdsvis greit funnet en formel for den n -te deriverte til funksjonen f . For mer kompliserte funksjoner kan dette være vanskelig eller umulig. I neste kapittel skal vi se at det også er andre måter for å få fatt i Taylor-polynomene.

Oppgaver i seksjon 11.1

I oppgavene nedenfor skal du finne Taylor-polynomer til de angitte funksjonene. Har du tilgang til en grafisk lommeregner eller et egnet dataprogram, bør du også skissere funksjonen og Taylor-polynomet i samme koordinatsystem.

1. Finn Taylor-polynomet av grad 4 til $f(x) = e^{x^2}$ i punktet 0.
2. Finn Taylor-polynomet av grad 3 til $f(x) = \sqrt{x}$ i punktet 1.
3. Finn Taylor-polynomet av grad 4 til $f(x) = \sin x$ i punktet $\pi/4$.
4. Finn Taylor-polynomet av grad 3 til $f(x) = \tan x$ i punktet 0.
5. Finn Taylor-polynomet av grad 5 til $f(x) = \sinh x$ i punktet 0.
6. Finn Taylor-polynomet av grad 6 til $f(x) = \cosh x$ i punktet 0.
7. Finn Taylor-polynomet av grad 3 til $f(x) = \arctan x$ i punktet 0.
8. Finn Taylor-polynomet av grad 3 til $f(x) = \arcsin x$ i punktet 0.
9. Finn Taylor-polynomet av grad 3 til $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 7$ i punktet 0.
10. Finn Taylor-polynomet av grad 3 til $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 7$ i punktet 1.
11. Bruk en datamaskin eller en lommeregner til å tegne grafene til funksjonen $f(x) = \ln x$ og Taylor-polynomene av grad 1 til 5 i punktet 1.
12. Finn Taylor-polynomene av grad 2, 4, 6 og 8 til $f(x) = \cos x$ i punktet 0. Tegn Taylor-polynomene og funksjonen i samme koordinatsystem.

11.2 Taylors formel med restledd

På figurene i forrige avsnitt så vi at Taylor-polynomene $T_n f$ følger grafen til f svært godt i et område rundt punktet a , for så plutselig å forlate den. Når vi bruker Taylor-polynomet som en tilnærming til funksjonen, er det viktig å vite hvilket område vi er i – der hvor polynomet følger funksjonen tett, eller der det er stor forskjell mellom de to grafene. For å kunne svare på slike spørsmål, trenger vi å vite hvor stor feil vi gjør om vi erstatter f med $T_n f$ – vi trenger altså å vite størrelsen til restleddet

$$R_n f = f - T_n f.$$

Dette kan høres vanskelig ut, men alt som kreves er en sekvens av delvis integrasjoner.

Vi begynner med formelen (i denne og de følgende regningene antar vi at alle de deriverte av f vi støter på, eksisterer og er kontinuertlige)

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Siden f er en antiderivert av f' , er denne formelen en øyeblikkelig konsekvens av analysens fundamentalteorem. Flytter vi $f(a)$ over på den andre siden, får vi

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt. \quad (1)$$

La oss delvis integrere det siste integralet med $u = f'(t)$ og $v' = 1$. Vi får $u' = f''$. I stedet for å velge $v = t$ som hadde vært det naturligste, lar vi $v = t - b$ fordi det gir lettere regninger senere (dette er lovlig siden alt vi krever er at v er en antiderivert av $v' = 1$). Vi får

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t) dt &= [f'(t)(t-b)]_a^b - \int_a^b f''(t)(t-b) dt \\ &= f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t) dt. \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i (1), får vi

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t) dt. \quad (2)$$

La oss delvis integrere en gang til med $u = f''(t)$ og $v' = (b-t)$. Da er $u' = f'''(t)$ og $v = \frac{(-1)}{2}(b-t)^2$, og vi får

$$\begin{aligned} \int_a^b f''(t)(b-t) dt &= \left[f''(t) \cdot \frac{(-1)}{2}(b-t)^2 \right]_a^b - \int_a^b f'''(t) \cdot \frac{(-1)}{2}(b-t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{2} \int_a^b f'''(t)(b-t)^2 dt. \end{aligned}$$

Vi setter dette inn i (2):

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{2} \int_a^b f'''(t)(b-t)^2 dt. \quad (3)$$

Muligens begynner du alt nå å se mønsteret, men tar vi med en delvis integrasjon til, skulle det i hvert fall bli klart. Vi setter $u = f'''(t)$ og $v' = (b-t)^2$, og får $u' = f^{(4)}(t)$, $v = \frac{(-1)}{3}(b-t)^3$ og

$$\begin{aligned} \int_a^b f'''(t)(b-t)^2 dt &= \left[f'''(t) \cdot \frac{(-1)}{3}(b-t)^3 \right]_a^b - \int_a^b f^{(4)}(t) \cdot \frac{(-1)}{3}(b-t)^3 dt \\ &= \frac{1}{3} f'''(a)(b-a)^3 + \frac{1}{3} \int_a^b f^{(4)}(t)(b-t)^3 dt. \end{aligned}$$

Innsatt i (3), gir dette

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(a)(b-a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} f'''(a)(b-a)^3 + \frac{1}{6} \int_a^b f^{(4)}(t)(b-t)^3 dt. \quad (4) \end{aligned}$$

Mønsteret er nå klart; i alle formlene (1)–(4) har vi

$$f(b) = T_n f(b) + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

der n er lik henholdsvis 0, 1, 2 og 3, og der $T_n f$ er Taylor-polynomet av grad n om a . Dersom formelen fortsetter å holde for høyere n , får vi:

11.2.1 Taylors formel med restledd Anta at f og dens $n+1$ første deriverte er kontinuerlige på intervallet $[a, b]$. Da er

$$f(b) = T_n f(b) + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt \quad (5)$$

der $T_n f$ er Taylor-polynomet til f om punktet a . Med andre ord er

$$\begin{aligned} f(b) = & f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Bevis: Vi bruker induksjon basert på ideen ovenfor. Fra (2) vet vi at formel (6) er riktig for $n = 1$. La oss anta at den er riktig for $n = k$, og vise at den da også må gjelde for $n = k + 1$. Vi vet altså at

$$\begin{aligned} f(b) = & f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{k!} \int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Delvis integrerer vi med $u = f^{(k+1)}(t)$ og $v' = (b-t)^k$, får vi $u' = f^{(k+2)}(t)$, $v = \frac{(-1)}{k+1}(b-t)^{k+1}$ og

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k dt &= \left[f^{(k+1)}(t) \cdot \frac{(-1)}{k+1}(b-t)^{k+1} \right]_a^b \\ &\quad - \int_a^b f^{(k+2)}(t) \cdot \frac{(-1)}{k+1}(b-t)^{k+1} dt \\ &= \frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(a)(b-a)^{k+1} \\ &\quad + \frac{1}{k+1} \int_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1} dt. \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i (7), ser vi at

$$\begin{aligned} f(b) = & f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \\ & + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(b-a)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!} \int_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1} dt \end{aligned}$$

som er akkurat det vi skulle vise. ■

Bemerkning

Når vi anvender Taylors formel i praksis, er det ofte naturlig å bruke x som variabel istedenfor b . Formelen blir da seende slik ut:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad (6)$$

Vi har unngått å bruke x i utledningene fordi det er lett å bli forvirret når man skal integrere mhp. t i en formel som inneholder x , men heretter kommer vi til å bruke x istedenfor b i alle formler.

Bruker vi x istedenfor b som antydnet i bemerkningen ovenfor, forteller Taylors formel oss at restleddet $R_n f = f - T_n f$ er gitt ved

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Den viktigste delen av dette uttrykket er på mange måter faktoren $1/n!$ fordi den sier oss at restleddet som oftest går svært fort mot null når n vokser. Før vi ser på noen eksempler, kan det være lurt å ta med et par enkle hjelpesetninger.

11.2.2 Korollar

Anta at f og dens $n+1$ første deriverte er kontinuerlige på intervallet $[a, x]$. La M være et tall slik at $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ for alle t mellom a og x . Da er

$$|R_n f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

Bevis: Vi antar for enkelhets skyld at $x > a$ – det motsatte tilfellet bevises analogt. Vi har

$$|R_n f(x)| = \frac{1}{n!} \left| \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \right| \leq \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt = \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

og korollaret er bevist. ■

Det finnes en variant av dette korollaret som mange synes det er lettere både å huske og bruke. Den er oppkalt etter den store fransk-italienske matematikeren Joseph Louis Lagrange (1736–1813).

11.2.3 Lagranges restleddsformel Anta at f og dens $n+1$ første deriverte er kontinuerlige på intervallet $[a, x]$. Da er

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

for et tall c i det åpne intervallet mellom a og x . Med andre ord er

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (6) \end{aligned}$$

Legg merke til at restleddet nå ser akkurat ut som de andre leddene, bortsett fra at vi evaluerer det i c og ikke i a .

Bevis: Vi antar for enkelhets skyld at $x > a$ – det motsatte tilfellet bevises analogt. La m og M være henholdsvis minimumsverdien og maksimumsverdien til $f^{(n+1)}$ over intervallet $[a, x]$ (disse verdiene eksisterer ifølge ekstremalverdisetningen 5.3.5). Som i forrige bevis er

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \geq \frac{m}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt = \frac{m}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

og

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \leq \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt = \frac{M}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Dette betyr at

$$R_n f(x) = \frac{d}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

for en d mellom m og M . Siden $f^{(n+1)}$ er kontinuerlig, forteller skjæringssetningen oss at det finnes en c slik at $f^{(n+1)}(c) = d$ (se om du kan finne ut hvorfor det alltid er mulig å velge denne c 'en i det åpne intervallet (a, x)). ■

La oss nå se litt på hvordan resultatene ovenfor kan brukes.

11.2.4 Eksempel

Vi tar for oss funksjonen $f(x) = e^x$. Fra eksempel 11.1.3 vet vi at

$$T_n(e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

La oss estimere restleddet. Anta først at $x > 0$. Ifølge Lagranges restleddsformel er $R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$ for en $c \in (0, x)$. Siden $f^{(n+1)}(x) = e^x$ er en voksende funksjon, er da

$$|R_n f(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{når } x > 0.$$

Regner vi ut $T_n(e^x)$ istedenfor e^x for en positiv x , er altså feilen vi gjør, mindre enn $\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Dersom $x < 0$, får vi isteden at $R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$ for en $c \in (x, 0)$. Siden $f^{(n+1)}$ er voksende, er $f^{(n+1)}(c) < f^{(n+1)}(0) = e^0 = 1$, og dermed

$$|R_n f(x)| = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad \text{når } x < 0.$$

La oss se hvordan vi kan bruke slike estimater til å få ut den numeriske informasjonen vi ønsker. Anta at vi ønsker å beregne e med nøyaktighet bedre enn 10^{-3} . Ideen er selvfølgelig å bruke at

$$e \approx T_n(e^1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

men spørsmålet er hvor mange ledd vi må ta med for at feilen skal bli mindre enn 10^{-3} . Tar vi med n ledd, forteller regningene ovenfor at feilen er mindre enn

$$\frac{e}{(n+1)!} 1^{n+1} = \frac{e}{(n+1)!}.$$

Vi vet at $e < 3$, så vi er på den sikre siden dersom vi greier å få

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3},$$

det vil si

$$3000 < (n+1)!$$

Regner vi ut $(n+1)!$ for forskjellige verdier av n , ser vi at denne ulikheten først er oppfylt for $n = 6$. Dermed vil

$$T_6(e^1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} (\approx 2.718)$$

gi e med en tilnærming bedre enn 10^{-3} . ■

Dette resultatet imponerer vel ingen i lommeregnerens tidsalder, men teknikken vi brukte er viktig – den kan også brukes til å løse mer kompliserte oppgaver. Her er et eksempel:

11.2.5 Eksempel

Beregn verdien av integralet $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ med en nøyaktighet bedre enn 10^{-4} .

Dette integralet lar seg ikke løse på vanlig vis, og vi må nøye oss med et numerisk overslag. Ideen er å erstatte $\sin x$ med et Taylor-polynom

$$T_{2n} \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Da får vi integralet

$$\int_0^1 \frac{T_{2n} \sin(x)}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} \right) dx$$

som vi lett kan regne ut. Spørsmålet er bare hvor mange ledd vi må ta med for å få den ønskede nøyaktigheten.

Siden $\sin x = T_{2n} \sin(x) + R_{2n} \sin(x)$, har vi

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{T_{2n} \sin(x)}{x} dx + \int_0^1 \frac{R_{2n} \sin(x)}{x} dx.$$

Feilen vi gjør i regningene ovenfor er altså $\int_0^1 R_{2n} \sin(x)/x dx$. Siden alle de deriverte til $f(x) = \sin x$ er mindre enn 1 i absoluttverdi, ser vi fra korollar 11.2.2 at

$$|R_{2n} \sin(x)| = \left| \frac{f^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Dermed er

$$\left| \int_0^1 \frac{R_{2n} \sin(x)}{x} dx \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Skal vi være sikre på at feilen er mindre enn 10^{-4} , må vi altså sørge for at $1/(2n+1)! \cdot (2n+1) < 10^{-4}$, det vil si at $(2n+1)! \cdot (2n+1) \geq 10\,000$. Regner vi ut $(2n+1)! \cdot (2n+1)$ for ulike verdier av n , ser vi at dette skjer første gang når $n = 3$. Det er altså godt nok å bruke Taylor-polynomet av orden $2n = 2 \cdot 3 = 6$. Dermed får vi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &\approx \int_0^1 \frac{T_6 \sin(x)}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \right) dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} \right]_0^1 = \frac{1703}{1800} \approx 0.9461 \end{aligned}$$

med en nøyaktighet som er bedre enn 10^{-4} . ■

Det neste eksemplet viser at Taylor-polynomer kan brukes til å finne grenseverdier.

11.2.6 Eksempel

Finn grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}.$$

Vi så i forrige seksjon at Taylor-polynomet til $\cos x$ av grad 5 er

$$T_5 \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Siden $\cos x = T_5 \cos x + R_5 \cos x$, får vi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{T_5 \cos x + R_5 \cos x - 1 + x^2/2}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4/24 + R_5 \cos x}{x^4} \\ &= \frac{1}{24} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_5 \cos x}{x^4}. \end{aligned}$$

Det gjenstår å vise at den siste grenseverdien er null.

Siden den sjettederiverte til $\cos x$ er $-\cos x$, så er $|f^{(6)}(x)| \leq 1$ for alle x . Ifølge korollar 11.2.3 er da

$$|R_5 \cos(x)| = \frac{f^{(6)}(c)}{6!} |x|^6 \leq \frac{1}{6!} x^6$$

og følgelig er $\lim_{x \rightarrow 0} |R_5 \cos(x)/x^4| \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2/6! = 0$. Altså er

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 - x^2/2}{x^4} = \frac{1}{24}.$$

Ved første møte kan denne metoden virke tyngre enn L'Hôpitals regel, men med litt trening er den ofte raskere – kjenner man Taylor-polynomene til de involverte funksjonene, kan et blikk være nok til å finne grenseverdien. I oppgave 17 finner du et resultat som letter arbeidet. ■

Til slutt skal vi se på en mer teoretisk anvendelse av Taylor-polynomer.

11.2.7 Setning

e er et irrasjonalt tall.

Bevis: Vi begynner med en triviell observasjon: Dersom N/h og M/h er to forskjellige brøker med samme nevner og heltallige tellere, så er

$$\left| \frac{N}{h} - \frac{M}{h} \right| \geq \frac{1}{h}.$$

Anta nå at e er rasjonal – da finnes det naturlige tall p og k slik at $e = p/k$. La m være et naturlig tall større enn k (da er spesielt $m \geq 2$). Fra eksempel 11.2.4 vet vi at

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{m!} + R_m f(1)$$

der $|R_m f(1)| \leq \frac{e}{(m+1)!}$. Altså er

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{m!} \right) \right| = |R_m f(1)| \leq \frac{e}{(m+1)!}.$$

Vi skal nå bruke observasjonen ovenfor til å skaffe oss en ulikhet i motsatt retning. Samler vi uttrykket $1 + 1 + 1/2 + 1/6 + \cdots + 1/m!$ på én brøkstrek, får vi et uttrykk av typen $N/m!$, der N er et helt tall. Siden m er større enn k , kan også $e = p/k$ skrives som en brøk $M/m!$, der M er et helt tall (multipliser med $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot (k+1) \cdot \dots \cdot m$ i teller og nevner). Ifølge vår observasjon er da

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{m!} \right) \right| = \left| \frac{M}{m!} - \frac{N}{m!} \right| \geq \frac{1}{m!} = \frac{m+1}{(m+1)!}.$$

Siden $m+1 \geq 3 > e$, strider dette mot vår forrige ulikhet. Vi har en selvmotsigelse, og setningen er bevist. ■

Bemerkning

Ideen i dette beviset er kuriøs – tallet e kan tilnærmes så godt ved hjelp av rasjonale tall at det umulig kan være rasjonalt selv! Argumenter av denne typen spiller faktisk en sentral rolle i tallteorien. At e er irrasjonal, ble først bevist av Euler i 1737.

Oppgaver i seksjon 11.2

1. Finn Taylor-polynomet til $f(x) = e^x$ av grad 4 om punktet 0. Vis at $|R_4 f(b)| \leq \frac{e^b}{120} b^5$ for $b \geq 0$.

2. Finn Taylor-polynomet til $f(x) = \sin x$ av grad 4 om punktet 0. Vis at $|R_4 f(b)| \leq \frac{|b|^5}{120}$ for alle b .

3. Finn Taylor-polynomet til $f(x) = \ln x$ av grad 3 om punktet 1. Vis at $|R_3 f(b)| \leq \frac{|b-1|^4}{4}$ for $b \geq 1$.

4. Bruk Taylor-polynomet til $f(x) = e^x$ til å beregne e med nøyaktighet større enn $1/10\,000$. (Du kan anta som kjent at $e < 3$.)

5. Bruk Taylor-polynomet til $f(x) = \sqrt{x}$ av grad 2 om punktet 100 til å finne en tilnærmet verdi for $\sqrt{101}$. Gi et overslag over nøyaktigheten.

6. Finn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ ved hjelp av et passende Taylor-polynom.

7. Finn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ ved hjelp av et Taylor-polynom.

8. Bruk et Taylor-polynom til å beregne

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}}{(x-1)^3}.$$

9. (UiO) Bruk Taylor-polynomet til $f(x) = e^x$ til å finne

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$$

med en nøyaktighet på 10^{-3} .

10. a) (NTNU) Skriv opp Taylor-polynomet $T_6(x)$ til $f(x) = \sin x$ omkring $x = 0$.

b) Bruk a) til å beregne

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx$$

med en feil mindre enn 0.00002.

11. a) (NTNU) Finn Taylor-polynomet $T_2(x)$ til $f(x) = \frac{1}{1+x}$ om punktet 0.

b) Bruk a) til å vise at

$$0.49393 < \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4} < 0.49397.$$

12. a) (UiB) Skriv opp Taylor-polynomet til $f(x) = \cos x$ av orden 3 rundt origo. Vis at hvis $Rf_3(x)$ betegner restleddet, så er $|Rf_3(x)| \leq |x|^4/4!$.

b) Bruk dette til å vise at

$$\int_0^t \cos(x^2) dx = t - \frac{t^5}{10} + F(t),$$

der vi har at $|F(t)| \leq |t|^9/216$. (Man kan uten bevis bruke at hvis $a \leq b$, så er $|\int_a^b F(x) dx| \leq \int_a^b |F(x)| dx$.)

c) Beregn $\int_0^{0.1} \cos(x^2) dx$ med 10 desimalers nøyaktighet.

13. (UiO) La $g(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$.

a) Beregn Taylor-polynomet til g av grad 3 rundt $x = 0$.

b) Vis at for $|x| < 1/2$ så kan vi bruke resultatet i a) til å beregne verdien $g(x)$ med en feil $< 2/100$.

14. (UiO) Betrakt funksjonen g definert ved $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ for alle reelle tall x .

a) Vis ved hjelp av Taylors formel at det for hver $x \in (-1, \infty)$ fins et tall z mellom 0 og x slik at

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16} \frac{1}{(1+z)^{5/2}} x^3.$$

b) La s være buelengden av grafen til $g(x)$ på intervallet $x \in [0, 1]$. Finn en tilnærmet verdi for s med feil mindre enn $1/200$.

15. (UiO) La $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

a) Finn Taylor-polynomet til $g(x)$ av orden 2 om origo.

b) Vis at for $x \geq 0$ så er $|Rg_2(x)| \leq \frac{5}{81}x^3$.

c) Finn $\sqrt[3]{1003}$ med 7 gjeldende desimaler.

16. Gjennomfør beviset for Lagranges restleddsformel når $x < a$.

17. Anta at den $(n+1)$ -te deriverte til funksjonen f eksisterer og er kontinuerlig i en omegn om punktet a . La $T_n f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n$ være Taylor-polynomet til f av grad n om punktet a . Vis at

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - [a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_{n-1}(x-a)^{n-1}]}{(x-a)^n} = a_n.$$

18. En gammel metode for å finne en tilnærmet kvadratroten til et tall b , er som følger. Finn det største hele tallet a slik at $a^2 < b$. Da er $a/2 + b/2a$ en tilnærmet kvadratroten til b .

- a) Benytt metoden når $b = 83$.
- b) Forklar hva metoden har med Taylor-polynomer å gjøre.

19. a) (UiO) Skriv opp Taylors formel med restledd om punktet 0 for $f(x) = \sin x$ med Taylorpolynom av orden $2n + 2$. Bruk denne formelen til å utlede estimatet

$$\left| \sin(1) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{K}{(2n+3)!}$$

for en passende konstant K . Finn en verdi for K .

- b) Bruk resultatet fra a) til å vise at $\sin(1)$ er irrasjonal.

20. (UiO) Vi er gitt funksjonen $f(x) = \cos(x^2)$.

- a) Vis at når $x > 0$, så er

$$f(x) = T_7 f(x) + R_7 f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{\cos(d)}{24}x^8,$$

der vi har utviklet om punktet $a = 0$ og der $0 \leq d \leq x^2$. (*Hint:* Du kan bruke Taylorpolynomet til $\cos(t)$.)

- b) Vi tilnærmer nå integralet $\int_0^h f(x) dx$ der $h > 0$. Vis at feilen ved å erstatte f med $T_7 f$ i integralet er begrenset av

$$\left| \int_0^h f(x) dx - \int_0^h T_7 f(x) dx \right| \leq \frac{h^9}{216}$$

Vis også at når $h \leq 1$, er feilen minst $\frac{h^9}{432}$.

11.3 Punktvis og uniform konvergens

En *funksjonsfølge* er en uendelig sekvens av funksjoner

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$$

Vi skal ofte betegne funksjonsfølger med $\{f_n\}$ eller $\{f_n(x)\}$.

Gitt en funksjon f , så utgjør Taylor-polynomene $\{T_n f\}$ en naturlig funksjonsfølge. Er for eksempel $f(x) = e^x$, får vi (med $f_n = T_n f$):

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + x, \\ f_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2}, \\ f_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \\ f_4(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}, \\ &\dots \\ f_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Vi har sett at Taylor-polynomene $T_n f$ som oftest gir bedre og bedre tilnærminger til funksjonen f når n vokser. Dersom restleddet $R_n f(x)$ går mot null når n går mot uendelig, er $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n f(x)$. Dette er et eksempel på *konvergens av funksjonsfølger* – at en følge av funksjoner nærmer seg en grensefunksjon. Vi skal få mye bruk for slike grenser i neste kapittel, men før vi bruker dem, må vi se litt på de grunnleggende egenskapene til konvergente funksjonsfølger. Dette er temaet for denne og den neste seksjonen.

Det viser seg å være et finurlig tema; vi skal trenge to konvergensbegreper – *punktvis konvergens* og *uniform konvergens*. La oss starte med den punktvis konvergens siden den er lettest å forklare.

11.3.1 Definisjon

La $\{f_n\}$ være en følge av funksjoner definert på en mengde A , og la f være en funksjon som også er definert på A . Vi sier at $\{f_n\}$ *konvergerer punktvis* mot f på A dersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

for alle x i A .

Det er lett å se hvor ordet «punktvis» kommer fra – for hvert punkt x i A , skal tallfølgen $f_n(x)$ konvergere mot $f(x)$. Her er et enkelt eksempel.

11.3.2 Eksempel

Vis at funksjonsfølgen $\{x^2 + 2x/n\}$ konvergerer punktvis mot en grensefunksjon på hele \mathbb{R} .

Siden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^2 + \frac{2x}{n} = x^2$$

for alle x , konvergerer funksjonsfølgen punktvis mot $f(x) = x^2$. ■

Det neste eksemplet viser at vi fort får bruk for vårt kjennskap til ubestemte uttrykk.

11.3.3 Eksempel

Vis at funksjonsfølgen $\{(1 + x/n)^n\}$ konvergerer punktvis mot $f(x) = e^x$ på hele \mathbb{R} .

Vi må vise at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Siden $(1 + x/n)^n$ er et ubestemt uttrykk av typen « 1^∞ », må vi omforme det slik at vi kan bruke L'Hôpitals regel. Siden

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \cdot \ln(1 + x/n)}$$

er det nok å studere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}.$$

Dette er et «0/0»-uttrykk, og bruker vi L'Hôpitals regel, får vi (husk at vi deriverer med hensyn på n):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x/n} \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)} = x.$$

Dermed er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \ln(1+x/n)} = e^x$$

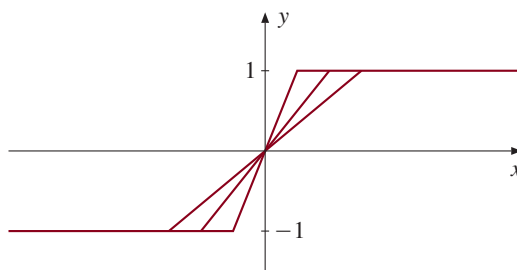
akkurat som vi skulle vise. ■

Et sentralt tema i teorien for funksjonsfølger er i hvilken grad grensefunksjonene «arver» egenskapene til funksjonene i følgen. Hvis en følge $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot en grensefunksjon f , og hver eneste f_n er kontinuert, vil da også f nødvendigvis være kontinuert? Neste eksempel viser at svaret er nei.

11.3.4 Eksempel

La f_n være funksjonen definert på hele \mathbb{R} ved

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < -\frac{1}{n} \\ nx & \text{for } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{for } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$



Figur 11.3.1.

Figur 11.3.1 viser grafen til noen av funksjonene f_n – de går alle gjennom origo, men blir brattere og brattere når n øker. Lar vi n gå mot uendelig, er det lett å se at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

Altså er grensefunksjonen f diskontinuert selv om hver f_n er kontinuert. ■

Dette eksemplet er en strek i regningen. Mange matematiske funksjoner er definert som en grense av enkle funksjoner (for eksempel polynomer). Hadde det vært sant

at enhver grense av kontinuerlige funksjoner selv var kontinuerlig, ville det ikke vært noen sak å vise at disse funksjonene var kontinuerlige. Men nå viser altså eksemplet at grensefunksjonen godt kan være diskontinuerlig selv om alle funksjonene i følgen er kontinuerlige, og dermed er vi like langt.

En måte å løse dette problemet på er å innføre et sterkere konvergensbegrep som sikrer at enhver grense av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig. Det er dette ønsket som ligger bak begrepet uniform konvergens. Før vi innfører dette begrepet, må vi definere avstanden mellom to funksjoner.

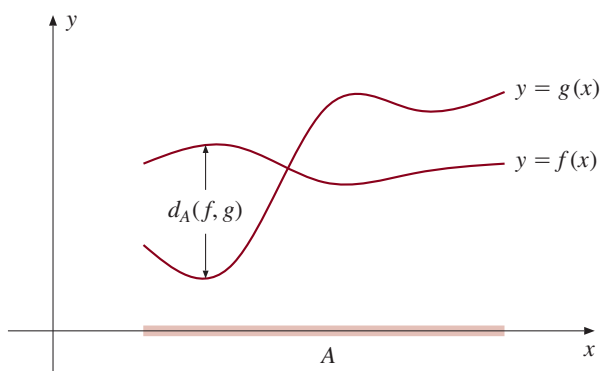
11.3.5 Definisjon

Anta at f og g er to funksjoner definert på en mengde A . Avstanden mellom f og g (over A) er definert ved

$$d_A(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\}.$$

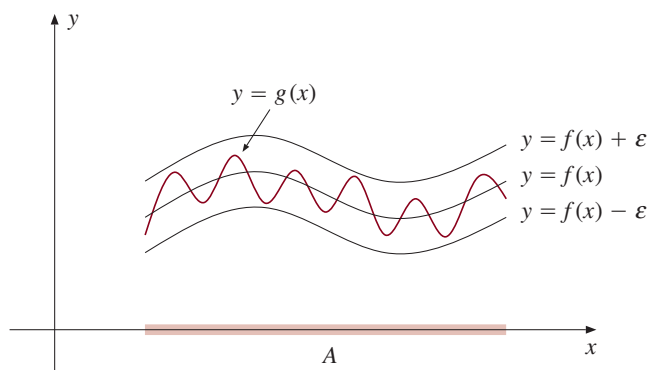
Dersom avstanden $|f(x) - g(x)|$ kan bli vilkårlig stor, setter vi $d_A(f, g) = \infty$.

Avstanden mellom funksjonene f og g er altså den maksimale, loddrette avstanden mellom to punkter på funksjonsgrafene (se figur 11.3.2)



Figur 11.3.2.

Det er viktig å forstå hva det vil si at avstanden $d_A(f, g)$ mellom f og g er mindre enn eller lik et tall ϵ . Ifølge definisjonen betyr det at avstanden mellom grafene alltid er mindre enn eller lik ϵ . Sagt litt annerledes må grafen til g alltid ligge mellom de to grafene $y = f(x) - \epsilon$ og $y = f(x) + \epsilon$ (se figur 11.3.3). Uhytidelig sier man gjerne at g ligger innenfor ϵ -pølsa rundt f .



Figur 11.3.3.

11.3.6 Definisjon

La $\{f_n\}$ være en følge av funksjoner definert på en mengde A , og la f være en funksjon som også er definert på A . Vi sier at $\{f_n\}$ *konvergerer uniformt mot f* på A dersom

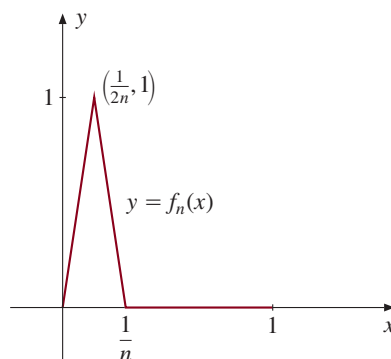
$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_A(f, f_n) = 0.$$

La oss forsøke å forstå hva denne definisjonen sier. At $\lim_{n \rightarrow \infty} d_A(f, f_n) = 0$, betyr at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en N slik at $d_A(f, f_n) < \epsilon$ for alle $n \geq N$. At $d_A(f, f_n) < \epsilon$ betyr at f_n ligger innenfor ϵ -pølsa rundt f . Uansett hvor liten ϵ er, kan vi altså få hele grafen til f_n til å ligge innenfor ϵ -pølsa rundt f ved å velge n stor nok. Dette er det intuitive bildet vi må forsøke holde fast ved.

Ved første blick er det vanskelig å se forskjell på punktvis og uniform konvergens. Men det er forskjell – selv om enhver følge som konvergerer uniformt mot f også konvergerer punktvis mot f (bevis det!), finnes det punktvis konvergente følger som ikke konvergerer uniformt. Vi så en slik følge i eksempel 11.3.4, og her kommer et eksempel til.

11.3.7 Eksempel

Funksjonene f_n i følgen er definert på intervallet $[0, 1]$. Det er lettest å forstå definisjonen ved å se på figur 11.3.4:



Figur 11.3.4.

Funksjonen f_n er null bortsett fra i intervallet $[0, 1/n]$ der funksjonsgrafen har form av en likebeint trekant med toppunkt $(1/2n, 1)$. Med formler har vi

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2nx + 2 & \text{for } \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{for } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

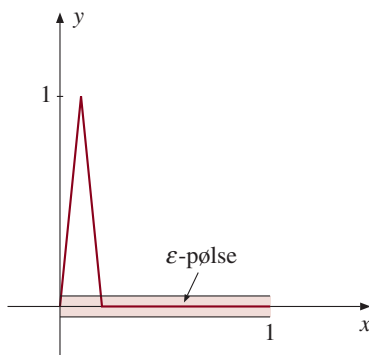
Vi viser først at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot 0, det vil si at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{for alle } x \in [0, 1].$$

Hvis $x = 0$, er dette opplagt siden $f_n(0) = 0$ for alle n . Hvis $x > 0$, vet vi at $x > 1/n$ når n blir tilstrekkelig stor (husk Arkimedes' prinsipp 2.2.6). Men dermed er $f_n(x) = 0$ for alle tilstrekkelig store n , og følgelig er $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Dette viser at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot 0.

Det er lett å vise at konvergensen ikke er uniform. Legg en ϵ -pølse rundt x -aksen med $\epsilon < 1$. Da vil toppen av funksjonsgrafen alltid stikke utenfor pølsa uansett hvor stor n er (se figur 11.3.5). Altså er ikke konvergensen uniform. ■

Dette eksemplet illustrerer forskjellen mellom uniform og punktvis konvergens. For uniform konvergens må alle punktene marsjere i takt; de må alle komme seg innenfor ϵ -pølsa før en fast N . For punktvis konvergens er alt overlatt til det enkelte punkt – så lenge grenseverdien eksisterer, er det ikke noe krav til samordning mellom punktene.



Figur 11.3.5.

Ved hjelp av uniform konvergens kan vi nå få til resultatet vi ønsker oss.

11.3.8 Teorem

La f og f_1, f_2, f_3, \dots være funksjoner definert på en mengde A . Anta at f_1, f_2, f_3, \dots er kontinuerlige, og at følgen $\{f_n\}$ konverger uniformt mot f på A . Da er f kontinuerlig i A .

Bevis: La $a \in A$. Gitt en $\epsilon > 0$, må vi finne en $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ for alle $x \in A$ med $|x - a| < \delta$. Siden konvergensen er uniform, kan vi finne en N slik at $d_A(f, f_n) < \epsilon/3$ for alle $n \geq N$. Siden f_N er kontinuerlig, kan vi finne en $\delta > 0$ slik at $|f_N(x) - f_N(a)| < \epsilon/3$ for alle $x \in A$ med $|x - a| < \delta$. Hvis $x \in A$ med $|x - a| < \delta$, har vi da

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \end{aligned}$$

ifølge trekantulikheten 2.1.1. Siden $d_A(f, f_N) < \epsilon/3$, er det første og det siste leddet mindre enn $\epsilon/3$. Etter valget av δ er det midterste leddet også mindre enn $\epsilon/3$. I alt har vi da

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

som er nettopp det vi skulle vise. ■

Bemerkning

Dette beviset er vanskelig, men det viser ϵ - δ -teknikken på sitt beste. Å bevise et slikt resultat uten denne teknikken er nesten umulig – man går seg uhyre fort vill i hva som avhenger av hva. Historien viser da også at selv store matematikere slet lenge med disse problemene før de ble avklart. Har du lyst til å sjekke at du virkelig forstår beviset, kan du forsøke å finne ut hvorfor argumentet ikke fungerer for punktvis konvergens.

Teorem 11.3.8 er et kraftig hjelpemiddel, men det har en ulempe – det er mye verre å sjekke om en følge konvergerer uniformt enn punktvis. Som vi skal se i neste kapittel, finnes det hjelpesetninger man kan bruke, men her skal vi nøye oss med å benytte definisjonen direkte.

11.3.9 Eksempel

Undersøk om funksjonsfølgen $\{nx^n(1-x)\}$ konvergerer uniformt på intervallet $[0, 1]$.

Vi undersøker først om følgen konvergerer punktvis, altså om grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n(1-x)$$

finnes. For $x = 0$ og $x = 1$ er den åpenbart lik 0, men for $x \in (0, 1)$ må vi bruke L'Hôpitals regel på det ubestemte uttrykket nx^n . Vi får (husk at vi deriverer med hensyn på n og ikke x):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{-n \ln x}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-n \ln x} \ln x} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\ln x} = 0.$$

Dette betyr at følgen konvergerer punktvis mot 0.

Er konvergensen uniform? For å svare på dette spørsmålet, må vi regne ut avstanden $d_{[0,1]}(0, nx^n(1-x))$. Denne avstanden er lik supremum til funksjonen $|0 - nx^n(1-x)|$, eller – med andre ord – maksimum til den positive, kontinuerlige funksjonen

$$f_n(x) = nx^n(1-x)$$

på intervallet $[0, 1]$. Vi finner maksimalverdien på vanlig måte – deriverer og setter den deriverte lik null. Siden

$$f'_n(x) = n[nx^{n-1}(1-x) - x^n] = n[nx^{n-1} - (n+1)x^n]$$

ser vi at maksimalpunktet er

$$x = \frac{n}{n+1}.$$

Maksimalverdien blir

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Skal følgen konvergere uniformt, må altså denne størrelsen gå mot null. Det gjør den ikke – den går derimot mot e^{-1} . Altså konvergerer ikke funksjonsfølgen uniformt.

Du kan vise at $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$ på flere måter. Den enkleste er kanskje å observere at

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} \cdot \frac{1}{(1+1/n)} \\ &= \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1} = e^{-1}. \end{aligned}$$



*Dinis teorem

Helt til slutt i dette avsnittet skal vi se på et litt vanskeligere resultat som ofte er nyttig i teoretisk arbeid. Vi skal blant annet bygge på det når vi beviser Stirlings formel i seksjon 11.5 (men det blir kun brukt i *-merkede avsnitt). Resultatet er oppkalt etter den italienske matematikeren Ulisse Dini (1845–1918), og beviset bygger på teorem 4.4.4

fra den *-merkede seksjonen *4.4. Legg merke til at i dette teoremet er problemstillingen litt annerledes enn ovenfor – denne gangen vet vi at grensefunksjonene er kontinuerlig, og ønsker å vise (under passende forutsetninger) at konvergens er uniform. Husk at en funksjonsfølge $\{f_n\}$ kalles *voksende* dersom følgen $\{f_n(x)\}$ er voksende for alle x i definisjonsområdet.

11.3.10 Dinis teorem Anta at $\{f_n\}$ er en voksende følge av kontinuerlige funksjoner som konvergerer punktvis mot en kontinuerlig funksjon f på et lukket, begrenset intervall $[a, b]$. Da konvergerer $\{f_n\}$ uniformt mot f på $[a, b]$.

Bevis: Vi antar at $\{f_n\}$ ikke konvergerer uniformt og utleder en selvmotsigelse. For å forenkle resonnetet ser vi på funksjonene $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$ – ut ifra våre forutsetninger er dette kontinuerlige funksjoner som avtar punktvis, men ikke uniformt mot 0 (sjekk dette!). Siden konvergens ikke er uniform, finnes det en $\epsilon > 0$ slik at $d_{[a,b]}(g_n, 0) > \epsilon$ for alle n . Det betyr at for hver n finnes det et punkt $x_n \in [a, b]$ slik at $g_n(x_n) > \epsilon$. Ifølge teorem 4.4.4 har følgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en konvergent delfølge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. La $c \in [a, b]$ være grensen til $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Siden $\{g_n\}$ konvergerer punktvis mot 0, finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at $g_N(c) < \frac{\epsilon}{2}$. Siden g_N er kontinuerlig, finnes det en liten omegn $I = (c - \delta, c + \delta)$ om c slik at $g_N(x) < \epsilon$ for alle $x \in I$ (dersom c er et av endepunktene a, b i intervallet, blir dette en ensidig omegn som ser litt annerledes ut, men resonnetet fungerer like godt i dette tilfellet). Siden $\{g_n\}$ er avtagende, betyr det at $g_n(x) < \epsilon$ for alle $x \in I$ og alle $n \geq N$. Men dette er umulig; siden $x_{n_k} \rightarrow c$ må det finnes en $n_k > N$ slik at $x_{n_k} \in I$. Ifølge det vi nettopp har vist, er da $g_{n_k}(x_{n_k}) < \epsilon$, men per definisjon av x_{n_k} er $g_{n_k}(x_{n_k}) > \epsilon$. Dermed har vi fått vår selvmotsigelse, og antagelsen om at $\{f_n\}$ ikke konvergerer uniformt, må være gal. ■

Bemerkning

Resultatet ovenfor gjelder selvfølgelig like godt om følgen er avtagende istedenfor voksende. Det gjelder imidlertid *ikke* dersom vi fjerner betingelsen om at intervallet skal være lukket og begrenset.

Oppgaver i seksjon 11.3

1. Vis at funksjonsfølgen $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot f .

a) $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$; $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f_n(x) = \frac{n^2x + 7 \sin x}{n^2e^x + nx^3}$; $f(x) = xe^{-x}$

c) $f_n(x) = \sqrt{n^2 + nx} - n$; $f(x) = \frac{x}{2}$

d) $f_n(x) = n(x^{2/n} - 1)$; $f(x) = \ln x^2$

2. Finn avstanden $d_A(f, g)$:

- a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - x$, $A = [0, 1/2]$
 b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $A = [0, \pi]$
 c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x$, $A = [0, 1]$

3. La $f_n(x) = \sqrt[2n+1]{x}$.

- a) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot en funksjon f .
 b) Vis at grensefunksjonen f ikke er kontinuerlig.
 c) Konvergerer $\{f_n\}$ uniformt?

4. Vis at dersom $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot f , så konvergerer den også punktvis mot f .

5. (UiO) For hvert naturlig tall n er $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definert ved

$$f_n(x) = e^{-x} \left(\frac{x}{n}\right)^{ne}.$$

- a) Finn den største og minste verdien til f_n og skisser grafen.
 b) Vis at følgen $\{f_n\}$ konvergerer punktvis. Konvergerer den også uniformt?

6. La $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

- a) Bestem eventuelle ekstremalpunkter og ekstremalverdier til f_n . Skisser grafen for noen verdier av n .
 b) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot en funksjon f . Er konvergenen uniform i intervallet $[0, 1]$?

7. (UiO) Vis at følgen $\{f_n\}$ der

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

konvergerer punktvis mot en funksjon f . Avgjør om konvergenen er uniform i hvert av intervallene $[0, \infty)$, $[a, \infty)$ for $a > 0$, $[0, b]$ for $b > 0$.

8. La $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$ for $x > 0$.

- a) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot $f(x) = \ln x$.
 b) Vis at konvergenen ikke er uniform på $(0, \infty)$.
 c) Vis at konvergenen er uniform på ethvert intervall $[a, b]$, der $0 < a < b$.

9. (UiO) For alle $n \in \mathbb{N}$ la

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1-x^{2n+1}} & \text{når } x \neq 1 \\ \frac{1}{2n+1} & \text{når } x = 1 \end{cases}$$

- a) Vis at hver funksjon f_n er kontinuertlig på hele \mathbb{R} .
- b) Vis at funksjonsfølgen $\{f_n\}$ konvergerer punktvis (det kan være lurt å se på tilfellene $x < -1$, $x = -1$, $-1 < x < 1$, $x = 1$ og $x > 1$ hver for seg). Skisser grensefunksjonen.
- c) Er konvergens uniform på hele \mathbb{R} ?
10. Anta at $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot f , og la $g_n(x) = f_n(x + 1/n)$. Vis at $\{g_n\}$ konvergerer mot f . Er dette nødvendigvis sant dersom vi bare antar at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot f ?
11. Vis at dersom $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot f , og $\{g_n\}$ konvergerer uniformt mot g , så konvergerer $\{f_n + g_n\}$ uniformt mot $f + g$.
12. Erstatt intervallet $[a, b]$ i Dinis teorem med et åpent intervall (a, b) . Finn et eksempel som viser at teoremet da er galt.

11.4 Integrasjon og derivasjon av funksjonsfølger

Dersom funksjonsfølgen $\{f_n\}$ konvergerer mot f , vil da $\{f'_n\}$ konvergere mot f' og $\{\int f_n(x) dx\}$ konvergere mot $\int f(x) dx$? Dette er nok en gang vanskelige spørsmål som avhenger av hva slags type konvergens vi snakker om, og vi kan ikke gi noen endelig avklaring i denne seksjonen. Vi skal imidlertid bevise resultater som er gode nok for våre formål i neste kapittel.

Vi starter med integrasjon siden det er lettest.

11.4.1 Setning

La $\{f_n\}$ være en følge av kontinuerte funksjoner på intervallet $[a, b]$, og la $g_n(x) = \int_c^x f_n(t) dt$ der $c \in [a, b]$. Anta at $\{f_n\}$ konvergerer uniformt på $[a, b]$ mot en funksjon f . Da konvergerer følgen $\{g_n\}$ uniformt mot funksjonen $g(x) = \int_c^x f(t) dt$ på intervallet $[a, b]$. Med symboler

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x f_n(t) dt = \int_c^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt.$$

Bevis: Vi vet fra teorem 11.3.8 at f er kontinuertlig og dermed integrerbar. Gitt en $\epsilon > 0$ kan vi finne en N slik at når $n \geq N$, så er

$$|f(t) - f_n(t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

for alle t i $[a, b]$ (her bruker vi uniform konvergens). For enhver $x \in [a, b]$ og enhver $n \geq N$ er da

$$\begin{aligned} |g(x) - g_n(x)| &= \left| \int_c^x [f(t) - f_n(t)] dt \right| \\ &\leq \left| \int_c^x |f(t) - f_n(t)| dt \right| < \left| \int_c^x \frac{\epsilon}{b-a} dt \right| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Altså konvergerer g_n uniformt mot g . ■

Bemerkning

Vi kan erstatte antagelsen om at f_n er kontinuert med den svakere betingelsen at f_n er integrerbar, men da blir beviset litt mer komplisert (se oppgave 4). Derimot kan vi ikke erstatte uniform konvergens med punktvis konvergens (se oppgave 3).

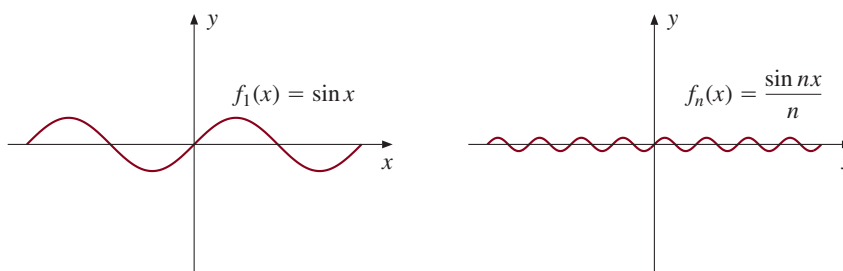
La oss gå over til å se på derivasjon. Følgende eksempel viser at $\{f_n\}$ godt kan konvergere uniformt mot en funksjon f uten at de deriverte konvergerer mot f' :

11.4.2 Eksempel

Hvis

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n},$$

konvergerer $\{f_n\}$ uniformt mot 0 på hele \mathbb{R} . De deriverte $f'_n(x) = \cos nx$ konvergerer derimot ikke (velger du $x = \pi$, ser du at verdiene svinger mellom -1 og 1).



Figur 11.4.1.

Figur 11.4.1 forklarer hva som foregår; grafen til f_n er en forminskert kopi av grafen til f_1 , og selv om amplituden er blitt mindre, er grafen fortsatt like bratt. ■

Etter å ha sett dette eksemplet kan man være fristet til å gi opp letingen etter en betingelse som sikrer at hvis $\{f_n\}$ konvergerer mot f , så konvergerer $\{f'_n\}$ mot f' . Vi kan imidlertid få til et resultat om vi er villige til å legge betingelsene på de deriverte istedenfor på funksjonene selv.

11.4.3 Setning

La $\{f_n\}$ være en følge av funksjoner på $[a, b]$ og anta at de deriverte f'_n er kontinuerte funksjoner som konvergerer uniformt mot en grensefunksjon h . Anta videre at tallfølgen $\{f_n(d)\}$ konvergerer for minst en $d \in [a, b]$. Da konvergerer den opprinnelige følgen $\{f_n\}$ uniformt mot en deriverbar funksjon f , og $f' = h$. Under betingelsene ovenfor er altså

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]'$$

Bevis: Vi skriver $c_n = f_n(d)$ og lar $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Bruker vi setning 11.4.1 på følgen $\{f'_n\}$, ser vi at funksjonene

$$g_n(x) = \int_d^x f'_n(t) dt$$

konvergerer uniformt mot

$$g(x) = \int_d^x h(t) dt.$$

Siden g_n og f_n begge er antideriverte til f'_n med $g_n(d) = 0$ og $f_n(d) = c_n$, så må

$$f_n(x) = g_n(x) + c_n.$$

Siden $\{g_n\}$ konvergerer uniformt mot g og $\{c_n\}$ konvergerer mot c , betyr dette at $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot $f = g + c$. Dermed er

$$f(x) = \int_d^x h(t) dt + c$$

og ifølge analysens fundamentalteorem er $f'(x) = h(x)$ (vi vet at h er kontinuerlig siden den er en uniform grense for de kontinuerlige funksjonene f'_n). Beviset er fullført. ■

Bemerkning

Vi kan ikke fjerne betingelsen om at $\{f_n(d)\}$ konvergerer; $f_n(x) = n$ gir et trivielt moteksempel.

Setningen ovenfor kan være tungvinn å bruke fordi den krever så mye informasjon om den deriverte følgen. Vi skal likevel ha stor glede av den i neste kapitell.

*Konsekvenser av Dinis teorem

Vi skal avslutte denne seksjonen med to temmelig teoretiske avsnitt som viser noe av slagkraften i teorien vår. Vi skal benytte oss av resultatene i beviset for Stirlings formel i neste seksjon, men de brukes ellers ikke i resten av boken.

Ved å bruke Dinis teorem fra seksjon 11.3 kan vi vise en variant av setning 11.4.1.

11.4.4 Setning

Anta at $\{f_n\}$ er en voksende følge av kontinuerlige funksjoner som konvergerer punktvis mot en kontinuerlig funksjon f på et lukket, begrenset intervall $[a, b]$.

Da er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt,$$

eller med andre ord $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$.

Bevis: Ved Dinis teorem er konvergensens uniform, og resultatet følger da fra setning 11.4.1. ■

Bemerkning

Resultatet ovenfor gjelder selvfølgelig like godt om følgen er avtagende istedenfor voksende, men det holder ikke nødvendigvis dersom intervallet er ubegrenset. Ved å legge på en tilleggsbetingelse kan vi imidlertid få til et resultat som også gjelder for ubegrensede intervaller. For enkelhets skyld ser vi bare på intervaller av typen $[a, \infty)$, men resultatet gjelder like godt for intervaller av typen $(-\infty, b]$ og $(-\infty, \infty)$.

11.4.5 Setning

Anta at $\{f_n\}$ er en voksende følge av kontinuerlige funksjoner som konvergerer punktvis mot en kontinuerlig funksjon f på intervallet $[a, \infty)$. Anta videre at det finnes en positiv funksjon g slik at $|f_n(x)| \leq g(x)$ for alle $x \in [a, \infty)$, og slik at integralet $\int_a^\infty g(x) dx$ konvergerer. Da er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty f_n(x) dx = \int_a^\infty f(x) dx,$$

det vil si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty f_n(x) dx = \int_a^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

Bevis: Siden $|f_n(x)| \leq g(x)$ for alle $x \in [a, \infty)$, ser vi at

$$\int_a^\infty |f_n(x)| dx \leq \int_a^\infty g(x) dx < \infty$$

Siden $|f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \leq g(x)$, har vi på tilsvarende måte at

$$\int_a^\infty |f(x)| dx \leq \int_a^\infty g(x) dx < \infty$$

Dette viser at integralene $\int_a^\infty |f_n(x)| dx$ og $\int_a^\infty |f(x)| dx$ konvergerer, og det medfører at integralene $\int_a^\infty f_n(x) dx$ og $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergerer (se oppgave 9).

Siden følgen $\{f_n\}$ er voksende, er

$$\int_a^\infty f_n(x) dx \leq \int_a^\infty f(x) dx$$

Det er derfor nok å vise at for enhver $\epsilon > 0$, finnes det en N slik at

$$\int_a^\infty f_n(x) dx \geq \int_a^\infty f(x) dx - \epsilon$$

når $n \geq N$. Siden integralet av g konvergerer, finnes det en $b \in [a, \infty)$ slik at $\int_b^\infty g(x) dx < \frac{\epsilon}{3}$, og siden $|f_n(x)| \leq g(x)$ og $|f(x)| \leq g(x)$, er da $|\int_b^\infty f_n(x) dx| < \frac{\epsilon}{3}$ og $|\int_b^\infty f(x) dx| < \frac{\epsilon}{3}$. Spesielt er $\int_b^\infty f_n(x) dx > \int_b^\infty f(x) dx - \frac{2\epsilon}{3}$ for alle n .

Ifølge teoremet ovenfor er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

og følgelig finnes det en N slik at

$$\int_a^b f_n(x) dx > \int_a^b f(x) dx - \frac{\epsilon}{3}$$

for alle $n \geq N$. For slike n har vi dermed

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f_n(x) dx &= \int_a^b f_n(x) dx + \int_b^\infty f_n(x) dx \\ &> \left(\int_a^b f(x) dx - \frac{\epsilon}{3} \right) + \left(\int_b^\infty f(x) dx - \frac{2\epsilon}{3} \right) = \int_a^\infty f(x) dx - \epsilon \end{aligned}$$

og beviset er fullført. ■

*Derivasjon under integraltegnet

Av og til støter vi på funksjoner som er definert ved bestemte integraler som inneholder en ekstra variabel. Et eksempel er *gammafunksjonen*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s > 0$$

som vi så vidt var borti i seksjon 9.5. Et naturlig spørsmål er hvordan man deriverer slike funksjoner. De dristigste av oss vil nok bare se bort fra integraltegnet og derivere på vanlig måte:

$$\Gamma'(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \ln x dx,$$

der vi har brukt at $(x^{s-1})' = (e^{(s-1)\ln x})' = e^{(s-1)\ln x} \ln x = x^{s-1} \ln x$ for å derivere med hensyn på s . Men er det riktig å «derivere under integraltegnet» på denne måten?

La oss se litt mer generelt på problemstillingen. For å unngå konvergensproblemer skal vi nøye oss med å se på integraler over begrensede intervaller, så vi tar utgangspunkt i en funksjon definert ved et uttrykk av typen

$$f(s) = \int_a^b G(s, x) dx$$

der $G(s, x)$ er en kontinuerlig funksjon av x for hvert valg av s . (Formelt sett er G her en funksjon av to variable, et tema du vil lære om i senere kurs, men som vi ikke skal bry oss noe mer om her.) Den deriverte til f er per definisjon

$$f'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(s+h) - f(s)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{G(s+h, x) - G(s, x)}{h} dx$$

Dersom vi kan flytte grenseverdien innenfor integraltegnet, vil dette gi oss

$$\begin{aligned} f'(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{G(s+h, x) - G(s, x)}{h} dx = \int_a^b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(s+h, x) - G(s, x)}{h} dx \\ &= \int_a^b G'(s, x) dx \end{aligned}$$

der $G'(s, x)$ er den deriverte av $G(s, x)$ m.h.p. s . Dette er formelen vi ønsket oss!

Spørsmålet er altså om vi kan flytte grenseverdien innenfor integraltegnet, nøyaktig den samme problemstillingen vi har hatt for integrasjon av funksjonsfølger. Bytter vi ut variabelen h med en følge h_n som går mot null, får vi grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{G(s + h_n, x) - G(s, x)}{h_n} dx$$

Setning 11.4.1 forteller oss at dersom $\frac{G(s + h_n, x) - G(s, x)}{h_n}$ konvergerer uniformt mot $G'(s, x)$ (der derivasjonen er med hensyn på s), så er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{G(s + h_n, x) - G(s, x)}{h_n} dx = \int_a^b G'(s, x) dx$$

Vår oppgave er altså å finne betingelser som sørger for at konvergensene ovenfor er uniform. Følgende resultat er ikke det best mulige, men det er tilstrekkelig for våre formål.

11.4.6 Setning

Anta at for alle s i et åpent intervall I er $G(s, x)$ kontinuerlig som en funksjon av x . Anta videre at det finnes et tall M slik at $|G''(s, x)| \leq M$ for alle $s \in I$ og alle $x \in [a, b]$. Da er funksjonen

$$f(s) = \int_a^b G(s, x) dx$$

deriverbar i I og

$$f'(s) = \int_a^b G'(s, x) dx$$

Bevis: Ved Taylors formel er

$$G(z + h_n, x) = G(z, x) + G'(z, x)h_n + \frac{1}{2}G''(c, x)h_n^2$$

for en c mellom z og $z + h_n$. Det betyr at

$$\left| \frac{G(s + h_n, x) - G(s, x)}{h_n} - G'(s, x) \right| \leq \frac{1}{2}M|h_n|$$

som viser at $\left\{ \frac{G(s + h_n, x) - G(s, x)}{h_n} \right\}$ konvergerer uniformt mot $G'(s, x)$. Ifølge setning 11.4.1 er derfor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{G(s + h_n, x) - G(s, x)}{h_n} dx = \int_a^b G'(s, x) dx$$

som betyr at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(s + h_n) - f(s)}{h_n} = \int_a^b G'(s, x) dx$$

for alle følger h_n som konvergerer mot 0, men som har $h_n \neq 0$ for alle n . Det er lett å overbevise seg om (se oppgave 6 nedenfor) at dette betyr at f er deriverbar i s og at

$$f'(s) = \int_a^b G'(s, x) dx.$$

Dermed er setningen bevist. ■

La oss se på et enkelt eksempel:

11.4.7 Eksempel

Vi skal derivere funksjonen

$$f(s) = \int_0^1 e^{sx^2} dx$$

ved å bruke setningen ovenfor på funksjonen $G(s, x) = e^{sx^2}$. Hvis I er et åpent, begrenset intervall som inneholder s , så er det lett å se at det finnes et tall M slik at $|G''(s, x)| = x^4 e^{tx^2} \leq M$ for alle $s \in I$ og $x \in [0, 1]$. Betingelsene i setningen er derfor oppfylt, og vi får

$$f'(s) = \int_0^1 x^2 e^{sx^2} dx$$
■

Det neste eksempelet er vanskeligere, men også mer interessant. Vi skal bruke derivasjon under integraltegnet til å regne ut integralet $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Du kjenner kanskje dette integralet fra statistikk og sannsynlighetsregning der det spiller en sentral rolle i beskrivelsen av normalfordelingen. Det dukker også opp i mange andre matematiske problemstillinger, men dessverre lar det seg ikke regne ut på vanlig måte siden vi ikke kan finne en antiderivert til $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Når du har lært om integrasjon av funksjoner av to variable i et senere kurs, vil du kunne glede deg over en kort og elegant utregning av dette integralet (se f.eks. seksjon 6.8 i [4]), men på det nåværende tidspunkt må vi nøye oss med en ganske «triksete» en!

11.4.8 Eksempel

Vi begynner med å derivere den mystiske funksjonen

$$H(s) = \left(\int_0^s e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 + 2 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{s^2}{2}(1+x^2)}}{1+x^2} dx$$

ved å bruke kjernerregelen på det første leddet og derivasjon under integraltegnet på det andre:

$$H'(s) = 2 \int_0^s e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot e^{-\frac{s^2}{2}} - 2s \int_0^1 e^{-\frac{s^2}{2}(1+x^2)} dx$$

De to leddene i dette uttrykket ligner på hverandre, og for å se hvor like de faktisk er, innfører vi en ny variabel $y = sx$ i det andre integralet. Da er $dx = \frac{dy}{s}$, og vi får

$$2s \int_0^1 e^{-\frac{s^2}{2}(1+x^2)} dx = 2s \int_0^s e^{-\frac{s^2}{2}(1+(\frac{y}{s})^2)} \frac{dy}{s} = 2e^{-\frac{s^2}{2}} \int_0^s e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Dette er nøyaktig likt det første leddet i uttrykket for $H'(s)$, og følgelig er $H'(s) = 0$ for alle s . Det betyr at $H(s)$ er konstant, og ved å sette $s = 0$ ser vi at den konstante verdien er

$$\begin{aligned} H(0) &= \left(\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 + 2 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{0^2}{2}(1+x^2)}}{1+x^2} dx = 0 + 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ser vi isteden på grenseverdien til $H(n)$ når $n \rightarrow \infty$, får vi

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{n^2}{2}(1+x^2)}}{1+x^2} dx$$

Den første av disse grenseverdiene er $\left(\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2$ ved definisjonen av uegentlig integral, mens den andre er null ifølge setning 11.4.1 siden $e^{-\frac{n^2}{2}(1+x^2)}/(1+x^2)$ konvergerer uniformt mot 0 (legg merke til at $e^{-\frac{n^2}{2}(1+x^2)}/(1+x^2) \leq e^{-\frac{n^2}{2}}$). Dermed er

$$\frac{\pi}{2} = \left(\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2,$$

det vil si $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Siden integranden $e^{-\frac{x^2}{2}}$ er symmetrisk om 0, er

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

så

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Dette er uttrykket vi skulle frem til. ■

Oppgaver i seksjon 11.4

Oppgaver merket med * er tilpasset de *-merkede delene av seksjonen.

1. La følgen $\{f_n\}$ være gitt ved

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}.$$

- Vis at $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot en grensefunksjon f .
- Vis at $\{f'_n\}$ ikke konvergerer mot f' .

2. La følgen $\{f_n\}$ være gitt ved

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{hvis } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

- Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot en grensefunksjon f .

b) Vis at $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx$.

3. La $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$. Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot en funksjon f , men at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx.$$

Skisser grafen til f_n for forskjellige n , og bruk dette til å forklare resultatet ovenfor.

4. Vis at setning 11.4.1 fortsatt holder når du erstatter betingelsen om at f_n er kontinuert med den svakere betingelsen at f_n er integrerbar. (Vink: Vis først at grensefunksjonen f er integrerbar.)

5. La $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

a) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot $f(x) = \frac{1}{1-x}$ i intervallet $(-1, 1)$.

b) Vis at konvergensen ikke er uniform på $(-1, 1)$, men at den er uniform på hvert delintervall $(-a, a)$, der $0 < a < 1$.

c) Vis at

$$\ln(1-x) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} \right) \quad \text{for } x \in (-1, 1).$$

6 (*). Funksjonen f er definert i et åpent intervall som inneholder punktet a . Anta at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n} = k$$

for alle følger h_n som konvergerer mot 0, men som er forskjellig fra 0 for alle n . Vis at da er f deriverbar i a med derivert lik k .

7 (*). La $f_n(x) = \frac{1}{nx}$. Vis at $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ for $x \in [1, \infty)$, men at $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty f_n(x) dx \neq 0$.

8 (*). Funksjonen f er definert ved

$$f(t) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin(tx)}{x} dx$$

Vis at for $t \neq 0$ er

$$f'(t) = \frac{\sin(t) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}$$

Hva er $f'(0)$?

9 (*). Anta at $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuertlik funksjon slik at det uegentlige integralet $\int_a^\infty |f(x)| dx$ konvergerer. Vis at da konvergerer også det uegentlige integralet $\int_a^\infty f(x) dx$. (Hint: Skriv $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ der

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{når } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{når } f(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{når } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Vis først at $\int_a^\infty f_+(x) dx$ og $\int_a^\infty f_-(x) dx$ konvergerer.)

- 10 (*)**. a) Anta at $a > 0$. Vis at funksjonen $g(y) = y \ln\left(1 + \frac{a}{y}\right)$ er voksende for $y > 0$. Bruk dette til å vise at $h(y) = \left(1 + \frac{a}{y}\right)^y$ er voksende for $y > 0$.
- b) Vis at når $x > 0$, vokser følgen $\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ mot e^x .
- c) Vis at konvergensen i b) er uniform på ethvert intervall $[0, c]$. (Hint: Dinis teorem.)
- d) Vis at $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = e^c - 1$ når $c \geq 0$.

11.5 Stirlings formel for $n!$

Regner vi ut $n!$ for de første naturlige tallene n , får vi en følge som vokser utrolig raskt: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40320$ osv. Ofte har vi behov for å sammenligne veksten til denne følgen med andre hurtigvoksende følger; hvordan er f.eks. veksten til $n!$ sammenlignet med veksten til n^n ? Det er klart at n^n må være større enn $n!$ siden n^n er n ganget med seg selv n ganger, mens $n!$ er lik det stigende produktet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, men hvor mye utgjør denne forskjellen egentlig når n blir stor? Spesielt i sannsynlighetsregning og statistikk dukker fakulteter hele tiden opp via binomialkoeffisienter, og man har stadig et behov for å estimere uttrykk som inneholder fakulteter (du vil se noen eksempler på dette i seksjon *12.12).

I denne seksjonen skal vi se på en formel som forteller oss at $n!$ vokser omtrent like hurtig som $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ i den forstand at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 \quad (*)$$

Denne formelen kalles *Stirlings formel* etter den skotske matematikeren James Stirling (1692–1770). Det finnes mange bevis for Stirlings formel, men ingen av dem er helt enkle. Vi skal se på et der vi får bruk for det vi har lært om integrasjon av følger. Utgangspunktet for beviset er formelen

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

som vi utledet i eksempel 9.5.17 (har du ikke sett på dette eksempelet før, bør du lese det nå). Vi skal gjennomføre beviset i tre trinn, og for å skaffe oss oversikt ser vi først på hovedideen i hvert trinn (flere detaljer kommer etterpå):

Trinn 1: Skifte variabel i integralet $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$: Vi innfører en ny variabel y ved $x = n + \sqrt{n}y$ og får:

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} (1 + y/\sqrt{n})^n e^{-\sqrt{n}y} dy$$

Definerer vi funksjonen g_n ved

$$g_n(y) = \begin{cases} (1 + y/\sqrt{n})^n e^{-\sqrt{n}y} & \text{hvis } y \geq -\sqrt{n} \\ 0 & \text{hvis } y < -\sqrt{n} \end{cases}$$

kan vi skrive denne formelen som

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y) dy$$

Sammenligner vi dette med Stirlings formel, ser vi at «alt» vi behøver å vise, er at $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y) dy = \sqrt{2\pi}$ (overbevis deg selv om at du skjønner hvorfor dette er riktig!).

Trinn 2: Vise at $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$ for alle y : Siden vi vet fra eksempel 11.4.8 at $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$, er dette et lovende skritt fremover. Helt i mål er vi likevel ikke; det gjenstår å begrunne at vi kan putte grenseverdien innenfor integraltegnet i regnestykket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$$

Trinn 3: Vise at følgen $g_n(y)$ avtar mot $e^{-\frac{y^2}{2}}$ når $y \geq 0$ og vokser mot $e^{-\frac{y^2}{2}}$ når $y \leq 0$: Når vi har vist dette, skal vi bruke setning 11.4.5 til å begrunne at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} g_n(y) dy = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) dy$$

og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 g_n(y) dy = \int_{-\infty}^0 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) dy$$

Til sammen gir dette

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) dy$$

og dermed er den siste brikken i puslespillet på plass.

Vi skal nå gjennomføre programmet ovenfor i detalj:

Gjennomføring av trinn 1: Vi starter altså med formelen

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

og innfører den nye variabelen y slik at $x = n + \sqrt{n}y$. Dette gir $dx = \sqrt{n} dy$, og nye integrasjonsgrenser $-\sqrt{n}$ og ∞ . Dermed er

$$\begin{aligned} n! &= \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} (n + \sqrt{n}y)^n e^{-n - \sqrt{n}y} \sqrt{n} dy \\ &= \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} (1 + y/\sqrt{n})^n e^{-\sqrt{n}y} dy \end{aligned}$$

og trinn 1 er gjennomført. Før vi går videre, kan det være bryet verdt å si noen ord om dette variabelskiftet som ser så merkelig ut ved første øyekast. Her er et forsøk

på motivasjon: Dersom du tegner opp grafene til den opprinnelige integranden $x^n e^{-x}$ for større og større verdier av n , vil du se at alle funksjonene har en markert topp med sentrum i nærheten av n og med bredde av størrelsesorden \sqrt{n} . Gjennom variabelskiftet flytter vi alle toppene til (området rundt) origo og sørger samtidig for at breddene blir av samme størrelsesorden. Tegner du grafene til de nye integrandene $(1 + y/\sqrt{n})^n e^{-\sqrt{n}y}$ i samme koordinatsystem for forskjellige verdier av n , vil du se at de blir likere og likere (her er det viktig å huske på at du bare er interessert i disse funksjonene for $y \geq -\sqrt{n}$; for $y < -\sqrt{n}$ oppfører de seg ganske vilt). Det er dette vi skal utnytte i neste trinn.

Gjennomføring av trinn 2: Vi skal vise at $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = e^{-y^2/2}$ for enhver $y \in \mathbb{R}$. Legg først merke til at uansett hvilken y vi arbeider med, så er

$$g_n(y) = (1 + y/\sqrt{n})^n e^{-\sqrt{n}y}$$

når n er tilstrekkelig stor, så det er nok å vise at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y/\sqrt{n})^n e^{-\sqrt{n}y} = e^{-y^2/2}$$

for alle y . Siden

$$(1 + y/\sqrt{n})^n e^{-\sqrt{n}y} = e^{n \ln(1 + y/\sqrt{n}) - \sqrt{n}y}$$

holder det å vise at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln(1 + y/\sqrt{n}) - \sqrt{n}y) = -\frac{y^2}{2}$$

Det er mulig å regne ut denne grenseverdien ved hjelp av L'Hôpitals regel, men det er enklere og mer informativt å Taylor-utvikle logaritmeuttrykket. Taylor-utviklingen av tredje grad til funksjonen $f(x) = \ln(1 + x)$ er

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2 f(x)$$

der $R_2 f(x) = x^3/3(1 + c)^3$ for en c mellom 0 og x (husk Lagranges formel for restleddet 11.2.3). Setter vi inn $x = y/\sqrt{n}$ i dette uttrykket, ser vi at

$$\begin{aligned} n \ln(1 + y/\sqrt{n}) - \sqrt{n}y &= n \left(y/\sqrt{n} - \frac{(y/\sqrt{n})^2}{2} + \frac{(y/\sqrt{n})^3}{3(1+c)^3} \right) - \sqrt{n}y \\ &= \sqrt{n}y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3\sqrt{n}(1+c)^3} - \sqrt{n}y = -\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3\sqrt{n}(1+c)^3} \rightarrow -\frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

når $n \rightarrow \infty$. Dermed er trinn 2 gjennomført.

Gjennomføring av trinn 3: Vi skal vise at konvergens i forrige trinn er monoton i den forstand at $g_n(y)$ avtar mot $e^{-y^2/2}$ når $y \geq 0$ og vokser mot $e^{-y^2/2}$ når $y \leq 0$. Kikker vi nok en gang på utledningen i forrige trinn, ser vi at restleddet $\frac{y^3}{3\sqrt{n}(1+c)^3}$ er positivt når $y \geq 0$ og negativt når $y \leq 0$. Dette er en god indikasjon på at vi er på rett vei, men det er ikke lett å se direkte fra restleddet om det alltid avtar/vokser når n øker. Vi skal

derfor gå tilbake til uttrykket $n \ln(1 + y/\sqrt{n}) - \sqrt{ny}$ og vise at det avtar med n når $y \geq 0$ og vokser med n når $y \leq 0$.

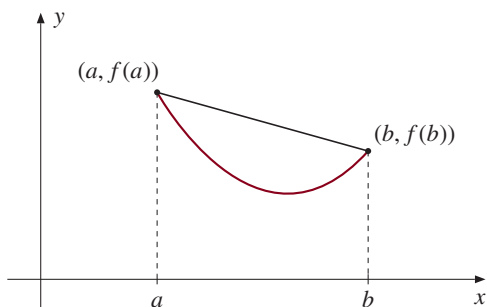
Vi skal gjøre dette på enklest mulig vis; vi skal derivere med hensyn på n og undersøke om den deriverte er positiv eller negativ. Den deriverte er imidlertid litt innviklet, og det er ikke så lett å se med et øyekast hvilket fortegn den har. Vi skal derfor gjøre bruk av denne enkle setningen:

11.5.1 Setning

Anta at $b > a$ og at funksjonen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig, positiv og konveks. Da er

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{(f(b) + f(a))(b - a)}{2}$$

Bevis: På figuren ser du grafen til f samt sekanten gjennom endepunktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. Siden funksjonen er konveks, ligger sekanten over funksjonsgrafens, og arealet under sekanten er derfor større enn arealet under grafen. Siden arealet under sekanten er $\frac{(f(b)+f(a))(b-a)}{2}$ og arealet under grafen er $\int_a^b f(x) dx$, ser vi at setningen må være riktig.



■

Vi skal bruke setningen ovenfor på funksjonen $f(x) = 1/x$:

11.5.2 Korollar

For $z > 0$ er

$$\ln(1 + z) \leq \left(\frac{1}{1 + z} + 1 \right) \frac{z}{2}$$

mens for $z \in (-1, 0)$ er

$$\ln(1 + z) \geq \left(\frac{1}{1 + z} + 1 \right) \frac{z}{2}$$

Bevis: Anta først at $z > 0$. Vi bruker setningen ovenfor med $f(x) = 1/x$, $a = 1$, $b = 1 + z$. Da er

$$\int_1^{1+z} \frac{1}{x} dx \leq \frac{\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1}\right) \left((1+z) - 1\right)}{2} = \left(\frac{1}{1+z} + 1\right) \frac{z}{2}$$

Siden integralet er lik $\ln(1+z)$, er den første ulikheten vist.

Anta så at $z \in (-1, 0)$. Vi bruker nå setningen med $a = 1 + z$, $b = 1$:

$$\int_{1+z}^1 \frac{1}{x} dx \leq \frac{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+z}\right) (1 - (1+z))}{2} = \left(\frac{1}{1+z} + 1\right) \left(-\frac{z}{2}\right)$$

Siden integralet er lik $-\ln(1+z)$, gir dette

$$-\ln(1+z) \leq \left(\frac{1}{1+z} + 1\right) \left(-\frac{z}{2}\right)$$

Ganger vi med -1 på begge sider, får vi den andre ulikheten i korollaret (husk å snu ulikhetstegnet!).

Vi er nå klare til å drøfte den deriverte til $n \ln(1 + y/\sqrt{n}) - \sqrt{ny}$. Siden y er konstant mens n vokser, må vi derivere dette uttrykket med hensyn på n . Vi får

$$\begin{aligned} & (n \ln(1 + y/\sqrt{n}) - \sqrt{ny})' \\ &= 1 \cdot n \ln(1 + y/\sqrt{n}) + n \frac{1}{1 + y/\sqrt{n}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{y}{n^{3/2}}\right) - \frac{y}{2\sqrt{n}} \\ &= \ln(1 + y/\sqrt{n}) - \left(\frac{1}{1 + y/\sqrt{n}} + 1\right) \frac{y}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Bruker vi korollaret ovenfor med $z = \frac{y}{\sqrt{n}}$, ser vi at dette uttrykket er negativt når $y > 0$ og positivt for $y < 0$. Dermed har vi vist at uttrykket $n \ln(1 + y/\sqrt{n}) - \sqrt{ny}$ avtar med n når $y \geq 0$ og vokser med n når $y \leq 0$. Det betyr at $g_n(y)$ avtar mot $e^{-y^2/2}$ når $y \geq 0$ og vokser mot $e^{-y^2/2}$ når $y \leq 0$. Trinn 3 er dermed gjennomført. ■

La oss helt til slutt gå gjennom hele argumentet for å se at alt er på plass. Fra eksempel 9.5.17 vet vi at

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

Trinn 1 forteller oss at

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y) dy$$

Følgelig er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y) dy$$

og det er derfor nok å vise at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y) dy = \sqrt{2\pi}$$

Ifølge trinn 2 og 3 konvergerer $g_n(y)$ monotont mot $e^{-y^2/2}$ på hvert av intervallene $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$. For å bruke setning 11.4.5 må vi sjekke at alle leddene i følgen er mindre enn en integrerbar funksjon g (dvs. en funksjon g som har endelig integral over intervallet vårt). På intervallet $(-\infty, 0]$ er alle leddene i følgen mindre enn den integrerbare funksjonen $e^{-y^2/2}$, og på intervallet $[0, \infty)$ er alle leddene i følgen mindre enn den integrerbare funksjonen $g_1(y) = (1+y)e^{-y}$. Ifølge setning 11.4.5 er da

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y) dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 g_n(y) dy + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} g_n(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-y^2/2} dy + \int_0^{\infty} e^{-y^2/2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \end{aligned}$$

Ifølge eksempel 11.4.8 er dette integralet lik $\sqrt{2\pi}$, og dermed har vi vist følgende resultat.

11.5.3 Stirlings formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

Oppgaver i seksjon 11.5

1. Bruk lommeregner eller datamaskin til å beregne $u_n = n!$ og $v_n = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ for $n = 1, 2, 3, \dots, 9$.
2. Bruk lommeregner eller datamaskin til å beregne $n!/\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ for større og større verdier av n .
3. Du har 20 kuler, 10 svarte og 10 hvite.

a) Vis at

$$\binom{20}{10} = \frac{20!}{(10!)^2}$$

er antall ulike mønstre du kan få frem ved å legge kulene etter hverandre.

b) Bruk Stirlings formel til å vise at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n / \sqrt{n\pi}} = 1.$$

c) Bruk formelen i b) til å finne en tilnærmet verdi for antall mønstre i a).

11.6 Historisk epistel: Et teorem med unntagelser

Det synes meg at dette teoremet tillater unntagelser.

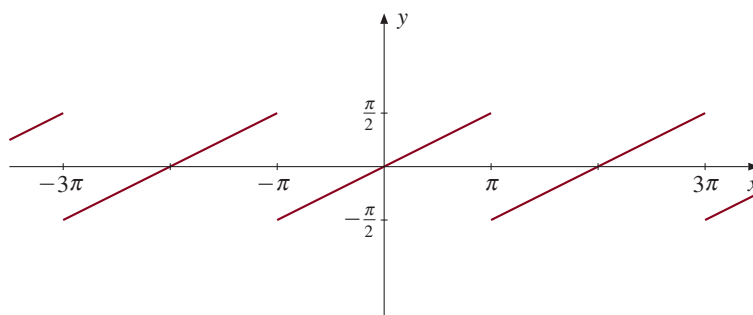
— Niels Henrik Abel (1802–1829),
Recherches sur la série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Selv de store kan feile. I Cauchys berømte lærebok *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* som kom til å sette en ny standard for stringent bevisførsel i analysen, finner vi et teorem som (tilpasset vår språkbruk) sier at grensen til en følge kontinuierlige funksjoner selv er kontinuierlig. I sin avhandling om binomiske rekker sier Abel at «det synes meg at dette teoremet tillater unntagelser», og kommer så med eksemplet

$$f_n(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$$

som konvergerer mot den diskontinuierlige funksjonen i figur 11.6.1. Dette eksemplet kan se merkverdig ut, men kjenner man litt til Fouriers arbeider, er det slett ikke så unaturlig. Vi nevnte i seksjon 5.6 at Fourier hadde funnet en metode som gjorde det mulig å skrive funksjoner som en uendelig sum av cosinuser og sinuser. Bruker vi denne metoden på funksjonen $f(x) = x/2$ over intervallet $(-\pi, \pi)$, blir vi naturlig ledet til Abels eksempel.



Figur 11.6.1.

I sin avhandling var Abel interessert i helt spesielle funksjonsfølger (potensrekker), og for disse greide han å vise kontinuitet uten å innføre nye begreper. Det var først i 1847 at tyskeren Philipp Seidel (1821–1896) og iren George Stokes (1819–1903) uavhengig av hverandre oppdaget begrepet uniform konvergens og brukte det til å rette feilen i Cauchys bevisforsøk. Også i dette tilfellet var det imidlertid Karl Weierstrass som først så dybden i det nye begrepet og som tok det systematisk i bruk i sine forelesninger. I seksjon 12.5 skal vi se på Weierstrass' M -test som er en enkel, men effektiv test for å vise uniform konvergens.

En berømt og kontroversiell diskusjon av historien ovenfor finner du i Lakatos' bok [3]. Mindre kontroversielle (og mer opplysende) diskusjoner finner du hos Grattan-Guinness [1] og hos Katz [2]. Du bør imidlertid vente med å lese disse tekstene til du har lært litt om potensrekker i kapittel 12.

Litteratur

- [1] Grattan-Guinness, Ivor: *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1970.
- [2] Katz, Viktor J.: *A History of Mathematics*, 3rd Edition, Addison Wesley, Boston, 2009.
- [3] Lakatos, Imre: *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- [4] Lindstrøm, Tom og Klara Hverberg: *Flervariabel analyse med lineær algebra*, Gyldendal Akademisk, Oslo, 2015.

12 Rekker

Divergente Rækker ere i det Hele taget noget Fandenskab, og det er en Skam at man vover at grunde nogen Demonstration derpaa.

— Niels Henrik Abel (1802–1829),
Brev til B.M. Holmboe

Intuitivt er en rekke en uendelig sum av tall

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Slike summer dukker naturlig opp i alle deler av matematikken, både i praktiske og teoretiske sammenhenger. Like vanlige og enda viktigere er rekker av funksjoner

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

Rekker gir oss noen av de mest slående formlene vi har – for eksempel den berømte rekken for π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

som vi skal utlede senere. Men rekker gir oss også mer dagligdagse sammenhenger som vi kan bruke til å beregne funksjoner og anslå størrelser. I dette kapitlet skal vi studere både rekker av tall og rekker av funksjoner, men først og fremst skal vi studere sammenhengen mellom dem. Det viser seg nemlig at den enkleste måten å summere en tallrekke på, er å starte med en rekke av funksjoner.

12.1 Konvergens av rekker

Det aller første vi må gjøre er å definere hva en rekke egentlig er – en uendelig sum gir jo i utgangspunktet ingen mening. Gitt en følge $a_0, a_1, a_2 \dots$ av tall, danner vi først *delsummene*

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \\ \dots, \quad s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \dots$$

På denne måten får vi en ny følge $\{s_n\}$. Denne følgen kalles *rekken* generert av $\{a_n\}$. Vi skal betegne den med

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Tallene a_n kaller vi *leddene* i rekken.

Dersom følgen $\{a_n\}$ starter med en annen indeks enn null – for eksempel $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \dots$ – justerer vi indeksene i $\{s_n\}$ tilsvarende. Vi lar

$$s_{-2} = a_{-2}, \quad s_{-1} = a_{-2} + a_{-1}, \quad s_0 = a_{-2} + a_{-1} + a_0, \\ \dots, \quad s_n = a_{-2} + a_{-1} + \dots + a_n$$

og skriver rekken som $\sum_{n=-2}^{\infty} a_n$. Når summasjonsgrensene ikke spiller noen rolle, vil vi ofte sløyfe dem og skrive rekken som $\sum a_n$.

Vi sier at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergerer* mot et tall s dersom følgen $\{s_n\}$ av delsummer konvergerer mot s . Tallet s kalles *summen av rekken* og betegnes ofte med $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Vi skriver også

$$s = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Det er altså summen s som gjenspeiler vår intuitive idé av en rekke som en uendelig sum. En rekke som konvergerer, kaller vi *konvergent*. Dersom en rekke ikke konvergerer, sier vi at den *divergerer* eller er *divergent*.

Det er viktig å skille mellom konvergens av følgen $\{a_n\}$ og konvergens av rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ – følgen konvergerer dersom leddene a_n går mot en grense, mens rekken konvergerer dersom delsummene $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ går mot en grense.

Bemerkning

Legg merke til at vi bruker symbolet $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ for to forskjellige ting; det betegner både rekken og dens sum (siden rekken er en følge og summen et tall, er dette opplagt to forskjellige ting). Denne dobbeltbruken er så innarbeidet at det ville være nytteløst å endre den, men man bør være oppmerksom på at den medfører en viss fare for misforståelser. Skriver vi for eksempel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, er det uklart om vi mener at de to rekkene skal være like (det vil si $a_n = b_n$ for alle n), eller om vi mener at det er to forskjellige rekker med samme sum.

Du kjenner noen eksempler på rekker allerede. Et uendelig desimaltall som

$$3.14159\dots$$

er egentlig ikke noe annet enn en rekke

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \dots$$

Et annet eksempel er geometriske rekker. Som kjent kalles en rekke *geometrisk* dersom forholdet a_{n+1}/a_n mellom to ledd som følger etter hverandre, alltid har samme

verdi r . Tallet r kalles *kvotienten* til rekken. Det er lett å se at leddene i en geometrisk rekke er

$$a_0, ra_0, r^2a_0, r^3a_0, \dots, r^na_0, \dots$$

og rekken kan derfor skrives

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0.$$

Du kjenner sannsynligvis konvergenssegenskapene til geometriske rekker fra før, men siden de vil spille en viktig rolle i teorien vår, skriver vi dem opp likevel.

12.1.1 Setning

Anta $a_0 \neq 0$. Den geometriske rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0$$

konvergerer hvis $|r| < 1$, og divergerer hvis $|r| \geq 1$. Når $|r| < 1$, er summen gitt ved

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0 = \frac{a_0}{1-r}.$$

Bevis: Summen til en endelig geometrisk rekke er

$$s_n = a_0 + ra_0 + r^2a_0 + r^3a_0 + \dots + r^na_0 = a_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

(hvis du ikke husker denne formelen fra videregående skole, så se på eksempel 1.2.3). Vi må undersøke om dette uttrykket konvergerer når $n \rightarrow \infty$.

Dersom $|r| < 1$, vil $r^{n+1} \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$, og følgelig konvergerer s_n mot $\frac{a_0}{1-r}$. Altså konvergerer den geometriske rekken, og summen er gitt ved

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0 = \frac{a_0}{1-r},$$

akkurat som vi skulle vise.

Dersom $|r| > 1$, går $|r|^{n+1}$ mot ∞ . Følgelig divergerer s_n , og det samme gjør rekken $\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0$.

Det gjenstår å se på tilfellene $r = -1$ og $r = 1$. Er $r = -1$, vil $(-1)^{n+1}$ fluktuere mellom 1 og -1 , og s_n vil ikke konvergere mot noen grense. Er $r = 1$, gjelder ikke summasjonsformelen, men går vi tilbake til rekken, ser vi at

$$s_n = \sum_{k=0}^n r^k a_0 = \sum_{k=0}^n a_0 = (n+1)a_0$$

som opplagt divergerer. Beviset er fullført. ■

12.1.2 Eksempel

Finn summen til rekken $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n$.

Dette er en geometrisk rekke med $a_0 = 1$ og $r = 1/2$. Ifølge formelen ovenfor er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$



Bruker vi teknikkene fra forrige kapittel, kan vi også finne summen til noen rekker som ikke er geometriske.

12.1.3 Eksempel

Finn summen til $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$.

I eksempel 11.2.4, så vi at

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n f(1)$$

der

$$|R_n f(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

Dette uttrykket kan også skrives


$$s_n = e - R_n f(1)$$

der $s_n = \sum_{k=0}^n 1/k!$ er n -te delsum til rekken vår. Siden $R_n f(1) \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$, så ser vi at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e,$$

og følgelig er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Vi skal komme tilbake til sammenhengen mellom Taylor-polynomer og rekker senere i kapitlet. 

La oss gå tilbake til generelle rekker, og se hva vi kan finne ut om deres konvergens-egenskaper. Det er rimelig å tro at dersom en rekke konvergerer, så må leddene gå mot null:

12.1.4 Divergenstesten Hvis rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, så er $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dersom leddene a_n ikke går mot null, må altså rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergere.

Bevis: Hvis rekken har sum s , konvergerer begge de to delsummene $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ og $s_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ mot s . Siden $a_n = s_n - s_{n-1}$, får vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$



Dette resultatet kalles divergenstesten fordi det kan brukes til å teste om rekker divergerer.

12.1.5 Eksempel

Vis at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ divergerer.

Vi ser at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + 1/n)^n} = e^{-1} \neq 0.$$

Altså er rekken divergent. ■

Det er naturlig å lure på om det omvendte resultatet også gjelder – kanskje alle rekker der leddene går mot null, er konvergente? Men så elskverdig er ikke verden. Her er et klassisk moteksempel.

12.1.6 Eksempel

Vi skal vise at den *harmoniske rekken*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergerer til tross for at leddene går mot null. Beviset går tilbake til den franske middelalderfilosofen og matematikeren Nicole Oresme (ca. 1323–1382).

Trikset er å dele inn summen på en smart måte. Vi skriver

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ &\quad + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ &\quad + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{16} \\ &\quad \dots \\ &\quad + \frac{1}{2^{n-1} + 1} + \frac{1}{2^{n-1} + 2} + \frac{1}{2^{n-1} + 3} + \cdots + \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Legg merke til at det siste leddet i hver linje er på formen $1/2^k$. Summerer vi linjen som ender med $1/2^k$, ser vi at den har 2^{k-1} ledd som alle er større enn eller lik $1/2^k$. Summen av linjen er derfor større enn eller lik $2^{k-1} \cdot (1/2^k) = 1/2$. Dermed har vi $n + 1$ linjer som alle har sum større enn eller lik $1/2$, og følgelig er $s_{2^n} \geq \frac{n+1}{2}$. Dette viser at s_{2^n} går mot uendelig, og følgelig er rekken divergent. ■

Advarsel

Siden misforståelsen er så vanlig, gjentar vi det nok en gang: Selv om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, behøver *ikke* rekken $\sum a_n$ konvergere!

Det viser seg at det ikke finnes noen universell konvergenstest – det finnes ikke et enkelt håndgrep som vi kan bruke for å avgjøre om en vilkårlig rekke konvergerer eller divergerer. Derimot finnes det en mengde tester som virker på noen rekker og ikke på andre. Vi skal komme tilbake til slike tester i neste seksjon. I resten av denne seksjonen skal vi se på noen enkle, men nyttige regneregler for rekker.

12.1.7 Setning

Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er to konvergente rekker med sum lik henholdsvis A og B . Da gjelder:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ er en konvergent rekke med sum } A + B$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \text{ er en konvergent rekke med sum } A - B$$

$$(iii) \text{ For ethvert tall } c \text{ er } \sum_{n=0}^{\infty} ca_n \text{ en konvergent rekke med sum } cA.$$

Skrevet med symboler har vi altså

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \\ \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} ca_n &= c \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Bevis: Dette er bare omskrivninger av regler som vi tidligere har bevist for følger. Vi viser (i) som et eksempel. La

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=0}^n b_k \quad \text{og} \quad r_n = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)$$

være delsummene til henholdsvis $\sum a_n$, $\sum b_n$ og $\sum (a_n + b_n)$. Da er $r_n = s_n + t_n$, og ifølge regnereglerne 4.3.3 er $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = A + B$. Siden $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, har vi dermed vist (i). ■

Bemerkning

I setningen ovenfor går summasjonen fra 0 til uendelig, men det er klart at resultatet gjelder like godt om den nedre summasjonsgrensen er noe annet enn 0. Slik vil det ofte være; vi vil formulere resultatene for en bestemt nedre grense (som regel 0 eller 1), og overlate generaliseringene til leserne.

Følgende korollar kan være nyttig om man ønsker å vise at en rekke divergerer.

12.1.8 Korollar

Dersom én av de to rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergerer og den andre divergerer, så divergerer også $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n)$ og $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n)$.

Bevis: Vi viser bare ett av tilfellene. Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergerer og $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergerer. La $a_n = b_n + c_n$ og anta for motsigelse at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer. Siden $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - c_n)$, er $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ differansen mellom to konvergente rekker og dermed selv konvergent ifølge setningen ovenfor. Dette er en selvmotsigelse, og korollaret er bevist. ■

Til slutt tar vi med en enkel observasjon som ofte er nyttig.

12.1.9 Setning

La $m > 0$. De to rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ vil enten begge konvergere eller begge divergere.

Bevis: La $S = \sum_{n=0}^{m-1} a_n$. Lar vi $s_N = \sum_{n=0}^N a_n$ og $t_N = \sum_{n=m}^N a_n$ være delsummene til de to rekkene, ser vi at hvis $N \geq m$, så er

$$s_N = \sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^N a_n = S + t_N.$$

Dermed ser vi at hvis den ene av størrelsene s_N og t_N konvergerer, så gjør den andre det også, og

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = S + \lim_{N \rightarrow \infty} t_N.$$

Setningen forteller oss at når vi skal avgjøre om en rekke konvergerer eller ikke, behøver vi ikke å bry oss om hvordan de første leddene ser ut – det er bare «halen» til rekken som spiller noen rolle. Som vi skal se etter hvert, er dette en svært nyttig observasjon.

Oppgaver i seksjon 12.1

1. Finn summen til den geometriske rekken:

a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$

$$\text{b) } 14 + 2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{49} + \dots$$

$$\text{c) } 4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{54} + \dots$$

$$\text{d) } 2 - \frac{3}{2} + \frac{9}{8} - \frac{27}{32} + \dots$$

2. I en geometrisk rekke $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ er $a_2 = 2/3$ og $a_5 = -2/81$. Finn summen til rekken.

3. Vis at rekken er en konvergent geometrisk rekke og finn summen.

$$\text{a) } 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad |x| < 1$$

$$\text{c) } a^2 - 4a^4 + 16a^6 - \dots, \quad |a| < \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n/2}$$

$$\text{e) } 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots, \quad 0 < x < 2$$

$$\text{f) } \frac{1}{y} - \frac{3}{y\sqrt{y}} + \frac{9}{y^2} - \frac{27}{y^2\sqrt{y}} + \dots, \quad y > 9$$

4. Bruk divergenstesten til å vise at rekken divergerer.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \arctan n$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^n$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{g) } \sum (-1)^n \frac{n!}{e^n}$$

5. I denne oppgaven skal vi vise at rekken $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergerer og finne summen.

a) Bruk delbrøkkoppspalting til å vise at $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

b) Vis at $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

c) Vis at $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergerer og finn summen.

6. Vis at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ konvergerer og finn summen.

7. a) Bruk Taylor-polynomene til $\ln(1-x)$ om $x=0$ til å vise at

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

for alle $x \in (-1, 1)$.

b) Vis at

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

8. a) Forklar hvorfor

$$0.231231231 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{231}{(1000)^n}.$$

b) Vis at $0.231231231 \dots = 231/999$.

c) Bruk den samme metoden til å skrive $0.473181818 \dots$ som en brøk.

9. En ball slippes fra 10 meters høyde. Hver gang den treffer bakken, spretter den opp til 80 % av den foregående høyden. Hvor lang strekning tilbakelegger den i alt?

10. (NTNU) Hver kveld slipper en fabrikk et forurensende avfallstoff ut i et vassdrag. I løpet av et døgn forsvinner $2/5$ av stoffet fra vassdraget. Dersom myndighetene regner med at en akseptabel mengde avfall i vassdraget er 20 kg, hvor mye kan fabrikkens slippe ut hver kveld uten at denne grensen overskrides?

11. En medisin utskilles fra kroppen med en hastighet som er proporsjonal med den mengden som er i kroppen. Halveringstiden er 12 timer.

a) Anta at en dose y_0 injiseres ved tiden 0. Vis at ved tiden t er mengden av medisin i kroppen gitt ved

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{12} t}.$$

- b) En pasient får en ny dose y_0 hver sjetten time. Vis at den totale mengden medisin i kroppen rett etter den n -te injeksjonen er

$$y_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \cdots + \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}} \right).$$

- c) Den totale mengden medisin i kroppen bør ikke overskride en faregrense a . Hva er det største y_0 kan være når vi ønsker at faregrensen ikke overskrides uansett hvor lenge behandlingen fortsetter?

12. En følge $\{a_n\}$ konvergerer mot a i *Cesaro-forstand* dersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = a.$$

- a) Vis at dersom $\{a_n\}$ konvergerer mot a , så konvergerer den også mot a i Cesaro-forstand.
- b) Finn en følge som konvergerer i Cesaro-forstand, men ikke i vanlig forstand.

12.2 Rekker med positive ledd

Gitt en rekke $\sum a_n$ er det to oppgaver vi kan stille oss – vi kan prøve å finne summen, eller vi kan nøye oss med å vise at rekken konvergerer. I første del av dette kapitlet skal vi konsentrere oss om den enkleste oppgaven – å avgjøre konvergens og divergens. Man kan spørre seg om dette er bryet verd – hvem er interessert i å vite om en rekke konvergerer når man ikke vet hva den konvergerer mot? Det er to svar på dette spørsmålet. For det første er det greit å vite at summen eksisterer før man setter i gang et større arbeid for å finne ut hva den er (eksakt eller tilnærmet), og for det andre finnes det faktisk en rekke anvendelser der spørsmålet om konvergens og divergens er det viktigste, og der verdien til summen stiller i annen rekke (du finner et slikt eksempel i seksjon *12.12).

Vi skal begynne med å studere konvergens av *positive* rekker, det vil si rekker $\sum a_n$ der $a_n \geq 0$ for alle n . Disse rekkene er spesielt enkle på grunn av følgende resultat. La oss være enige om å kalle en rekke *begrenset* dersom det finnes et tall M slik at $|\sum_{k=0}^n a_k| < M$ for alle n .

12.2.1 Setning

En positiv rekke konvergerer hvis og bare hvis den er begrenset.

Bevis: Hvis $\sum a_n$ er positiv, er følgen $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ av delsummer voksende. Fra setning 4.3.9 vet vi at en voksende følge konvergerer hvis og bare hvis den er begrenset. ■

Når vi skal vise at en positiv rekke konvergerer, behøver vi bare finne et tall M slik at

$$\sum_{k=0}^n a_k \leq M$$

for alle n . I dette kapitlet skal vi studere flere teknikker for å finne slike øvre skranke M , men la oss begynne med et eksempel som ikke krever noen spesielle forberedelser.

12.2.2 Eksempel

Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ konvergerer.

Vi ser at følgen er positiv og at

$$\frac{1}{(n+1)2^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{for alle } n.$$

Altså er

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+1)2^n} \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

der vi har brukt at $\sum 1/2^n$ er en geometrisk rekke med sum 2 (se eksempel 12.1.2).

Dermed er rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ begrenset, og konvergensten følger fra setningen ovenfor. ■

Dette eksemplet viser en teknikk som vi senere skal forfine – vi sammenligner den gitte rekken med en større rekke som vi kan beregne summen til (eller i det minste vise at konvergerer). Før vi går løs på slike sammenligningsteknikker, skal vi se på en annen viktig metode.

Integraltesten

I seksjon 9.5 studerte vi konvergens av uegentlige integraler. Vi skal nå se hvordan slike integraler kan hjelpe oss i studiet av positive rekker. Vi går rett løs på hovedresultatet.

12.2.3 Integraltesten Anta at $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ er en positiv, kontinuerlig og avtagende funksjon. Da konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hvis og bare hvis integralet $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergerer.

La oss først se hvordan denne setningen kan brukes. Vi ser på rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ der $p > 0$. Fra setning 9.5.4 vet vi at integralet $\int_1^{\infty} 1/x^p dx$ konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$. Vi skal bruke setningen til å vise et lignende resultat for rekker.

Funksjonen $f(x) = 1/x^p$ er positiv, kontinuerlig og avtagende på intervallet $[1, \infty)$. Ifølge integraltesten konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ hvis og bare hvis integralet $\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} 1/x^p dx$ konvergerer, det vil si hvis og bare hvis $p > 1$. Vi har altså vist følgende resultat:

12.2.4 Setning

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

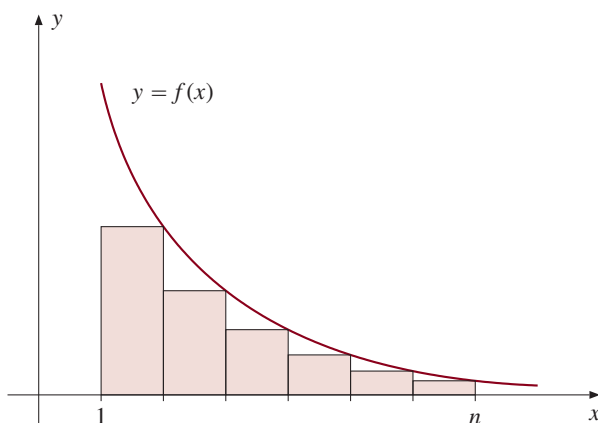
Dette er et uhyre betydningsfullt resultat. Kombinert med sammenligningsteknikker kan det brukes til å vise konvergens eller divergens av de fleste positive rekker som dukker opp i praksis. Vi forstår nå også hvorfor argumentet i eksempel 12.1.6 var såpass subtilt; den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ ligger akkurat på grensen mellom konvergens og divergens.

Før vi går videre må vi bevise integraltesten.

Bevis for integraltesten: Anta først at integralet $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergerer. På figur 12.2.1 ser vi at arealet av de skraverte boksene er

$$\sum_{k=2}^n f(k) \cdot 1 = \sum_{k=2}^n f(k)$$

mens arealet under kurven fra 1 til n er $\int_1^n f(x) dx$.



Figur 12.2.1.

Siden arealet under kurven er størst, får vi

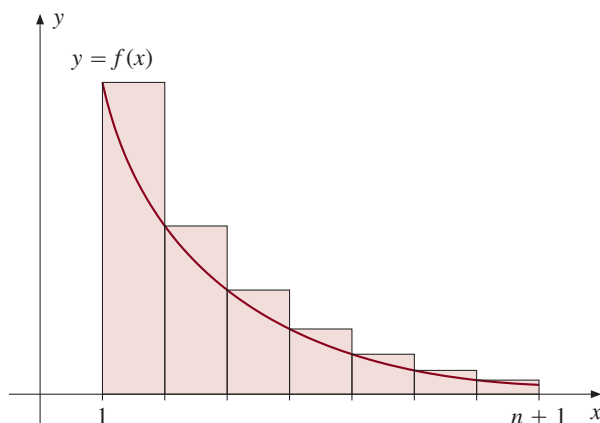
$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq M$$

der $M = \int_1^{\infty} f(x) dx$. Altså er delsummene $\sum_{k=2}^n f(k)$ begrenset av M , og rekken $\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ konvergerer ifølge setning 12.2.1. Ifølge setning 12.1.9 konvergerer $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ også.

Anta så at integralet $\int_1^{\infty} f(x) dx$ divergerer. På figur 12.2.2 ser vi at arealet av de skraverte boksene er $\sum_{k=1}^n f(k)$, mens arealet under kurven fra 1 til $n+1$ er $\int_1^{n+1} f(x) dx$. Denne gang er arealet av boksene størst, så

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

Siden integralet diverger, er $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) dx = \infty$, og følgelig er $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k) = \infty$. Rekken divergerer. ■



Figur 12.2.2.

Vi tar med et eksempel til på bruk av integraltesten.

12.2.5 Eksempel

Avgjør om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 1/n)$ konvergerer eller divergerer.

Vi bruker integraltesten med $f(x) = \ln(1 + 1/x)$ (sjekk at betingelsene er oppfylt!). For å beregne integralet

$$\int \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

bruker vi delvis integrasjon med $u = \ln(1 + 1/x)$, $v' = 1$. Vi får

$$\begin{aligned} \int \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx &= x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \int \frac{1}{(1 + 1/x)} \left(-\frac{1}{x^2}\right) x dx \\ &= x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln(1+x) + C. \end{aligned}$$

Setter vi inn grensene, får vi

$$\int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(1+n) - 2 \ln 2.$$

Siden de to første leddene er positive, og det andre går mot uendelig, må også integralet gå mot uendelig når n vokser. Altså divergerer integralet, og dermed også rekken. ■

Sammenligningstester

Når vi nå har skaffet oss oversikt over en del konvergente og divergente rekker, kan det lønne seg å gå tilbake til sammenligningsideen i eksempel 12.2.2. Når du leser setningen nedenfor, bør du tenke deg at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er en rekke du vil finne ut om konvergerer eller divergerer, og at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en beslektet rekke du kjenner konvergensgenskapene til.

12.2.6 Sammenligningstesten La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to positive rekker.

- (i) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og at det finnes et tall c slik at $b_n \leq ca_n$ for alle n . Da konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ også.
- (ii) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer og at det finnes et positivt tall d slik at $b_n \geq da_n$ for alle n . Da divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ også.

Bevis: (i) Ifølge setning 12.1.7 konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$. For enhver N er derfor

$$\sum_{n=1}^N b_n \leq \sum_{n=1}^N ca_n \leq M$$

der $M = \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$. Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ begrenset, og følgelig konvergent.

(ii) Siden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer, gjør $\sum_{n=1}^{\infty} da_n$ det også (hvorfor?). For enhver N er

$$\sum_{n=1}^N da_n \leq \sum_{n=1}^N b_n$$

og siden venstresiden går mot uendelig, må høyresiden også gjøre det. Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent. ■

12.2.7 Eksempel

Avgjør om

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^3 - 1}$$

konvergerer eller divergerer.

For $n \geq 1$ er

$$\frac{n^2 + 1}{2n^3 - 1} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer, må også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^3 - 1}$ divergere. ■

Sammenligningstesten er lett å forstå og lett å bevise, men det kan være kronglete å få til de nødvendige ulikhetene når testen skal brukes i praksis. Vi skal nå vise en variant som er lettere å håndtere.

12.2.8 Grensesammenligningstesten La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to positive rekker.

(i) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty.$$

Da konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer og at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} > 0.$$

Da divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Bevis: (i) Siden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = M < \infty$$

finnes det et tall N slik at $b_n/a_n \leq M+1$ for alle $n \geq N$. Dermed er $b_n \leq (M+1)a_n$ for alle slike n , og ifølge sammenligningstesten er $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ konvergent. Men dermed konvergerer hele rekken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (husk setning 12.1.9).

(ii) Siden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = M > 0$$

finnes det en N slik at $b_n/a_n > \frac{M}{2}$ når $n \geq N$. Dermed er $b_n \geq \frac{M}{2}a_n$ for alle slike n , og ifølge sammenligningstesten er $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ divergent siden $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ er det. ■

Når vi bruker grensesammenligningstesten i praksis, vil den gitte følgen spille rollen som $\sum b_n$, og vår oppgave er å finne en passende følge $\sum a_n$ å sammenligne med. Dette er ikke alltid så lett til å begynne med, men vi skal se på noen teknikker som kan brukes til å finne frem til en passende $\sum a_n$.

12.2.9 Eksempel

Undersøk om

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 4n}{8n^4 - 2}$$

konvergerer eller divergerer.

Faktorerer vi ut den høyeste potensen av n i teller og nevner, får vi

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{3 + 4/n}{8 - 2/n^4}$$

som viser at for store n , vil leddene være av størrelsesorden $1/n^2$. Det er derfor naturlig å sammenligne med den konvergente rekken $\sum 1/n^2$:

Bruker vi grensesammenligningstesten med $\sum b_n = \sum \frac{3n^2 + 4n}{8n^4 - 2}$ og $\sum a_n = \sum 1/n^2$, får vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2 + 4n}{8n^4 - 2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{3 + 4/n}{8 - 2/n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 4/n}{8 - 2/n^4} = \frac{3}{8}.$$

Siden $\sum a_n$ konvergerer, kan vi konkludere med at $\sum b_n$ også konvergerer. ■

Det neste trikket er det litt vanskeligere å finne på.

12.2.10 Eksempel

Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - 1)$ konvergerer eller divergerer.

Innfører vi Taylor-polynomet av grad 1, ser vi at

$$e^x = 1 + x + R_1f(x).$$

Setter vi inn $x = 1/n$, får vi

$$e^{1/n} - 1 = \frac{1}{n} + R_1f(1/n).$$

For store n blir $e^{1/n} - 1$ svært lik $1/n$ i størrelse. Vi sammenligner derfor $\sum b_n = \sum (e^{1/n} - 1)$ med den divergente rekken $\sum a_n = \sum 1/n$. Vi får

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n}(-1/n^2)}{-1/n^2} = 1$$

der vi har brukt L'Hôpitals regel. Siden $\sum a_n = \sum 1/n$ divergerer, forteller grensesammenligningstesten oss at $\sum b_n = \sum (e^{1/n} - 1)$ også divergerer. ■

Det siste eksemplet viser et knep som er nyttig dersom vi ikke aner hvilken rekke $\sum 1/n^p$ det lønner seg å sammenligne med.

12.2.11 Eksempel

Undersøk om $\sum_{n=0}^{\infty} (\pi/2 - \arctan n)$ konvergerer eller divergerer.

La oss forsøke å sammenligne med en generell rekke av typen $\sum 1/n^p$ og heller prøve å finne frem til den beste p 'en etterpå. Vi får

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi/2 - \arctan n}{n^{-p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{1+n^2}}{-pn^{-p-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p+1}}{p(1+n^2)}.$$

Vi ser at om vi velger $p = 1$, så vil grensen hverken være null eller uendelig. Vi får

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi/2 - \arctan n}{n^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(1+n^2)} = 1.$$

Siden $\sum 1/n$ divergerer, betyr dette at $\sum (\pi/2 - \arctan n)$ også divergerer. ■

Forholdstesten og rottesten

De testene vi hittil har sett på, er kraftige redskap, men å bruke dem krever ofte fantasi og innsikt. Vi skal nå se på to tester som er enklere å bruke, men som ofte ikke gir noen konklusjon.

12.2.12 Forholdstesten for positive rekker La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke og anta at grensen

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

eksisterer (den kan godt være lik ∞). Da gjelder:

- (i) Dersom $a < 1$, konvergerer rekken.
- (ii) Dersom $a > 1$, divergerer rekken fordi leddene ikke går mot null.
- (iii) Dersom $a = 1$, gir testen ingen konklusjon.

Bevis: Ideen er at når n blir stor, vil $\sum a_n$ oppføre seg omtrent som en geometrisk rekke med kvotient a . Vi får derfor konvergens når $a < 1$ og divergens når $a > 1$. For å få beviset til å fungere, må vi imidlertid sammenligne med en geometriske rekke med kvotient litt større enn a . Her er detaljene.

(i) Anta at $a < 1$, og la r være et tall slik at $a < r < 1$. Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = a$, finnes det et tall N slik at $a_{n+1}/a_n < r$ når $n \geq N$. Dermed er

$$a_{N+1} < r a_N, \quad a_{N+2} < r a_{N+1} < r^2 a_N, \quad a_{N+3} < r a_{N+2} < r^3 a_N, \quad \dots$$

Generelt er $a_{N+k} < r^k a_N$. Dette betyr at den positive rekken $\sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$, domineres av den konvergente, geometriske rekken $\sum_{k=0}^{\infty} r^k a_N$, og følgelig er den selv konvergent. Ifølge setning 12.1.9 er da hele rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

(ii) Anta at $a > 1$. Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = a$, finnes det et tall N slik at $a_{n+1}/a_n > 1$ når $n \geq N$. Dermed er $a_{n+1} > a_n$, så leddene i rekken vokser og kan derfor ikke gå mot null.

(iii) Det finnes både konvergente og divergente rekker med $a = 1$, for eksempel $\sum 1/n^p$ med $p > 1$ og $p \leq 1$. ■

12.2.13 Eksempel

Avgjør om $\sum_{n=0}^{\infty} n/2^n$ konvergerer eller divergerer.

Bruker vi forholdstesten får vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n}{2} = \frac{1}{2}$$

som viser at rekken konvergerer. ■

12.2.14 Eksempel

Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$ konvergerer eller divergerer.

Bruker vi forholdstesten får vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e}.$$

Siden $e > 1$, viser dette at rekken konvergerer. ■

La oss også se på et eksempel hvor testen ikke gir noe svar.

12.2.15 Eksempel

Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n)$ konvergerer eller divergerer.

Bruker vi forholdstesten får vi (ved hjelp av L'Hôpitals regel):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n^2}\right)} = 1.$$

Siden grensen er 1, gir testen ingen konklusjon, og vi må derfor prøve en annen metode (forsøk å sammenligne med $\sum 1/n$). ■

Den neste testen er en nær slektning av forholdstesten.

12.2.16 Rottesten for positive rekker La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke og anta at grensen

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

eksisterer (den kan godt være lik ∞). Da gjelder:

- (i) Dersom $a < 1$, konvergerer rekken.
- (ii) Dersom $a > 1$, divergerer rekken fordi leddene ikke går mot null.
- (iii) Dersom $a = 1$, gir testen ingen konklusjon.

Bevis: Akkurat som i forholdstesten er ideen at når n blir stor, vil $\sum a_n$ oppføre seg omtrent som en geometrisk rekke med kvotient a . Vi får derfor konvergens når $a < 1$ og divergens når $a > 1$.

(i) Anta at $a < 1$, og la r være et tall slik at $a < r < 1$. Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, finnes det et tall N slik at $\sqrt[n]{a_n} < r$ når $n \geq N$. Dermed er $a_n < r^n$ for alle $n \geq N$. Dette betyr at den positive rekken $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ domineres av den konvergente, geometriske rekken $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$, og følgelig er den selv konvergent. Ifølge setning 12.1.9 er da hele rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

(ii) Anta at $a > 1$. Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, finnes det et tall N slik at $\sqrt[n]{a_n} > 1$ når $n \geq N$. Dermed er $a_n > 1$, og leddene i rekken går ikke mot null.

(iii) Det finnes både konvergente og divergente rekker med $a = 1$, for eksempel $\sum 1/n^p$ med $p > 1$ og $p \leq 1$. ■

12.2.17 Eksempel

Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + 1/n)^{-n}$ konvergerer eller divergerer.

Bruker vi rottesten får vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + 1/n} = \frac{1}{2}$$

som viser at rekken konvergerer. ■

Bemerkning

Rottesten og forholdstesten kan brukes på omtrent de samme rekkene. Man kan vise at rottesten er ørlite sterkere (det vil si gir konklusjon for litt flere rekker), men til gjengjeld gir ofte forholdstesten enklere utregninger. Begge testene har et begrenset bruksområde – de kan bare brukes på rekker som konvergerer eller divergerer omtrent som en geometrisk rekke. Et nyttig hint når du bruker rottesten, er at for ethvert polynom $P(n)$ er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$$

(se oppgave 13 for mer informasjon). Denne formelen forenkler ofte utregningene.

Vi har nå et utall av konvergenstester til disposisjon, og man kan lure på hvilken man skal bruke når man står overfor en ny rekke. Det aller første man bør sjekke er om leddene virkelig går mot null. Deretter undersøker man om rekken ligner på en man har vært borti tidligere, og prøver i så fall samme teknikk som dengang (eller kanskje man til og med kan sammenligne med den rekken man da hadde?). Har man ingen idé om hvor man skal starte, er det ikke så dumt å prøve forholdstesten først – den er rask og effektiv, og selv i de tilfellene hvor den ikke virker, taper man ikke mye tid. De skarpeste våpnene vi har, er integraltesten og sammenligningstestene, og i kombinasjon kan de greie det meste. For å bruke dem effektivt må man imidlertid skaffe seg en god følelse for størrelsen til forskjellige typer uttrykk.

Oppgaver i seksjon 12.2

1. Bruk integraltesten til å avgjøre om rekken konvergerer eller divergerer.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 n}$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right)$$

2. Bruk integraltesten til å vise at $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ konvergerer hvis $p > 1$ og divergerer hvis $p \leq 1$.

3. Bruk sammenligningstesten eller grensesammenligningstesten til å avgjøre om rekken konvergerer eller divergerer.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2 + 3}{4n^3 - 2}$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n - 7}{4n^3 + 8}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{n + \sqrt{n}}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right)$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3 + 1} - n^{3/2} \right)$$

4. a) Anta at $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ og at $a_n \geq 0$ for alle n . Vis at $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ konvergerer hvis og bare hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer.

b) Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\sin \frac{1}{n} \right)$ konvergerer eller divergerer.

5. Bruk forholdstesten eller rottesten til å avgjøre om rekken konvergerer eller divergerer:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{10}}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 4^n}{n^n}$$

6. Vis at forholdstesten ikke kan avgjøre om disse rekkene konvergerer eller divergerer. Bruk en annen test til å løse problemet.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \sinh \frac{1}{n}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cosh \frac{1}{n}\right)$$

7. Avgjør om rekken konvergerer eller divergerer.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7}{n^2 + 2n + 3}$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + n}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!}$$

8. Avgjør om rekken konvergerer eller divergerer:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 3n + 1}{5n^3 + 7}$$

$$b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{(n-1)^2(n+3)^2}$$

$$c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n\sqrt{n}}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(n-1)}{(n+2\sqrt{n})(n+7)}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$f) \sum_{n=0}^{\infty} |\sin n|$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$$

$$h) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 - 1}}$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$$

9. (UiB) Avgjør om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\dots+n}{2^n}$ konvergerer eller divergerer.

10. (NTNU) La N være et gitt naturlig tall. Bruk sammenligning med integraler til å bevise at

$$\frac{1}{2(N+1)^2} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2N^2}.$$

Bruk dette til å finne en tilnærmet verdi for

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

med en feil $< 1/100$. *Hint:* Det kan være nyttig å bestemme det minste naturlige tall N som er slik at

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2N^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} \right) < \frac{1}{100}.$$

11. (NTNU) Bruk sammenlikning med integraler til å vise at

$$\ln \left(2 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \ln 2$$

for alle hele positive n . Tegn figurer!

12. (UiO) Anta at $a > 0$. For hvilke verdier av s konvergerer integralet

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^s}?$$

Beregn integralet når det konvergerer.

Vis (f.eks. ved en tegning) at hvis $s > 0$, så er

$$\int_2^{N+1} \frac{dx}{x^s} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^s} \leq \int_1^N \frac{dx}{x^s},$$

og benytt dette til å bestemme

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

13. Denne oppgaven inneholder en liten observasjon som ofte gjør det enklere å bruke rottesten.

a) Vis at dersom $P(n)$ er et polynom, så er $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|P(n)|} = 1$.

b) Vis at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{17} - 4n^6 + 2n^2 - 17}{2^n}$ konvergerer.

14. La $\{a_n\}$ være en positiv og avtagende følge.

a) Vis at for $m \in \mathbb{N}$ er

$$2^m a_{2^m} \geq a_{2^m} + a_{2^{m+1}} + a_{2^{m+2}} + \cdots + a_{2^{m+1}-1} \geq 2^m a_{2^{m+1}}.$$

b) Vis at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer hvis og bare hvis rekken $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ konvergerer. (Dette kalles *Cauchys fortetningstest*).

c) Bruk resultatet i b) til å vise at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ konvergerer hvis og bare hvis $s > 1$.

d) Vis at rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

15. I denne oppgaven skal vi se på to tester som er forbedringer av forholdstesten – Raabes test og Gauss' test.

a) La $\alpha > 0$. Finn Taylor-polynomet til

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^\alpha}$$

av grad 1 om 0, og bruk det til å vise at

$$\frac{1}{(1+x)^\alpha} > 1 - \alpha x$$

for $x > -1$.

b) Anta at $\{a_n\}$ er en følge av positive tall slik at

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \quad (*)$$

for alle n . Vis at $a_n \leq a_1/n^\alpha$ for alle n .

c) (Raabes test) Vis at dersom $\alpha > 1$, så konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i (*). Vis også at dersom

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

for alle n , så divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Gauss' test er en forbedring av Raabes test i det kritiske tilfellet $\alpha = 1$. Den sier at hvis $\{a_n\}$ er en positiv følge og det finnes tall M og s , $s > 1$, slik at

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{M}{n^s}\right) \quad (**)$$

for alle n , så divergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Vi skal bevise testen ved å sammenligne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med den divergente rekken $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ der $b_n = \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}$.

d) Vis at $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ divergerer.

e) Vis at

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)$$

og vis også at dette medfører at $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{M}{n^s}\right)$ for alle tilstrekkelig store n og alle $s > 1$.

f) Vis at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i (**) divergerer.

g) Vis at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^k$$

konvergerer hvis $k > 2$ og divergerer hvis $k \leq 2$.

16. I 1827 publiserte den franske matematikeren L. Olivier en avhandling der han påstod at en positiv rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer hvis og bare hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

Abel fant raskt et moteksempel; setter vi $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, får vi en rekke som divergerer til tross for at $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. Med dette som utgangspunkt gikk Abel videre og viste at det ikke finnes *noen* funksjon φ slik at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer hvis og bare hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) a_n = 0$. I denne oppgaven skal vi se på Abels argumenter.

a) Vis at $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergerer.

b) Vis at dersom $a_n \geq 0$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = B \neq 0$, så divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c) Vis at $\ln(1+x) < x$ for alle $x > -1$.

d) Vis følgende hjelpesetning: Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en positiv, divergent rekke, så divergerer også rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}.$$

Vink: Ta logaritmer på begge sider av likheten

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} = 1 + \frac{a_n}{a_1 + \dots + a_{n-1}}$$

for å vise at

$$\ln \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) - \ln \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) \leq \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}.$$

Summer dette uttrykket for $n = 2, 3, \dots, m$ og få

$$\ln \left(\sum_{k=1}^m a_k \right) - \ln a_1 \leq \sum_{n=2}^m \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}.$$

Vi skal nå bevise Abels hovedresultat. Anta for motsigelse at det finnes en funksjon $\varphi(n)$ slik at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer hvis og bare hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) a_n = 0$.

e) Forklar hvorfor vi kan anta at $\varphi(n) > 0$ for alle n .

f) Sett $a_n = 1/\varphi(n)$. Forklar hvorfor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer.

g) Vis at $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}$ divergerer.

h) Vis at $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} = 0$, og forklar hvorfor dette beviser resultatet.

12.3 Alternerende rekker

Med de teknikkene og eksemplene vi nå har til rådighet, har vi et godt grep på positive rekker. Det er på tide å se på rekker hvor leddene kan bytte fortegn.

Før vi går løs på det generelle tilfellet, skal vi se på et viktig spesialtilfelle. En rekke $\sum a_n$ kalles *alternerende* dersom to ledd som følger etter hverandre, alltid har motsatte fortegn. Ett av de to leddene a_n og a_{n+1} vil derfor være positivt og det andre negativt. Rekken

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

er alternerende.

Til tross for sin spesielle form er alternerende rekker ganske vanlige i praksis. Følgende resultat viser at de er svært enkle å ha med å gjøre.

12.3.1 Test for alternerende rekker Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er en alternerende rekke der størrelsen $|a_n|$ til leddene er avtagende og går mot null. Da er rekken konvergent. Dersom $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ er den n -te delsummen, så er

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$$

der s er summen til rekken. Feilen vi gjør ved å bryte av rekken etter n ledd, er altså mindre enn eller lik størrelsen på det første leddet vi ikke tar med.

12.3.2 Eksempel

Vis at den alternerende, harmoniske rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

konvergerer, og anslå summen med en nøyaktighet bedre enn $1/10$.

Vi ser at størrelsen på leddene $|a_n| = 1/n$ avtar mot null, så ifølge testen er rekken konvergent. For å finne summen med en nøyaktighet bedre enn $1/10$, legger vi merke til at

$$|s - s_9| \leq \frac{1}{10}.$$

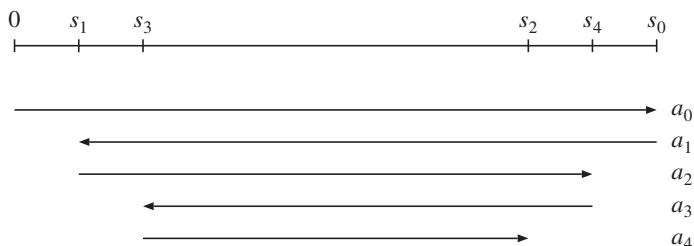
Altså gir

$$s_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0.75$$

det ønskede resultatet. ■

Bevis for test for alternerende rekker: Vi antar at $a_0 > 0$ – det omvendte tilfellet kan behandles tilsvarende. Ideen i beviset ser du på figur 12.3.1 – siden størrelsen til leddene er avtagende, må de like delsummene s_0, s_2, s_4, \dots danne en avtagende følge, mens de odde delsummene s_1, s_3, s_5, \dots danner en voksende følge. Den avtagende

følgen s_0, s_2, s_4, \dots er begrenset nedenfra av s_1 , og den voksende følgen s_1, s_3, s_5, \dots er begrenset ovenfra av s_0 . Ifølge teorem 4.3.9 er begge følgene konvergente. Vi må vise at de konvergerer mot samme grense.



Figur 12.3.1.

Anta at S er grensen for den avtagende følgen og T grensen for den voksende følgen. Da er

$$S - T = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$$

sidene leddene går mot null. Altså er $S = T$ og rekken konvergerer.

Det gjenstår å vise feilestimatet. Siden summen s til rekken alltid ligger mellom en delsum s_n og den neste s_{n+1} , må avstanden fra s_n til s være mindre enn avstanden fra s_n til s_{n+1} . Siden den siste avstanden er $|a_{n+1}|$, er

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}|.$$

Beviset er ferdig. ■

Bemerkning

Legg merke til at hele bevisideen bygger på at størrelsen til leddene avtar. Fjerner vi denne antagelsen fra testen, blir resultatet galt (se oppgave 6). Det er altså ikke nok å kreve at leddene går mot null.

Oppgaver i seksjon 12.3

1. Avgjør om rekken konvergerer eller divergerer.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n + 7n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}$

- e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{1}{n}}$
- f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin n$
- g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + 1}{n^2}$
- h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\sqrt{n}}$
- i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[\pi(n + \frac{1}{4})]}{\sqrt{n}}$

2. Avgjør om rekken konvergerer eller divergerer.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{e}\right)^n$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\arctan n + \arctan \frac{1}{n}\right)$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right)^{n^2}$
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{n!}$

3. Finn summen til rekken med en tilnærming som er bedre enn ε :

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$; $\varepsilon = 0.05$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; $\varepsilon = 0.25$
- c) $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(-\frac{1}{e}\right)^n$; $\varepsilon = 0.1$

4. I denne oppgaven antar vi at $|x| < 1$.

- a) Vis at $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

- b) Forklar hvorfor $\left| \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^n (-x)^k \right| \leq x^{n+1}$ for $x \geq 0$.
- c) Vis at $\left| \ln(1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)}$ for $x \geq 0$.
- d) Finn $\ln(3/2)$ med en nøyaktighet bedre enn 0.01.
5. a) (UiO) En tallfølge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ er definert ved
- $$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} \sin t \, dt$$
- Vis at $a_n = (-1)^n e^{-n\pi} a_0$. (Hint: Bruk substitusjonen $t = n\pi + u$).
- b) Vis at $a_0 = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$.
- c) Finn summen til rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- d) For hvilke x har $F(x)$ lokale ekstremalpunkter? Hva er den største og minste verdien til funksjonen
- $$F(x) = \int_0^x e^{-t} \sin t \, dt$$
- når $x \geq 0$? Skisser grafen til $10F(x)$ for $0 \leq x \leq 10$.
6. a) Vis at rekken
- $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$$
- alternerer og at leddene går mot null.
- b) Vis at rekken divergerer. Hvorfor strider ikke dette mot testen for alternerende rekker?

12.4 Absolutt og betinget konvergens

Vi skal nå se litt på konvergens av generelle rekker $\sum a_n$ der vi ikke har betingelser på fortegnet til leddene. Heldigvis slipper vi å gå løs på en ny serie med tester – i praksis kan vi som regel nøye oss med å studere den positive rekken $\sum |a_n|$. Det henger sammen med følgende begrep.

12.4.1 Definisjon

Vi seier at rekken $\sum a_n$ *konvergerer absolutt* dersom $\sum |a_n|$ konvergerer.

I utgangspunktet virker denne definisjonen nærmest litt absurd – hva er vitsen med å kalle en rekke absolutt konvergent dersom en *annen* rekke konvergerer? Vårt første resultat gjør sammenhengen klarere.

12.4.2 Setning

En absolutt konvergent rekke er alltid konvergent.

Bevis: Anta at $\sum a_n$ er absolutt konvergent, altså at $\sum |a_n|$ konvergerer. Vi lager to nye rekker $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$ på denne måten:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{hvis } a_n \text{ er positiv} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{hvis } a_n \text{ er negativ} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Legg merke til at $a_n = a_n^+ - a_n^-$. Legg også merke til at $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ og $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$. Siden $\sum |a_n|$ konvergerer, forteller sammenligningstesten oss at $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$ også konvergerer. Kall summene s^+ og s^- . Ifølge lemma 12.1.7(ii) konvergerer $\sum a_n = \sum (a_n^+ - a_n^-)$ mot $s^+ - s^-$. ■

Siden vi har god kontroll over positive rekker, ser vi nå at absolutt konvergens kan være et nyttig hjelpemiddel – dersom vi kan vise at den *positive* rekken $\sum |a_n|$ konvergerer, så har vi automatisk vist at den opprinnelige rekken $\sum a_n$ også konvergerer. Men hva med rekker som ikke konvergerer absolutt? La oss i det minste sette et navn på dem.

12.4.3 Definisjon

En konvergent rekke som ikke er absolutt konvergent, kalles *betinget konvergent*.

12.4.4 Eksempel

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ er betinget konvergent. Fra eksempel 12.3.2 vet vi at rekken konvergerer, mens vi fra seksjon 12.2 vet at rekken av absoluttverdier $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ ikke gjør det. ■

Det er verd å merke seg at forholdstesten og rottesten kan brukes direkte på rekker som ikke er positive. Legg merke til tallverdiene i formuleringene nedenfor!

12.4.5 Forholdstesten for generelle rekker La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke og anta at grensen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$$

eksisterer (den kan godt være lik ∞). Da gjelder:

- (i) Dersom $a < 1$, konvergerer rekken absolutt.
- (ii) Dersom $a > 1$, divergerer rekken.
- (iii) Dersom $a = 1$, gir testen ingen konklusjon.

12.4.6 Rottesten for generelle rekker La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke og anta at grensen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$$

eksisterer (den kan godt være lik ∞). Da gjelder:

- (i) Dersom $a < 1$, konvergerer rekken absolutt.
- (ii) Dersom $a > 1$, divergerer rekken.
- (iii) Dersom $a = 1$, gir testen ingen konklusjon.

Bevis: Bruk de gamle versjonene av forholds- og rottesten på den positive rekken $\sum |a_n|$. ■

De fleste betinget konvergente rekker som vi skal komme borti, er alternerende, og kan dermed behandles med metodene i forrige seksjon. Vi skal ikke utvikle noen teori for betinget konvergente rekker som ikke alternerer – kommer du borti en, er du overlatt til din egen skarpsindighet! Vår strategi for å behandle konvergens av generelle rekker er altså denne: Først sjekker du om rekken alternerer, og bruker i så fall testen fra forrige seksjon. Alternerer den ikke, undersøker du om den konvergerer absolutt ved hjelp av teknikkene i seksjon 12.2. Er den hverken absolutt konvergent eller alternerende, er det på tide å bruke fantasien.

En av grunnene til at vi ikke er så interesserte i betinget konvergente rekker, er at de har en del egenskaper som gjør dem vanskelige å behandle. Vi skal bruke resten av seksjonen til å se på en av disse egenskapene.

*Ombytte av ledd

Vi vet at i en endelig sum kan vi bytte om på rekkefølgen av leddene som vi vil. Isteden for å regne ut $2 + 8 + 4$ kan vi like godt regne ut $8 + 2 + 4$ eller $4 + 8 + 2$ eller

et hvilket som helst annet ombytte av tallene 2, 8 og 4. Spørsmålet er om vi kan gjøre det samme med rekker?

Svaret vil nok overraske de fleste. Dersom rekken er *absolutt* konvergent, kan vi fritt flytte om på leddene uten å forandre summen. Er rekken *betinget* konvergent, kan vi *ikke* gjøre det. Ja, det går faktisk aldeles storartet galt – gitt et hvilket som helst tall a , kan vi finne et ombytte av leddene som konvergerer nettopp mot denne a -en!

Før vi beviser disse resultatene, må vi definere hva vi skal mene med et ombytte av leddene.

12.4.7 Definisjon

En følge n_1, n_2, n_3, \dots av naturlige tall kalles en *permutasjon* av \mathbb{N} dersom hvert naturlig tall er med i følgen nøyaktig en gang.

Gitt en rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og en permutasjon n_1, n_2, n_3, \dots av \mathbb{N} , kan vi definere en ny rekke

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$$

der det i -te leddet er a_{n_i} . Vi kaller dette den *ombyttede rekken induisert av permutasjonen* n_1, n_2, n_3, \dots

12.4.8 Eksempel

Vi ser på rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Dersom permutasjonen er 2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots , så er den ombyttede rekken

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \dots$$



La oss først vise at allting er i orden for positive rekker.

12.4.9 Setning

Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en konvergent, positive rekke med sum s . Da er også ethvert ombytte av $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent med sum s .

Bevis: La $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ være et ombytte av $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Da er

$$b_i = a_{n_i}$$

for en eller annen permutasjon n_1, n_2, n_3, \dots . Gitt et naturlig tall N , kan vi finne en $M \in \mathbb{N}$ slik at alle tallene $n_1, n_2, n_3, \dots, n_N$ er mindre enn M . Da er mengden $\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_N\}$ inneholdt i $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_M\}$, og følgelig er

$$\sum_{i=1}^N b_i \leq \sum_{n=1}^M a_n \leq s$$

siden alle leddene er ikke-negative. Siden dette gjelder for alle N , må følgen $\sum_{i=1}^N b_i$ konvergere mot en sum t som er mindre enn eller lik s .

Nå kan vi speilvende argumentet; siden $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ er et ombytte av $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, må også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være et ombytte av $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$. Ved å bytte om på rollene til $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ i argumentet ovenfor, får vi at summen s til $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ må være mindre enn eller lik summen t til $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$. Men da må s være lik t , og beviset er fullført. ■

La oss nå utvide dette resultatet til absolutt konvergente rekker.

12.4.10 Setning

Anta at $\sum a_n$ er en absolutt konvergent rekke med sum s . Da er også ethvert ombytte av $\sum a_n$ absolutt konvergent med sum s .

Bevis: La $\sum b_i$ være et ombytte av $\sum a_n$. Vi deler rekken $\sum a_n$ inn i en «positiv» del $\sum a_n^+$ og en «negativ» del $\sum a_n^-$ akkurat som i beviset for setning 12.4.2. Da er den positive delen $\sum b_i^+$ til $\sum b_i$ et ombytte av $\sum a_n^+$, og den negative delen $\sum b_i^-$ et ombytte av $\sum a_n^-$. Dersom s^+ og s^- er summene til henholdsvis $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$, så vet vi fra foregående setning at $\sum b_i^+ = s^+$ og $\sum b_i^- = s^-$. Siden $b_i = b_i^+ - b_i^-$ og $a_n = a_n^+ - a_n^-$, får vi

$$\sum b_i = \sum b_i^+ - \sum b_i^- = s^+ - s^-$$

og

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = s^+ - s^-.$$

Dette viser at $\sum b_i$ konvergerer mot samme sum som $\sum a_n$. At $\sum b_i$ er absolutt konvergent, følger fra konvergensens til $\sum b_i^+$ og $\sum b_i^-$ siden $\sum |b_i| = \sum b_i^+ + \sum b_i^-$. ■

La oss nå se hva som skjer med betinget konvergente rekker. Vi trenger en hjelpesetning:

12.4.11 Lemma

Dersom $\sum a_n$ er betinget konvergent, divergerer både $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$.

Bevis: Vi ser at $a_n^+ = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}|a_n|$. Siden $\sum a_n$ konvergerer og $\sum |a_n|$ divergerer, er $\sum a_n^+$ summen av en konvergent og en divergent rekke. En slik sum divergerer (husk korollar 12.1.8)

Siden $a_n^- = \frac{1}{2}|a_n| - \frac{1}{2}a_n$, er $\sum a_n^-$ differansen mellom en konvergent og en divergent rekke. En slik differans divergerer også. ■

Hovedresultatet ble først vist av Bernhard Riemann (1826–1866):

12.4.12 Teorem

Anta at rekken $\sum a_n$ er betinget konvergent. For ethvert reelt tall a finnes det et ombytte av $\sum a_n$ som konvergerer mot a .

Bevis: Vi lar $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$ være den positive og negative delen av $\sum a_n$ som tidligere. Vi definerer ombytingen som følger: Først velger vi de første leddene fra $\sum a_n^+$ inntil summen første gang blir større enn a (dette er alltid mulig siden $\sum a_n^+$ divergerer). Deretter trekker vi fra de første leddene i $\sum a_n^-$ inntil vi får summen mindre enn a (det er mulig siden $\sum a_n^-$ divergerer). Så fortsetter vi med leddene fra $\sum a_n^+$ inntil summen igjen blir større enn a . Deretter fortsetter vi med leddene fra $\sum a_n^-$ inntil summen igjen er mindre enn a . På denne måten får vi en ombyting som hele tiden flytter seg frem og tilbake rundt a . Avstanden mellom delsummene og a er alltid mindre enn størrelsen på det leddet vi la til siste gang vi passerte a . Etter hvert som konstruksjonen fortsetter, må størrelsen på dette leddet gå mot null siden $a_n \rightarrow 0$. Altså konvergerer ombytingen mot a , og beviset er fullført. ■

Resultatet ovenfor viser at man ikke må tro at uendelige rekker alltid har de samme egenskapene som endelige summer. Det viser også hvorfor vi ikke har gjort all verdens anstrengelser for å skape en teori for betinget konvergens – rekker som konvergerer betinget, har så merkelige egenskaper at man bare har begrenset nytte av dem.

Oppgaver i seksjon 12.4

1. Avgjør om rekken er absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+4}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n}$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sinh n}{e^n}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right)^{n^2}$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

2. Avgjør om rekken er absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n}$$

$$\text{c) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{n!}{(2n)!}$$

3. For hvilke verdier av a konvergerer rekken?

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} (\sin a)^n$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} n(1 - a^2)^n$$

$$\text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^n}$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3a)^n}{n^2}$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(a+1)^n}{2^n n^2}$$

$$\text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + a^{2n}}$$

4. Gjennomfør bevisene for 12.4.5 og 12.4.6.

5. a) Anta at følgen $\{c_n\}$ er begrenset og at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt. Vis at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konvergerer.

b) Gjelder resultatet i a) dersom vi antar at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer istedenfor å konvergere absolutt?

6. Vis at dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt, så konvergerer også $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ absolutt (forutsatt at $a_n \neq -1$ for alle n).

7. I denne oppgaven skal vi vise to konvergenstester oppkalt etter Dirichlet og Abel.

a) La $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ være to følger, og la

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Vis at

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = s_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^n s_k (b_k - b_{k+1}).$$

(Dette kalles *Abels summasjonsformel*.)

- b) (*Dirichlets test*). Anta at delsummene $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ danner en begrenset følge og at $\{b_n\}$ er en følge som avtar mot null. Vis at rekken $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergerer.
- c) Anta at θ ikke er delelig med π . Bruk summeformelen for en geometrisk rekke til å vise at delsummene $\sum_{k=1}^n e^{i\theta k}$ er begrenset (her er i det komplekse tallet $\sqrt{-1}$). Vis at delsummene $\sum_{k=1}^n \cos(\theta k)$ og $\sum_{k=1}^n \sin(\theta k)$ er begrenset, og bruk Dirichlets test til å vise at rekkene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\theta k)}{k^\alpha} \quad \text{og} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\theta k)}{k^\alpha}$$

konvergerer for alle $\alpha > 0$.

- d) (*Abels test*) La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være konvergent og anta at følgen $\{b_n\}$ er positiv og avtagende. Vis at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergerer.

12.5 Rekker av funksjoner

Vi skal nå begynne å se på rekker

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$$

der leddene $v_n(x)$ er funksjoner. Slike rekker er viktige i mange deler av matematikken. I denne boken skal vi stort sett studere potensrekker der $v_n(x)$ er potenser av typen x^n eller $(x-a)^n$ ganget med et tall a_n , men i andre sammenhenger er trigonometriske rekker med $v_n(x)$ lik $a_n \sin nx$ eller $b_n \cos nx$ like viktige. I tallteori spiller *Dirichlet-rekker* med $v_n(x) = \frac{a_n}{n^x}$ en sentral rolle.

Det er en nær sammenheng mellom rekker av funksjoner og rekker av tall. Velger vi en verdi a for variabelen x , forvandles funksjonsrekken $\sum v_n(x)$ til en rekke $\sum v_n(a)$ av tall. Vi kan derfor bruke de testene vi har utviklet for tallrekker, til å studere rekker av funksjoner. Mer overraskende er det at vi kan bruke funksjonsrekker til å finne summen til tallrekker. Begge disse temaene vil være ledetråder for resten av kapitlet.

Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ er en funksjonsrekke, kaller vi

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n v_k(x)$$

for den n -te *delsummen* til $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$. Anta nå at alle funksjonene v_n er definert på en mengde A , og at v er en funksjon som også er definert på A . Vi sier at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ konvergerer *punktvist* mot v dersom følgen av delsummer $\{s_n(x)\}$ konvergerer punktvist mot $v(x)$ (husk at dette betyr at $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(a) = v(a)$ for alle $a \in A$). Tilsvarende sier vi at $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ konvergerer *uniformt* mot v på A dersom

følgen $\{s_n(x)\}$ av delsummer konvergerer uniformt mot v på A . (Husker du ikke hva dette betyr, er det på tide å repetere seksjon 11.3 og 11.4.)

Fra forrige kapittel vet vi at vi trenger uniform konvergens for å sikre at grensefunksjonen har pene egenskaper. Generelt kan uniform konvergens være vanskelig å påvise, men for de rekkene vi skal være interessert i, kommer vi svært langt med dette kriteriet:

12.5.1 Weierstrass' M -test La $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ være en rekke av funksjoner definert på en mengde A . Anta det finnes en konvergent rekke (av tall) $\sum M_n$ slik at

$$|v_n(a)| \leq M_n$$

for alle n og alle $a \in A$. Da konvergerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ uniformt og absolutt på A .

Bevis: La oss først vise at følgen konvergerer punktvis. For enhver $a \in A$ domineres den positive rekken $\sum |v_n(a)|$ av den konvergente rekken $\sum M_n$. Altså konvergerer $\sum v_n(a)$ absolutt, og ifølge setning 12.4.2 er den da konvergent. Kall grensen $v(a)$.

Vi må vise at $\sum v_n(x)$ konvergerer uniformt mot v , det vil si at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en N slik at når $n \geq N$, så er $|v(a) - s_n(a)| < \epsilon$ for alle $a \in A$. Siden $\sum M_n$ konvergerer, finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon$ når $n \geq N$. Dermed er

$$|v(a) - s_n(a)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k(a) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \right| < \epsilon$$

for en hvilket som helst $a \in A$, og beviset er ferdig. ■

La oss se et eksempel på hvordan testen brukes.

12.5.2 Eksempel

Vis at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ konvergerer uniformt på intervallet $[-1, 1]$.

For alle $x \in [-1, 1]$ er

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Siden den positive rekken $\sum 1/n^2$ konvergerer, sier Weierstrass' M -test at $\sum x^n/n^2$ konvergerer uniformt. ■

Det hender ofte at en funksjonsrekke $\sum v_n(x)$ konvergerer (punktvis) for noen x , men ikke for andre. Mengden av de x slik at $\sum v_n(x)$ konvergerer, kalles da *konvergensområdet* til $\sum v_n(x)$. I de neste seksjonene skal vi ofte være på jakt etter å finne konvergensområdet til en gitt rekke. Vi har da stor nytte av konvergenstestene fra tidligere seksjoner. Her er et enkelt eksempel:

12.5.3 Eksempel

Finn konvergensområdet til rekken $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$.

Bruker vi forholdstesten, får vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{1 + \frac{1}{n}} = |x|.$$

Dette betyr at rekken er absolutt konvergent når $|x| < 1$ og divergent for $|x| > 1$. For $|x| = 1$, gir ikke testen noen konklusjon, så vi må se nærmere på disse tilfellene.

La oss først se på $x = 1$. Da får vi rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ som vi vet divergerer. For $x = -1$, får vi isteden $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ som konvergerer ved testen for alternerende rekker. Dette betyr at konvergensområdet er $[-1, 1)$. ■

*En kontinuerlig, ingensteds deriverbar funksjon

Vi skal nå bevise at funksjonen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(n!)^2 x]}{n!}$$

er kontinuerlig, men ikke deriverbar i ett eneste punkt. Dette viser at vi må være forsiktige med funksjonsrekker, og ikke tro at uendelige summer av funksjoner nødvendigvis har de samme egenskapene som endelige summer. Det gir også belegg for vår argumentasjon i kapittel 5 der vi brukte eksistensen av kontinuerlige, ikke-deriverbare funksjoner som en motivasjon for vårt (overdrevet?) grundige studium av kontinuitetsbegrepet.

La oss aller først vise at formelen ovenfor virkelig gir mening.

12.5.4 Setning

Uttrykket

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(n!)^2 x]}{n!}$$

definerer en kontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Bevis: Vi bruker Weierstrass' M -test. Siden

$$\left| \frac{\sin[(n!)^2 x]}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$$

og $\sum 1/n!$ konvergerer (bruk forholdstesten), så konvergerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(n!)^2 x]}{n!}$ uniformt. Siden hver delsum $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin[(k!)^2 x]}{k!}$ er kontinuerlig, er da også grensen $f(x)$ kontinuerlig ifølge teorem 11.3.8. ■

Så var det deriverbarheten. Hvis vi deriverer rekken ledd for ledd, får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \cos[(n!)^2 x]$$

som åpenbart ikke konvergerer. Dette indikerer at det kan være problemer med deriverbarheten til $f(x)$, men det *beviser* ingenting – man kan lett lage konvergente funksjonsfølger der de deriverte divergerer, men hvor grensefunksjonen allikevel er deriverbar ($g_n(x) = \sin(nx)/n$ er et eksempel). For å bevise at f ikke er deriverbar, må vi gå tilbake til definisjonen av deriverbarhet.

Gitt en $N \in \mathbb{N}$, deler vi rekken inn i tre deler; begynnelsen

$$b_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin[(n!)^2 x]}{n!},$$

det N -te leddet

$$l_N(x) = \frac{\sin[(N!)^2 x]}{N!},$$

og slutten

$$s_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin[(n!)^2 x]}{n!}.$$

(Bokstavene b , l og s er valgt for å minne deg på ordene *begynnelse*, *ledd* og *slutt*.)

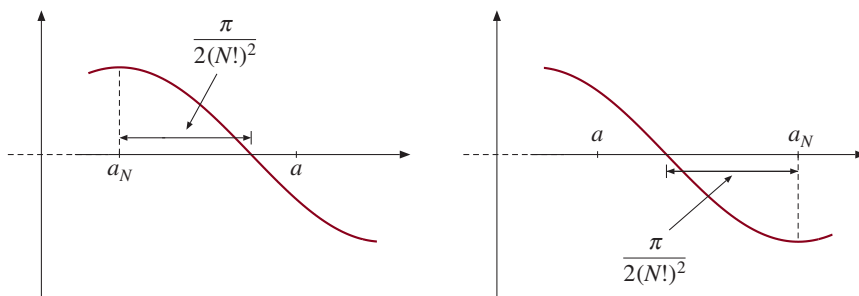
Gitt et punkt $a \in \mathbb{R}$, skal vi vise at $f(x)$ ikke er deriverbar i a .

Vi ser først på leddet $l_N(x)$. Funksjonen $\sin[(N!)^2 x]$ er periodisk med periode $2\pi/(N!)^2$. Vi kan derfor finne et punkt a_N slik at

$$\frac{\pi}{2(N!)^2} \leq |a_N - a| \leq \frac{\pi}{(N!)^2}$$

og

$$|\sin[(N!)^2 a_N] - \sin[(N!)^2 a]| \geq 1.$$



Figur 12.5.1.

Figur 12.5.1 viser hvordan dette gjøres; dersom a ligger nede i en bølgedal (det vil si at $\sin[(N!)^2 a] < 0$), så velger vi a_N til å være den nærmeste toppen, og dersom a ligger på en bølgetopp (det vil si $\sin[(N!)^2 a] \geq 0$), velger vi isteden a_N til å være det nærmeste bunnpunktet.

Vi har dermed

$$|l_N(a_N) - l_N(a)| \geq \frac{1}{N!}$$

og følgelig er

$$\left| \frac{l_N(a_N) - l_N(a)}{a_N - a} \right| \geq \frac{1/N!}{\pi/(N!)^2} = \frac{N!}{\pi}.$$

Lar vi $N \rightarrow \infty$, vil $a_N \rightarrow a$ og $\left| \frac{l_N(a_N) - l_N(a)}{a_N - a} \right|$ gå mot uendelig.

Tenk deg at vi kan få til det samme resultatet for $f(x)$ istedenfor $l_N(x)$. Da vil ikke grenseverdien $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(a_N) - f(a)}{a_N - a}$ eksistere, og følgelig er ikke f deriverbar i a . For å vise at dette virkelig er tilfellet, må vi vise at b_N og s_N ikke gir noen bidrag av betydning til brøken $\frac{f(a_N) - f(a)}{a_N - a}$. Det gjør de ikke, men av to forskjellige grunner – b_N har for liten derivert, mens s_N har for liten amplitude. La oss se på detaljene.

Vi begynner med b_N :

12.5.5 Lemma

$$\left| \frac{b_N(a_N) - b_N(a)}{a_N - a} \right| \leq 2(N-1)!$$

Bevis: Ved trekantulikheten er

$$|b_N(a_N) - b_N(a)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{\sin[(n!)^2 a_N]}{n!} - \frac{\sin[(n!)^2 a]}{n!} \right|.$$

Bruker vi middelverdisetningen, ser vi at det finnes et tall c_n mellom a og a_N slik at:

$$\left| \frac{\sin[(n!)^2 a_N]}{n!} - \frac{\sin[(n!)^2 a]}{n!} \right| \leq n! |\cos[(n!)^2 c_n]| \cdot |a_N - a| \leq n! |a_N - a|.$$

Dermed er

$$|b_N(a_N) - b_N(a)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} n! |a_N - a| = |a_N - a| \cdot \left((N-1)! + \sum_{n=0}^{N-2} n! \right).$$

Nå ser vi at $\sum_{n=0}^{N-2} n! \leq \sum_{n=0}^{N-2} (N-2)! = (N-1)!$, og følgelig er

$$|b_N(a_N) - b_N(a)| \leq 2|a_N - a|(N-1)!.$$

Lemmaet er bevist. ■

Dette lemmaet forteller oss at $\left| \frac{b_N(a_N) - b_N(a)}{a_N - a} \right|$ er av størrelsesorden $(N-1)!$.

Ovenfor har vi sett at $\left| \frac{l_N(a_N) - l_N(a)}{a_N - a} \right|$ er av størrelsesorden $N!$. Det siste uttrykket

vil derfor dominere når N blir stor. Før vi viser at $\left| \frac{s_N(a_N) - s_N(a)}{a_N - a} \right|$ også er av størrelsesorden $(N-1)!$, trenger vi et enkelt estimat:

12.5.6 Lemma

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{2}{(N+1)!}$$

Bevis:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \frac{1}{(N+3)!} + \dots \\
 &< \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{2(N+1)!} + \frac{1}{2^2(N+1)!} + \dots \\
 &= \frac{1}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \\
 &= \frac{2}{(N+1)!}.
 \end{aligned}$$

der vi har summert en geometrisk rekke. ■

12.5.7 Lemma

$$\left| \frac{s_N(a_N) - s_N(a)}{a_N - a} \right| \leq 3(N-1)!.$$

Bevis:

$$\begin{aligned}
 |s_N(a_N) - s_N(a)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\left| \frac{\sin[(n!)^2 a_N]}{n!} \right| + \left| \frac{\sin[(n!)^2 a]}{n!} \right| \right) \\
 &\leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{4}{(N+1)!}
 \end{aligned}$$

ifølge foregående lemma. Dermed er

$$\left| \frac{s_N(a_N) - s_N(a)}{a_N - a} \right| \leq \frac{4}{\frac{\pi}{2(N!)^2}} \leq \frac{8N!}{\pi(N+1)} \leq \frac{8(N-1)!}{\pi} \leq 3(N-1)!$$

Vi er nå klare til å bevise hovedresultatet. ■

12.5.8 Teorem

Funksjonen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(n!)^2 x]}{n!}$$

er kontinuerlig på hele \mathbb{R} , men ikke deriverbar i et eneste punkt.

Bevis: Siden $a_N \rightarrow a$, er det nok å vise at $[f(a_N) - f(a)]/(a_N - a)$ ikke går mot en grense. Vi har

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a_N) - f(a)}{a_N - a} \right| &= \left| \frac{[l_N(a_N) - l_N(a)] + [b_N(a_N) - b(a)] + [s_N(a_N) - s(a)]}{a_N - a} \right| \\ &\geq \left| \frac{l_N(a_N) - l_N(a)}{a_N - a} \right| - \left| \frac{b_N(a_N) - b(a)}{a_N - a} \right| - \left| \frac{s_N(a_N) - s(a)}{a_N - a} \right| \\ &\geq \frac{N!}{\pi} - 2(N-1)! - 3(N-1)! \end{aligned}$$

som går mot uendelig når N går mot uendelig. Teoremet er bevist. ■

Bemerkning

Beviset ovenfor kan være vanskelig å forstå på grunn av alle regningene, men det har en klar idé: Over en strekning av størrelsesorden $1/(N!)^2$ er det $l_N(x)$ som avgjør hvor fort funksjonen vokser – $b_N(x)$ vokser for langsomt til å kunne konkurrere, og $s_N(x)$ er for liten til å gi vesentlige bidrag. Siden $l_N(x)$ vokser fortere og fortere, kan ikke funksjonen være deriverbar.

Den første som konstruerte et eksempel på en kontinuerlig, ingensteds deriverbar funksjon, var Bernhard Bolzano rundt 1830. Manuskriptet hans ble imidlertid først publisert hundre år senere, og fenomenet ble først alminnelig kjent etter at Weierstrass i 1872 publiserte en artikkel der han viste at

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \cos b^n x$$

er kontinuerlig, men ikke deriverbar (forutsatt at a og b/a er tilstrekkelig store). Omrent det samme eksemplet ble forøvrig funnet av Charles Cellérier (1818-1890) som ikke publiserte det.

Oppgaver i seksjon 12.5

1. For hvilke x konvergerer rekken?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2}$$

2. Bruk Weierstrass' M -test til å vise at rekkene konvergerer uniformt på den angitte mengden:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \quad \text{på } \mathbb{R}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^3}} \quad \text{på } [-1, 1]$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} \quad \text{på } [1, \infty)$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{på } [-a, a] \text{ for enhver } a > 0$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^4} \quad \text{på } \mathbb{R}$$

3. a) Vis at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ konvergerer uniformt mot en funksjon f på hele \mathbb{R} .

b) Forklar hvorfor f er kontinuerlig.

c) Vis at $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ for alle x .

4. a) Forklar hvorfor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan nx}{n^{5/2}}$ konvergerer uniformt mot en funksjon f på hele \mathbb{R} .

b) Vis at $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}(1+n^2x^2)}$ for alle x .

5. a) Forklar hvorfor $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ konvergerer uniformt mot $\frac{1}{1+x}$ på $[-a, a]$ for enhver $a \in (0, 1)$.

b) Vis at $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ for $x \in (-1, 1)$.

c) Vis at $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^{n-1}$ for $x \in (-1, 1)$.

6. a) Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergerer uniformt mot e^x på intervallet $[-a, a]$ for alle $a > 0$.
- b) Bruk a) til å kontrollere at $D[e^x] = e^x$.
7. a) Vis at rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ og $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ konvergerer uniformt mot henholdsvis $\sin x$ og $\cos x$ på intervallene $[-a, a]$, $a > 0$.
- b) Bruk a) til å kontrollere at $D[\sin x] = \cos x$ og $D[\cos x] = -\sin x$.
8. Bruk en datamaskin eller en grafisk lommeregner til å undersøke den ingensteds deriverbare funksjonen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(n!)^2 x]}{n!}$. Tast inn et endelig antall ledd og se på grafen. Zoom inntil du får en glatt kurve. Tast inn flere ledd, og se på den nye grafen i det samme vinduet. Gjenta prosessen til du ikke orker lenger.

12.6 Konvergens av potensrekker

En *potensrekke* er en funksjonsrekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$$

der a og a_0, a_1, a_2, \dots er tall. Det er disse rekkene vi skal konsentrere oss om heretter. For å forenkle notasjonen skal vi ofte bevise resultatene for tilfellet $a = 0$ slik at vi får rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

men alle resultater gjelder også i det generelle tilfellet.

Advarsel

Husk at når vi bruker summetegn, tolker vi 0^0 som 1 selv om uttrykket vanligvis er udefinert. Setter vi inn 0 for x i rekken

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

får vi derfor

$$g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots = a_0$$

Noen eksempler på potensrekker er

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{(x-1)^{n-1}}{n} + \dots\end{aligned}$$

Det første vi skal gjøre, er å beskrive konvergensområdene til potensrekker. La oss begynne med å skrive opp hovedresultatet.

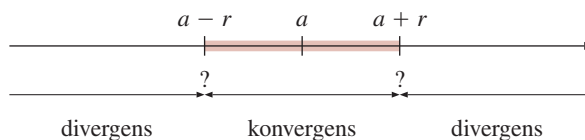
12.6.1 Teorem

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ være en potensrekke. Da er det tre muligheter.

- (i) Potensrekken konvergerer for alle x .
- (ii) Potensrekken konvergerer bare for $x = a$.
- (iii) Det finnes et tall r slik at potensrekken konvergerer absolutt for alle x slik at $|x-a| < r$ og divergerer for alle x slik at $|x-a| > r$.

Tallet r kalles *konvergensradien* til potensrekken (dersom rekken konvergerer for alle x eller bare for $x = a$, sier vi ofte at konvergensradien er henholdsvis ∞ eller 0).

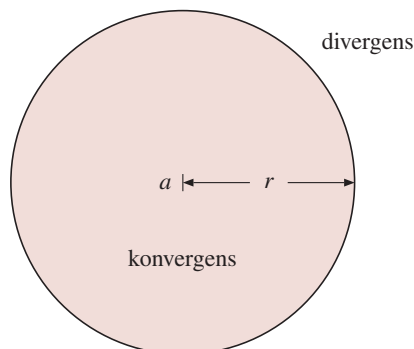
Ifølge (iii) konvergerer potensrekken for alle x i det *åpne* intervallet $(a-r, a+r)$ og divergerer for alle x utenfor det *lukkede* intervallet $[a-r, a+r]$. Hva som skjer i endepunktene $a-r$ og $a+r$, sier ikke teoremet noe om. Det viser seg at noen potensrekker konvergerer i begge endepunktene, noen bare i det ene, og noen i ingen av endepunktene. Figur 12.6.1 viser den generelle situasjonen.



Figur 12.6.1.

Tallet r kalles altså *konvergensradien* til potensrekken. Dette navnet blir mer forståelig dersom vi tillater variabelen x også å anta komplekse verdier. I så fall vil potensrekken konvergere for alle komplekse tall x som ligger innenfor en sirkel om a med radius r , og divergere for alle komplekse tall som ligger utenfor denne sirkelen (se

figur 12.6.2). Nesten alle resultatene vi skal vise, gjelder (med passende omformuleringer) om a, a_0, a_1, a_2, \dots og x er komplekse tall, men for enkelhets skyld skal vi holde oss til det reelle tilfellet.



Figur 12.6.2.

Før vi starter på beviset for teoremet, skal vi gjennom noen eksempler se hvordan vi finner konvergensområdet i praksis. Vi har allerede sett et slikt eksempel i 12.5.3.

12.6.2 Eksempel

Finn konvergensintervallet til rekken $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

Vi bruker først forholdstesten. Siden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+2/n)x}{(1+1/n)} \right| = |x|$$

ser vi at rekken konvergerer absolutt når $|x| < 1$, og at den divergerer når $|x| > 1$. Når $|x| = 1$, gir ikke forholdstesten noen konklusjon, og vi må se på disse tilfellene for seg. Når $x = 1$, får vi rekken $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)$ som opplagt divergerer siden leddene ikke går mot null. Når $x = -1$, får vi rekken $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n$. Heller ikke her går leddene mot null, og rekken divergerer. Altså er konvergensintervallet $(-1, 1)$. ■

12.6.3 Eksempel

Finn konvergensintervallet til $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2 2^n}$.

Vi bruker forholdstesten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x+3)^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{(x+3)^n}{n^2 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2(x+3)}{2(n+1)^2} \right| = \left| \frac{x+3}{2} \right|.$$

Vi har altså konvergens når $|(x+3)/2| < 1$, det vil si når x ligger i intervallet $(-5, -1)$. Vi har divergens når $|(x+3)/2| > 1$, det vil si når x ligger utenfor intervallet $[-5, -1]$. Endepunktene -5 og -1 må undersøkes for seg.

For $x = -5$, får rekken formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+3)^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

som vi vet konvergerer.

For $x = -1$, får rekken formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+3)^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

som vi også vet konvergerer. Konvergensintervallet er dermed $[-5, -1]$. ■

La oss ta med to eksempler på de ekstreme tilfellene der konvergensintervallet enten er hele \mathbb{R} eller bare et punkt.

12.6.4 Eksempel

Finn konvergensintervallet til $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$

Vi bruker forholdstesten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0.$$

Siden svaret er mindre enn 1 for alle x , konvergerer rekken for alle x . Konvergensintervallet er \mathbb{R} . ■

12.6.5 Eksempel

Finn konvergensintervallet til $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

For $x = 0$ konvergerer rekken siden alle leddene bortsett fra det første er null. For $x \neq 0$ bruker vi forholdstesten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)x| = \infty.$$

Altså divergerer rekken for $x \neq 0$. Konvergensområdet er $\{0\}$. ■

Vi avslutter med et litt vanskeligere eksempel.

12.6.6 Eksempel

Finn konvergensintervallet til $\sum_{n=1}^{\infty} (1+1/n)^{n^2} x^n$.

Her lønner det seg å bruke rottesten istedenfor forholdstesten. Vi får:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(1+1/n)^{n^2} x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |x| = e|x|.$$

Skal dette uttrykket være mindre enn 1, må $|x| < e^{-1}$. Vi får konvergens for $|x| < e^{-1}$ og divergens for $|x| > e^{-1}$. Tilfellene $x = e^{-1}$ og $x = -e^{-1}$ må drøftes for seg.

Dette ser vanskelig ut. Setter vi $x = e^{-1}$, får vi den kompliserte rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}.$$

Her er det ikke lett å se hva man skal gjøre, så vi prøver det enkleste først – undersøker om leddene går mot null. Vi får

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln(1+1/n) - 1/n}.$$

Uttrykket i eksponenten kan behandles med L'Hôpitals regel:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+1/n) - 1/n}{1/n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+1/n} \left(-\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}}{-2\left(\frac{1}{n^3}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n}{1+1/n} + n \right) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n + n + 1}{1+1/n} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dette betyr at $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^{n^2} e^{-n} = e^{-1/2}$. Leddene går altså ikke mot null, og rekken divergerer for $x = e^{-1}$. I det andre endepunktet $x = -e^{-1}$ har leddene den samme størrelsen (men annet fortegn), så heller ikke i dette tilfellet går de mot null. Dermed har vi divergens også for $x = -e^{-1}$.

Vi konkluderer med at konvergensintervallet er $(-e^{-1}, e^{-1})$. ■

Det er på tide å bevise teorem 12.6.1. Først trenger vi en hjelpesetning.

12.6.7 Lemma

Anta at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer for $x = b$, $b \neq 0$. Da konvergerer den absolutt for alle x slik at $|x| < |b|$. Konvergens er uniform på ethvert intervall $[-c, c]$ der $0 < c < |b|$.

Bevis: Siden $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ konvergerer, må leddene $a_n b^n$ gå mot null når n vokser. Følgelig finnes det K slik at $|a_n b^n| < K$ for alle n (hvorfor?). Dersom $0 < c < |b|$ og $x \in [-c, c]$, så er

$$|a_n x^n| = |a_n b^n| \left| \frac{x}{b} \right|^n \leq K \left(\frac{c}{|b|} \right)^n.$$

Siden $c < |b|$, er $\sum_{n=0}^{\infty} K(c/|b|)^n$ en konvergent, geometrisk rekke. Ifølge Weierstrass' M -test, konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uniformt og absolutt på $[-c, c]$.

Siden ethvert tall x med $|x| < |b|$ hører med til et intervall av typen $[-c, c]$, så konvergerer rekken absolutt for alle slike x . ■

Bemerkning

Lemmaet holder også for generelle potensrekker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ med nøyaktig det samme beviset, men formuleringene blir litt mer kronglete. Legg merke til hvordan vi sammenlignet $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med en geometrisk rekke – denne teknikken er meget effektiv, og vi skal bruke den om og om igjen i forskjellige varianter.

Bevis: *Bevis for teorem 12.6.1:* For enkelhets skyld ser vi bare på tilfellet $a = 0$. Beviset i det generelle tilfellet er akkurat det samme, men notasjonsmessig blir det litt mer uoversiktlig.

Dersom det ikke finnes noen x slik at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergerer, er vi i tilfelle (i), og dersom det ikke finnes noen $x \neq 0$ slik at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer, er vi i tilfelle (ii). Vi må derfor vise at dersom rekken konvergerer for en x -verdi $x_1 \neq 0$, og divergerer for en annen x -verdi x_2 , så er vi i tilfelle (iii).

Lemmaet forteller oss at rekken konvergerer for alle $0 \leq x < |x_1|$, og divergerer for alle $x > |x_2|$. Mengden

$$A = \left\{ x \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergerer} \right\}$$

er derfor ikke-tom og oppad begrenset. Lar vi r være den minste øvre skranken, ser vi at $|x_1| \leq r \leq |x_2|$. Det gjenstår å vise at r oppfyller betingelsene i (iii).

Anta først at $|x| < r$. Da finnes det en $b \in A$ slik at $|x| < b$. Ifølge lemmaet konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolutt.

Anta så at $|x| > r$. For å vise at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergerer, antar vi for motsigelse at den konvergerer. Velg y slik at $r < y < |x|$. Ifølge lemmaet konvergerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, men det er umulig siden r er en øvre skranke for A . ■

Vi kan nå begynne å høste fruktene av vårt arbeid i dette kapitlet og det forrige.

12.6.8 Lemma

Anta at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ har konvergenradius r . Da er funksjonen

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

kontinuerlig i intervallet $(a-r, a+r)$. Dersom potensrekken konvergerer for alle x , er s kontinuerlig for alle x .

Bevis: Anta at $d \in (a-r, a+r)$. Fra lemma 12.6.7 vet vi at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konvergerer uniformt på et intervall som inneholder d . Siden hver endelig sum $\sum_{n=0}^N a_n(x-a)^n$ er kontinuerlig, må grensen $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ også være

kontinuerlig på dette intervallet ifølge teorem 11.3.8. Spesielt er s kontinuerlig i d . Argumentet fungerer også dersom rekken konvergerer for alle x . ■

Setningen ovenfor forteller oss hva som skjer i det indre av konvergensintervallet, men ikke hva som skjer i endepunktene – dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konvergerer i et av endepunktene $a-r$ eller $a+r$, kan det fortsatt tenkes at $s(x)$ er diskontinuerlig i dette punktet. Abel beviste i 1826 at dette ikke skjer – en potensrekke er alltid kontinuerlig i hele sitt konvergensintervall.

12.6.9 Abels teorem Summen $s(x)$ til en potensrekke $\sum a_n(x-a)^n$ er kontinuerlig i hele konvergensområdet. Hvis rekken konvergerer i det høyre endepunktet $a+r$, er således

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = s(a+r) = \lim_{x \rightarrow a+r^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow a+r^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

og hvis rekken konvergerer i det venstre endepunktet $a-r$, er

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n = s(a-r) = \lim_{x \rightarrow a-r^+} s(x) = \lim_{x \rightarrow a-r^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

Beviset for Abels teorem er vanskeligere enn de fleste bevisene i denne boken. Selv om du ikke forstår hele beviset, er det likevel viktig at du forstår hva teoremet sier.

*Bevis for Abels teorem

Abels bevis bygger på en enkel summasjonsformel med forbausende slagkraft. Formelen er en variant av delvis integrasjon, men gjelder for summer istedenfor integraler.

12.6.10 Abels summasjonsformel Anta at $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ er to følger, og la $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ være delsummene til $\{a_n\}$. Da er

$$\sum_{n=0}^N a_n b_n = s_N b_N + \sum_{n=0}^{N-1} s_n (b_n - b_{n+1}).$$

Hvis rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer og $b_n \rightarrow 0$, så er

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (b_n - b_{n+1}).$$

Bevis: Observer at

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

for $n \geq 1$, og at denne formelen også gjelder for $n = 0$ dersom vi definerer $s_{-1} = 0$. Dermed er

$$\sum_{n=0}^N a_n b_n = \sum_{n=0}^N (s_n - s_{n-1}) b_n = \sum_{n=0}^N s_n b_n - \sum_{n=0}^N s_{n-1} b_n.$$

Skifter vi summasjonsindeks i det siste summetegnet, ser vi at $\sum_{n=0}^N s_{n-1} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} s_n b_{n+1}$ (husk at $s_{-1} = 0$). Altså er

$$\sum_{n=0}^N a_n b_n = \sum_{n=0}^N s_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} s_n b_{n+1} = s_N b_N + \sum_{n=0}^{N-1} s_n (b_n - b_{n+1})$$

som viser den første delen av setningen. Den andre delen får vi ved å la $N \rightarrow \infty$. ■

Bevis for Abels teorem. Fra setning 12.6.8 vet vi at potensrekken er kontinuert i alle indre punkter, så vi kan nøye oss med å se på endepunktene. Vi skal anta at $a = 0$, og konsentrerer oss om det høyre endepunktet. Vi antar altså at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ er konvergent med sum s , og skal vise at $s = \lim_{x \rightarrow r^-} s(x)$, der $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Setter vi $y = x/r$, kan vi skrive $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n y^n$. Bruker vi Abels summasjonsformel på denne rekken, får vi

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (y^n - y^{n+1}) = (1 - y) \sum_{n=0}^{\infty} s_n y^n$$

der $s_n = \sum_{k=0}^n a_k r^k$. Siden $y = x/r$, er det nok å vise at dette uttrykket nærmer seg s når $y \rightarrow 1^-$.

Summeformelen for en geometrisk rekke forteller oss at

$$s = (1 - y) \sum_{n=0}^{\infty} s y^n$$

og følgelig er

$$|s(x) - s| = (1 - y) \left| \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) y^n \right|.$$

Vi må vise at denne størrelsen går mot null når $y \rightarrow 1^-$. På grunn av faktoren $(1 - y)$ kan dette se opplagt ut, men vi må huske på at den andre faktoren $|\sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) y^n|$ inneholder en uendelig sum, og at den derfor kan gå mot uendelig når y går mot 1. Vi må altså være litt forsiktige; gitt en $\epsilon > 0$, må vi vise at vi kan få $(1 - y) |\sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) y^n|$ mindre enn ϵ ved å velge y tilstrekkelig nær 1. Vi velger først N så stor at $|s_n - s| < \epsilon/2$ når $n \geq N$. Da er

$$(1 - y) \left| \sum_{n=N}^{\infty} (s_n - s) y^n \right| < (1 - y) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\epsilon}{2} y^n \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Deretter velger vi δ så liten at $(1 - y) |\sum_{n=0}^{N-1} (s_n - s) y^n|$ er mindre enn $\epsilon/2$ når $y > 1 - \delta$ (dette er mulig siden vi nå har en endelig sum som må være begrenset). For

$1 > y > 1 - \delta$ er dermed

$$\begin{aligned} |s(x) - s| &= (1 - y) \left| \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s)y^n \right| \\ &\leq (1 - y) \left| \sum_{n=0}^{N-1} (s_n - s)y^n \right| + (1 - y) \left| \sum_{n=N}^{\infty} (s_n - s)y^n \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Teoremet er bevist. ■

Du synes kanskje at dette beviset var mye strev for to stakkarslige endepunktens skyld, men som vi skal se i resten av dette kapitlet, er endepunktene viktige.

Bemerkning

Abels teorem forteller oss at dersom summen $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ eksisterer, så er $\lim_{x \rightarrow r^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow r^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$. Det er naturlig å stille det omvendte spørsmålet: Dersom $\lim_{x \rightarrow r^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow r^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$ eksisterer, må da $\sum a_n r^n$ konvergere mot s ? Svaret er nei! Et eksempel får du ved å se på den geometriske rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Siden $s(x) = 1/(1+x)$, er $\lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = 1/2$, men grenserekken $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergerer likevel.

Selv om den direkte omvendingen av Abels teorem er gal, finnes det modifiserte omvendinger som ikke bare er riktige, men også svært viktige. De kalles *Tauber-teoremer* etter den østerrikske matematikeren Alfred Tauber (1866–1942). Du finner et eksempel i oppgave 8.

Oppgaver i seksjon 12.6

1. Finn konvergensintervallet til potensrekken:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n(2x-1)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

$$\text{e) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1/4)^n (x-1)^n}{n(n-1)}$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot x^n$$

$$\text{g) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$\text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} 7^{\sqrt{n}} (2x)^n$$

2. Finn konvergensintervallet til potensrekken:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n(x+3)^n}{4^n(n+2)}$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \cosh n \cdot (x-4)^n$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \sin n \cdot x^n$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!} \frac{x^n}{2^n}$$

$$\text{e) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$$

$$\text{f) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+2n} \right)^n$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n + \ln n}$$

$$\text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} n \left[\ln \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right]^n x^n$$

3. Vis at $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ er en kontinuertlig funksjon på intervallet $[-1, 1]$.

4. Vis at $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n} \cdot 2^n}$ er en kontinuertlig funksjon på intervallet $[-1, 3)$.

5. (UiO) Finn konvergensområde og sum for rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n.$$

Er summen en kontinuerlig funksjon?

6. (UiO) Gitt en følge $\{a_n\}$ med $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = \sin a_n$

- Vis at følgen konvergerer og finn grenseverdien.
- Vis at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer for $|x| < 1$.
- Vis at rekken konvergerer for $x = -1$ og divergerer for $x = 1$. (Vink: Bruk ulikheten $\sin \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}$).

7. (UiO) La $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en følge av positive tall

- Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer hvis og bare hvis $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ konvergerer.
- For hvilke p konvergerer rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 + \ln \left(1 + \frac{1}{n^p} \right) \right] ?$$

- Hva er konvergensintervallet til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^n ?$$

8. Målet i denne oppgaven er å vise:

Taubers teorem: Anta at $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ for $x \in (-1, 1)$, at $\lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = s \in \mathbb{R}$, og at $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. Da er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

- Vis at $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N |n a_n| = 0$.

- La $s_N = \sum_{n=0}^N a_n$. Vis at

$$s(x) - s_N = - \sum_{n=0}^N a_n (1 - x^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n.$$

- Vis at $1 - x^n \leq n(1 - x)$.

- Velg N slik at $N \leq \frac{1}{1-x} < N+1$. Vis at

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n (1 - x^n) \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^N |n a_n| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N |n a_n| \rightarrow 0.$$

e) Vis at

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |na_n| \frac{x^n}{n} = \frac{y_N}{N} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

der $y_N \rightarrow 0$. Vis at $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \rightarrow 0$.

f) Vis Taubers teorem.

12.7 Regning med potensrekker

I denne seksjonen skal du lære å regne med potensrekker – vi skal se hvordan de kan integreres, deriveres og multipliseres.

Integrasjon og derivasjon

Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ er en potensrekke med konvergensradius $r > 0$. La f være summen, altså

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

Vi ønsker nå å finne et uttrykk for den deriverte og den integrerte funksjonen til f . Dersom vi deriverer og integrerer den uendelige rekken ledd for ledd slik vi ville ha gjort med en endelig sum, får vi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} (x-a)^n$$

og

$$\int_a^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x-a)^n.$$

Men det er ingen umiddelbar grunn til å tro at dette er riktig – vi har aldri bevist at vi kan integrere og derivere en uendelig rekke ledd for ledd, og fra forrige kapittel vet vi at integrasjon og (særlig) derivasjon av funksjonsfølger er vanskelige saker (husk også den kontinuerlige, ingensteds deriverbare funksjonen i seksjon 12.5).

Vi skal nå vise at formlene ovenfor allikevel er riktige. Nøkkelen er å kombinere resultatene fra forrige seksjon med setningene 11.4.1 og 11.4.3 (det kan være lurt å repetere hva de sier, før du leser videre).

12.7.1 Setning

Anta at potensrekken $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ har konvergensradius $r > 0$. Da er konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x-a)^n$ for alle x i intervallet $(a-r, a+r)$,

og

$$\int_a^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x-a)^n$$

Bevis: For å forenkle notasjonen antar vi at $a = 0$. Følgen $f_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n$ av delsummer konvergerer uniformt på intervallet mellom 0 og x ifølge lemma 12.6.7. Ifølge teorem 11.4.1 konvergerer da den integrerte følgen

$$\int_0^x f_N(t) dt = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

mot integralet $\int_0^x f(t) dt$ av grensefunksjonen. Men dette betyr at

$$\int_0^x f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^x f_N(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

og setningen er bevist. ■

Før vi beviser den tilsvarende setningen for derivasjon, trenger vi en hjelpesetning.

12.7.2 Lemma

Anta at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ har konvergensradius $r > 0$. Da konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ for alle x i $(a-r, a+r)$.

Bevis: Som vanlig skriver vi bare opp beviset for $a = 0$. Anta at $|x| < r$, og velg en y slik at $|x| < y < r$. Vi har

$$|n a_n x^{n-1}| = \left| \frac{n}{y} \left(\frac{x}{y} \right)^{n-1} \right| |a_n y^n|.$$

Siden $y > |x|$, går uttrykket $\left| (n/y)(x/y)^{n-1} \right|$ mot null når n vokser (hvorfor?), og følgelig er det begrenset av en konstant K . Dermed er

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n x^{n-1}| \leq K \sum_{n=1}^{\infty} |a_n y^n|.$$

Siden $\sum a_n y^n$ konvergerer absolutt ifølge lemma 12.6.7, konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. ■

12.7.3 Setning

Anta at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ er en potensrekke med konvergensradius r . Da er f deriverbar for alle x i $(a-r, a+r)$, og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n.$$

Bevis: Vi skriver bare ut beviset for $a = 0$. Gitt et punkt $d \in (-r, r)$, må vi vise at $f'(d) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n d^{n-1}$. Velg en c slik at $|d| < c < r$. Planen er å bruke teorem 11.4.3, men da trenger vi å vite at den deriverte rekken $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ konvergerer uniformt på $[-c, c]$, og at potensrekken $\sum a_n x^n$ konvergerer i minst ett punkt i

dette intervallet. Det siste er opplagt sant, så vi konsentrerer oss om den første betingelsen. Fra lemmaet vet vi at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ konvergerer i $(-r, r)$, og ifølge setning 12.6.7 konvergerer den da uniformt på $[-c, c]$. Fra teorem 11.4.3 får vi at $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ konvergerer mot den deriverte av $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Med andre ord er

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

for alle x i $[-c, c]$. Spesielt er $f'(d) = \sum na_n d^{n-1}$ for vårt punkt d . Setningen er bevist. ■

Bemerkning

Det følger fra setningene ovenfor at når man deriverer eller integrerer en potensrekke, vil den nye rekken ha samme konvergensradius som den gamle (kan du vise det?). Det kan imidlertid skje ting i endepunktene – vi mister ofte konvergens i et endepunkt når vi deriverer, og vi vinner ofte konvergens når vi integrerer. Du vil se eksempler på dette nedenfor.

La oss se litt på hva integrasjon og derivasjon av potensrekker er godt for.

12.7.4 Eksempel

For alle x i intervallet $(-1, 1)$ er $\frac{1}{1+x}$ summen av den geometriske rekken $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$. Altså er

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Integrerer vi på begge sider får vi

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

som altså må gjelde for alle x i $(-1, 1)$ ifølge setning 12.7.1. Legg imidlertid merke til at nye rekken også konvergerer for $x = 1$ (bruk test for alternerende rekker). Setter vi inn $x = 1$ på på begge sider av likhetstegnet, får vi

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Dette er utvilsomt en slående formel, men er den riktig? Setning 12.7.1, som vi har støttet oss på hittil, sier ingen ting om likhet i endepunktene. Vi blir reddet av Abels teorem (12.6.9); siden både potensrekken og logaritmefunksjonen er kontinuerlige, må den likheten som gjelder inni konvergensintervallet, også gjelde i endepunktet.

La oss også forsøke å derivere den opprinnelige potensrekken. Vi får

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n$$

som også kan skrives

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n.$$

■

Vi tar for oss en annen variant av samme tema.

12.7.5 Eksempel

For $|x| < 1$ er $\frac{1}{1+x^2}$ summen til den geometriske rekken

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Integrerer vi på begge sider av likheten

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

får vi

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

for alle $x \in (-1, 1)$. Vi legger merke til at den nye potensrekken også konvergerer for $x = 1$. Ifølge Abels teorem gjelder da likheten også for $x = 1$, og setter vi inn i ligningen, får vi

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

(husk at $\arctan 1 = \pi/4$). Dette er en av de mest berømte formlene i matematikk-historien, og den kalles vekselvis *Gregorys formel* etter skotten James Gregory (1637–1675) og *Leibniz' formel* etter vår gamle venn Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Formelen finnes imidlertid hos den indiske matematikeren Nilakantha (ca. 1445–ca. 1545), og var sannsynligvis kjent allerede av Madhava (ca. 1340–ca. 1425).

■

Eksempelene ovenfor viser hvordan vi kan bruke integrasjon og derivasjon til å skaffe nye potensrekker fra gamle. Også ved å multiplisere to rekker kan vi komme frem til nye sammenhenger.

Multiplikasjon av rekker

Det er ingen sak å legge sammen to potensrekker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$. Svaret blir $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n$, og denne nye rekken konvergerer i hvert fall der hvor begge de opprinnelige rekkene konvergerer (konvergensområdet kan være større). Å multiplisere potensrekker er vanskeligere, men vi skal nå se hvordan det gjøres.

For enkelhets skyld starter vi med to potensrekker på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

og

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \dots$$

La oss forsøke å multiplisere sammen disse rekkene som om de skulle være polynomer. Først ganger vi a_0 med alle leddene i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, så ganger vi $a_1 x$ med alle leddene i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, og så videre. Vi får

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + a_0 b_3 x^3 + a_0 b_4 x^4 + \dots \\ & + a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + a_1 b_3 x^4 + a_1 b_4 x^5 + \dots \\ & + a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + a_2 b_2 x^4 + a_2 b_3 x^5 + a_2 b_4 x^6 + \dots \\ & + a_3 b_0 x^3 + a_3 b_1 x^4 + a_3 b_2 x^5 + a_3 b_3 x^6 + a_3 b_4 x^7 + \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

Samler vi sammen ledd med samme potens av x , får vi

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 \\ & + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x \\ & + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\ & + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 \\ & \dots \\ & + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) x^n \\ & \dots \end{aligned}$$

Vi har altså kommet frem til en ny potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ med koeffisienter

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}.$$

I utregningene ovenfor har vi imidlertid regnet som om alle summer var endelige, vi har byttet om på leddene som vi ønsket, og vi har ikke tatt hensyn til konvergens og divergens. Det er derfor slett ikke opplagt at svaret er riktig, men det er det:

12.7.6 Setning

Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ er to potensrekker, og la r være den minste av de to konvergensradiene. La $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ være produktrekken definert ved

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 = \sum_{i=0}^n a_ib_{n-i}.$$

Da konvergerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ for alle $x \in (a-r, a+r)$, og i dette intervallet er

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \right).$$

Før vi ser på beviset, tar vi med et enkelt eksempel.

12.7.7 Eksempel

Skriv $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)^2$ som en rekke.

I dette tilfellet er

$$\begin{aligned} c_n &= a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \cdots + 1 \cdot 1 \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

og dermed får vi

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Legg forøvrig merke til at siden $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, så sier dette resultatet at

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Denne formelen kan du også vise ved å derivere begge sider i ligningen $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. ■

Hittil har vi sett på produkter av potensrekker, men før vi går løs på beviset for setning 12.7.6, lønner det seg å se på produkter av ordinære rekker. Gitt to rekker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, danner vi en ny rekke $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0.$$

Vi kaller den nye rekken *Cauchy-produktet* av $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Resultatet vi skal vise, sier at dersom de to opprinnelige rekkene konvergerer absolutt, så konvergerer også Cauchy-produktet, og

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Siden potensrekker konvergerer absolutt i det indre av konvergensintervallet, vil dette resultatet medføre setning 12.7.6.

La oss først vise resultatet for positive følger.

12.7.8 Lemma

Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er to positive og konvergente rekker. Da konvergerer også Cauchy-produktet $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, og

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Bevis: La $[N/2]$ betegne *heltallsdelen* til N – det største hele tallet mindre enn eller lik $N/2$. For enhver $N \in \mathbb{N}$ er da

$$\left(\sum_{n=0}^{[N/2]} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{[N/2]} b_n \right) \leq \sum_{n=0}^N c_n \leq \left(\sum_{n=0}^N a_n \right) \left(\sum_{n=0}^N b_n \right)$$

fordi summen i midten inneholder alle de leddene vi får om vi multipliserer ut produktet til venstre, men bare noen av de leddene vi får om vi multipliserer ut produktet til høyre. Siden både venstresiden og høyresiden går mot $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$ når N går mot uendelig, må også uttrykket i midten gå mot $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$. ■

12.7.9 Setning

Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er to absolutt konvergente rekker. Da konvergerer også Cauchy-produktet $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, og

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Bevis: La $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Gitt $\varepsilon > 0$, må finne en M slik at

$$\left| AB - \sum_{n=0}^N c_n \right| < \varepsilon$$

for alle $N \geq M$. Skriver vi

$$\left| AB - \sum_{n=0}^N c_n \right| \leq \left| AB - \left(\sum_{n=0}^N a_n \right) \left(\sum_{n=0}^N b_n \right) \right| + \left| \left(\sum_{n=0}^N a_n \right) \left(\sum_{n=0}^N b_n \right) - \sum_{n=0}^N c_n \right|,$$

ser vi at det er nok å vise at vi kan få både $|AB - (\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N b_n)|$ og $|(\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N b_n) - \sum_{n=0}^N c_n|$ mindre enn $\varepsilon/2$ ved å velge N stor nok. Siden det ikke er noe problem å få $|AB - (\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N b_n)|$ mindre enn $\varepsilon/2$ (hvorfor?), kan vi konsentrere oss om $|(\sum_{n=0}^N a_n)(\sum_{n=0}^N b_n) - \sum_{n=0}^N c_n|$.

La $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ være Cauchy-produktet av rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ og $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ av absoluttverdier, og observer at

$$\left| \left(\sum_{n=0}^N a_n \right) \left(\sum_{n=0}^N b_n \right) - \sum_{n=0}^N c_n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^N |a_n| \right) \left(\sum_{n=0}^N |b_n| \right) - \sum_{n=0}^N d_n$$

(multipliserer du ut og forkorter, ser du at bortsett fra tallverdigene inneholder begge uttrykkene de samme leddene). Ifølge beviset for lemmaet kan vi få det siste uttrykket så lite vi måtte ønske ved å velge N stor nok, og følgelig kan vi også få

$$\left| \left(\sum_{n=0}^N a_n \right) \left(\sum_{n=0}^N b_n \right) - \sum_{n=0}^N c_n \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setningen er bevist. ■

Bemerkning

Antagelsen om at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergerer *absolutt* er viktig – det finnes eksempler på betinget konvergente rekker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ der Cauchy-produktet divergerer (se oppgave 9). Abel viste imidlertid i 1826 at dersom både rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ og Cauchy-produktet $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergerer, så holder alltid likheten $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$. I 1875 viste Mertens at setning 12.7.9 holder selv om vi bare krever absolutt konvergens av den ene rekken (se Stromberg [20]).

Produkter av rekker dukker opp mange steder i matematikken. I denne boken skal vi først og fremst få bruk for produkter av potensrekker i forbindelse med genererende funksjoner i seksjon 12.11 og *12.12. Som vi allerede har sett, følger produktsetningen 12.7.6 for potensrekker direkte fra setning 12.7.9.

Oppgaver i seksjon 12.7

1. Finn $f'(x)$ og $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ uttrykt som rekker:

a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n, \quad a = 0$

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad a = 0$

c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+2)^n}{n(n+1)}, \quad a = -2$

$$d) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x-4)^n}{n!}, \quad a = 4$$

$$2. \quad a) \text{ Forklar hvorfor } \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \text{ for } |x| < 1.$$

$$b) \text{ Vis at } \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ for } |x| < 1.$$

$$c) \text{ Vis at } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}} = \ln 3.$$

$$3. \quad a) \text{ Forklar hvorfor } \frac{x^2}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+2} \text{ når } |x| < 1.$$

$$b) \text{ Vis at } \ln(1-x^3) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} \text{ når } |x| < 1.$$

$$c) \text{ Vis at } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{n} = \ln 2, \text{ og sammenlign resultatet med eksempel 12.7.4.}$$

4. Vis at dersom du integrerer eller deriverer en potensrekke, så vil den nye rekken ha samme konvergensradius som den gamle.

5. Vis ved induksjon på m at

$$\frac{1}{(1+x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n-1}{n} x^n$$

for $|x| < 1$ og $m \in \mathbb{N}$.

6. a) Anta at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ der potensrekken konvergerer for $|x| < 1$. Vis at

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \quad |x| < 1,$$

der $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

b) Bruk a) til å skrive $\frac{1}{(1-x)^2}$ og $\frac{1}{(1-x)^3}$ som summen av potensrekker.

c) La $m \in \mathbb{N}$. Vis at $\sum_{k=0}^n \binom{m+k-1}{k} = \binom{m+n}{n}$. Tolk denne formelen som et utsagn om elementene i Pascals trekant.

d) Vis at $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} x^n$ for $|x| < 1$.

7. I denne oppgaven skal vi se på en måte å definere eksponentialfunksjonen e^x på. Du har derfor ikke lov å bruke det du vet om denne funksjonen fra før.

- a) Vis at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergerer for alle x .
- b) Definer $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ for alle x . Vis at $E'(x) = E(x)$.
- c) Vis at $E(x) \cdot E(y) = E(x+y)$.
- d) La $e = E(1)$. Vis at $E(n) = e^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- e) Vis at $E(1/m) = \sqrt[m]{e}$ for alle $m \in \mathbb{N}$.
- f) Vis at $E(p/q) = e^{p/q}$ for alle rasjonale tall p/q .

8. I denne oppgaven skal vi se på en måte å innføre funksjonene sinus og cosinus på. Du har derfor ikke lov å bruke det du vet om disse funksjonene fra før.

- a) Vis at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ og $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konvergerer for alle x .
- b) Definer $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ og $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Vis at $C'(x) = -S(x)$ og $S'(x) = C(x)$.

c) Vis at

$$2 \cdot \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} x^{n-2k} y^{2k} = (x+y)^n + (x-y)^n$$

og

$$2 \cdot \sum_{0 \leq k < n/2} \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1} = (x+y)^n - (x-y)^n.$$

- d) Vis at $2C(x)C(y) = C(x+y) + C(x-y)$ og $2S(x)S(y) = C(x-y) - C(x+y)$.
- e) Vis at $C(x)^2 + S(x)^2 = 1$ for alle x .
- f) Vis at $C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$ for alle x, y .
- g) Vis at $S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$ for alle x, y .
9. a) Vis at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ er betinget konvergent.

b) La både $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være lik rekken i a), og la $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ være Cauchy-produktet. Vis at

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}.$$

- c) Vis at den største verdien til $f(x) = (x+1)(n-x+1)$ er $(\frac{n}{2} + 1)^2$, og bruk dette til å vise at

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{\frac{n}{2} + 1}$$

for alle k .

- d) Vis at c_n ikke går mot null og konkluder med at $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergerer.

12.8 Taylor-rekker

I denne seksjonen skal vi koble vår teori for potensrekker med Taylor-polynomene fra kapittel 11. Dette gir oss en ny metode til å konstruere potensrekker.

Dersom $f^{(k)}(a)$ eksisterer for alle $k \in \mathbb{N}$, sier vi at f er *uendelig mange ganger deriverbar* i punktet a . I så fall kan vi danne Taylor-polynomet

$$\begin{aligned} T_n(f) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

for alle n . Lar vi n gå mot uendelig, får vi *Taylor-rekken*

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Dette er en potensrekke av den typen vi har studert i de to foregående seksjonene.

12.8.1 Eksempel

Finn Taylor-rekken til $f(x) = e^x$ i punktet 0.

Siden $f^{(k)}(x) = e^x$ for alle k , blir $f^{(k)}(0) = 1$. Dermed blir rekken

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k.$$



Dersom Taylor-rekken konvergerer i et intervall $(a-r, a+r)$ om punktet a , er det naturlig å tro at i dette intervallet er $Tf(x) = f(x)$, men det er ikke alltid tilfellet. Et eksempel er funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Her viser det seg at $f^{(k)}(0) = 0$ for alle k (se oppgave 7), så Taylor-polynomet blir

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!}x^k = 0.$$

Funksjonen f selv er imidlertid bare 0 når x er lik 0. Vi har altså følgende advarsel.

Advarsel

Selv om Taylor-rekken Tf til f konvergerer i et intervall I , er ikke nødvendigvis $f(x) = Tf(x)$ for alle $x \in I$.

For de aller fleste funksjoner vi skal komme borti i denne boken, er imidlertid Taylor-rekken lik funksjonen i hele konvergensområdet. La oss vise noen eksempler.

12.8.2 Setning

- (i) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ for alle x .
- (ii) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ for alle x .
- (iii) $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ for alle x .

Bevis: Ideen er den samme i alle tilfellene, og vi viser bare (ii). Fra eksempel 11.1.4 vet vi at Taylor-polynomene til $\sin x$ er

$$T_{2n} \sin(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Siden

$$\sin x = T_{2n} \sin(x) + R_{2n} \sin(x)$$

er det nok å vise at $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n}(x) = 0$. Fra korollar 11.2.2 vet vi at

$$|R_{2n} \sin(x)| \leq \frac{M}{(2n+1)!} |x|^{2n+1}$$

der M er en øvre skranke for $|f^{(2n+1)}|$. Siden alle de deriverte til $\sin x$ er enten $\pm \sin x$ eller $\pm \cos x$, så er $M = 1$ en øvre skranke. Altså er

$$|R_{2n} \sin(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)!} |x|^{2n+1}$$

som opplagt går mot null når n går mot uendelig. ■

Ved hjelp av Taylor-rekker kan vi skrive funksjoner som potensrekker. Tidligere har vi sett på andre metoder for å skrive funksjoner som potensrekker – i eksempel 12.7.5 viste vi for eksempel at

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

ved å integrere en geometrisk rekke ledd for ledd. Hva er sammenhengen mellom en slik potensrekke og Taylor-rekken til \arctan ? Det neste resultatet viser at sammenhengen er svært nær – potensrekken må faktisk være Taylor-rekken!

12.8.3 Setning

Anta at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konvergerer i et intervall $(a-r, a+r)$ der $r > 0$, og la $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ være summen. Da er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ Taylor-rekken til f , det vil si at $a_n = f^{(n)}(a)/n!$ for alle $n \geq 0$.

Bevis: Setter vi $x = a$ i likheten $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, ser vi at $f(a) = a_0 + a_1(a-a) + a_2(a-a)^2 + \dots = a_0$. Dette viser likheten $a_n = f^{(n)}(a)/n!$ for $n = 0$. For å vise den for $n = 1$, deriverer vi først på begge sider i uttrykket $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Vi får

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-a) + \dots$$

der rekken fortsatt konvergerer i intervallet $(a-r, a+r)$. Setter vi $x = a$ i denne ligningen, får vi $f'(a) = a_1$ som gir oss likheten for $n = 1$. Deriverer vi enda en gang, ser vi at

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + \dots$$

Setter vi inn $x = a$, ser vi at $f''(a) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$. Dette gir $a_2 = f''(a)/2$, akkurat som vi ønsker oss.

Fortsetter vi å derivere på denne måten, får vi

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k} \\ &= k! \cdot a_k + (k+1)! \cdot a_{k+1}(x-a) + \dots \end{aligned}$$

Setter vi inn $x = a$, får vi $f^{(k)}(a) = k!a_k$. Altså er

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

som viser formelen generelt. ■

Setningen forteller oss at når vi skal finne en Taylor-rekke, er alle triks tillatt. Klarer vi bare å vise at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ i en omegn om a , så er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ Taylor-rekken til f uansett hvilken metode vi har brukt. For eksempel viser regningene i eksempel 12.7.5 at

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

gir oss Taylor-rekken til arcustangens.

Det neste eksemplet viser et annet knep som ofte er nyttig.

12.8.4 Eksempel

Finn Taylor-rekken til e^{-x^2} .

Vi kan finne denne Taylor-rekken gjennom derivasjon, men det er vanskelig og tidkrevende fordi de deriverte blir ganske kompliserte etter hvert. Her er en enklere metode.

Vi vet at

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

for alle x . Gitt et tall y , gjelder formelen spesielt for $x = -y^2$. Altså er

$$e^{-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{n!}$$

for alle y . Men navnet på variabelen spiller ingen rolle, så vi kan like godt skrive

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

for alle x . Dermed har vi skrevet e^{-x^2} som en uendelig potensrekke, og ifølge setningen ovenfor, er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ Taylor-rekken til e^{-x^2} . ■

Ved hjelp av de teknikkene og eksemplene vi nå har til rådighet, kan vi finne Taylor-rekken til mange funksjoner. Vi kan også gå den andre veien – gitt en potensrekke, kan vi finne summen. De neste eksemplene viser noen typiske teknikker.

12.8.5 Eksempel

Finn summen til potensrekken $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$.

Vi ser at rekken konvergerer på intervallet $[-1, 1)$, så summen

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

er veldefinert for alle $x \in [-1, 1)$. Observer at summen ligner ganske mye på den geometriske rekken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ – den eneste forskjellen er nevneren n . Deriverer vi rekken, blir denne nevneren borte, og vi får

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

for $x \in (-1, 1)$ (vi mister konvergensens i venstre endepunkt når vi deriverer). Nå er høyresiden virkelig en geometrisk rekke, og summerer vi den, ser vi at

$$s'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Men dette betyr at

$$s(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln|1-x| + C$$

for en passende integrasjonskonstant C . For å finne ut hva C er, observerer vi at om vi setter $x = 0$ i rekken, så får vi

$$s(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0.$$

Altså må vi velge C slik at $-\ln|1-x| + C$ blir null når vi setter inn $x = 0$. Siden $\ln 1 = 0$, må vi velge $C = 0$. Altså er

$$s(x) = -\ln|1-x|.$$

Regningene ovenfor gjelder for $x \in (-1, 1)$, men rekken konvergerer også for $x = -1$. Siden både funksjonen $-\ln|1-x|$ og rekken $s(x)$ er kontinuerlige i punktet $x = -1$ (husk Abels teorem), gjelder likheten også i endepunktet. Dermed har vi vist at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x|$$

for $x \in [-1, 1)$. ■

I det neste eksemplet må vi integrere istedenfor å derivere.

12.8.6 Eksempel

Finn summen til potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

Vi ser at rekken konvergerer på intervallet $(-1, 1)$. La oss sette

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

for $x \in (-1, 1)$. Også denne gang ligner rekken på en geometrisk rekke, men derivasjon gjør bare saken verre. Vi integrerer isteden:

$$\int_0^x s(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x},$$

der vi igjen har brukt formelen for summen til en geometrisk rekke. Deriverer vi dette uttrykket, får vi

$$s(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Altså er

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{for } x \in (-1, 1). \quad \text{■}$$

Det neste eksemplet viser et knep som ofte er nyttig.

12.8.7 Eksempel

Finn summen til potensrekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1}$.

Vi ser at rekken konvergerer for $x \in (-1, 1)$. I dette intervallet eksisterer altså summen

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1}.$$

Det er fristende å derivere for å bli kvitt faktoren i nevneren, men det leder bare til $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1}/(2n-1)$ som ikke ser det spor bedre ut. Knepet er å dividere med x før vi deriverer: Siden $s(x)/x = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}/(2n-1)$, får vi

$$\left(\frac{s(x)}{x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2},$$

der vi nok en gang har summert en geometrisk rekke. Integrerer vi på begge sider, får vi

$$\frac{s(x)}{x} = \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$$

for en integrasjonskonstant C . For å bestemme C observerer vi at siden $s(x)/x = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}/(2n-1)$, så går $s(x)/x$ mot 0 når x går mot 0. Altså må

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$$

gå mot 0 når x går mot 0, og det betyr at $C = 0$. Dermed er

$$\frac{s(x)}{x} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

som gir

$$s(x) = \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

for alle $x \in (-1, 1)$. ■

Teknikken ovenfor kan også brukes til å summere tallrekker, men da må vi først gjenkjenne tallrekken som et spesialtilfelle av en potensrekke. Vi tar med et eksempel:

12.8.8 Eksempel

Finn $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)2^n}$.

Dette er summen vi får om vi setter $x = 1/2$ i potensrekken $\sum_{n=2}^{\infty} x^n/[n(n-1)]$. Kan vi summere potensrekken, kan vi også finne summen av $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(n-1)2^n]$.

Siden potensrekken konvergerer for $x \in [-1, 1]$, gir summen

$$s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

mening i dette intervallet. Deriverer vi, får vi

$$s'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

og deriverer vi en gang til, får vi

$$s''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \frac{1}{1-x}.$$

Integrasjon gir nå

$$s'(x) = -\ln|1-x| + C$$

hvor C må være null siden $s'(0) = \sum_{n=2}^{\infty} 0^{n-1}/n = 0$. Integrerer vi en gang til, får vi

$$s(x) = -\int \ln|1-x| dx.$$

Dette integralet kan vi løse ved delvis integrasjon; vi setter $u = \ln|1-x|$, $v' = 1$, og får $u' = \frac{1}{x-1}$ og $v = x-1$ (et lurene valg enn $v = x$). Dermed er

$$\begin{aligned} \int \ln|1-x| dx &= (x-1) \ln|1-x| - \int 1 dx \\ &= (x-1) \ln|x-1| - x + C. \end{aligned}$$

Altså er

$$s(x) = -(x-1) \ln|x-1| + x + C$$

for en integrasjonskonstant C . For å bestemme C , observerer vi at

$$s(0) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0^n}{n(n-1)} = 0.$$

Det medfører at $C = 0$. Altså er

$$s(x) = (1-x) \ln|x-1| + x.$$

Vi er interessert i $s(1/2)$. Ved innsetning får vi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)2^n} = s(1/2) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \ln\left|\frac{1}{2} - 1\right| + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2).$$



Bemerkning

Strategien i dette eksemplet kan virke merkelig. Vi finner summen av rekken $\sum \frac{x^n}{n(n-1)}$ for den ene verdien $x = 1/2$ ved først å finne summen for alle $x \in (-1, 1)$. Er ikke dette å gjøre et lett problem vanskeligere? Nei! Riktignok er det å gjøre et spesielt problem mer generelt, men det er ingen ting som sier at spesielle problemer alltid er lettere enn generelle. I matematikk er det ofte omvendt fordi det er enklere å få øye på problemets struktur – hva som er vesentlig og hva som er uvesentlig – i den generelle problemstillingen.

Blar du tilbake gjennom de siste seksjonene, vil du finne mange Taylor-rekker utledet på ulike måter. Flere skal det bli i de neste seksjonene. En samlet liste over de viktigste Taylor-rekkene finner du i formelsamlingen.

Oppgaver i seksjon 12.8

1. Finn Taylor-rekken til funksjonen i det angitte punktet. Finn konvergensintervallet I , og vis at rekken konvergerer mot funksjonen i I .

- $f(x) = e^x$ i punktet 1
- $f(x) = \sin x$ i punktet $\pi/4$
- $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 4$ i punktet -1
- $f(x) = 1/x$ i punktet 1
- $f(x) = \ln(x + 1)$ i punktet 0

2. Finn Taylor-rekken til funksjonen i det angitte punktet. Finn konvergensintervallet I , og vis at rekken konvergerer mot funksjonen i I .

- $f(x) = \sinh x$ i punktet 0
- $f(x) = \cosh x$ i punktet 0
- $f(x) = e^{3x}$ i punktet 0
- $f(x) = \sqrt{x}$ i punktet 1

3. Bruk Taylor-rekken til $g(x)$ om 0 til å finne Taylor-rekken til $f(x)$:

- $g(x) = \sin x$; $f(x) = \sin(x^2)$
- $g(x) = e^x$; $f(x) = e^{-x^3}$
- $g(x) = \cos x$; $f(x) = \cos(3x^2)$
- $g(x) = \ln(1 + x)$; $f(x) = \ln(1 - x^3)$
- $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $g(x) = e^x$; $f(x) = x^2 e^x$

$$g) \quad g(x) = \sin x; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{hvis } x \neq 0 \\ 1 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

4. Bruk formlene $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ og $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ til å finne Taylor-rekkene til $\sin^2 x$ og $\cos^2 x$ om punktet 0.

5. (UiO) La f være funksjonen $f(x) = (x^2 + x)e^{2x}$.

- a) Vis ved induksjon at formelen

$$f^{(n)}(x) = [2^n x^2 + 2^n(n+1)x + 2^{n-2}n(n+1)]e^{2x}$$

holder for alle $n \in \mathbb{N}$.

- b) Finn Taylor-rekken til f i 0 og undersøk for hvilke x den konvergerer.
 c) Begrunn hvorfor Taylor-rekken konvergerer mot f i konvergensintervallet. Finn summen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{4[(n-1)!]}$.

- d) Kan du finne Taylor-rekken til f på en annen måte?

6. a) (UiB) Funksjonen $f(x)$ tilfredsstiller $f'(x) = xf(x)$ og $f(0) = 1$. Vis at

$$f^{(n)}(x) = xf^{(n-1)}(x) + (n-1)f^{(n-2)}(x)$$

for alle $n \geq 2$, og bruk dette til å finne Taylor-rekken til f om 0.

- b) Løs differensiallikningen $y' = xy$ og bruk løsningen til å kontrollere svaret i a).

7. La

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

- a) Vis at dersom $x \neq 0$, så er $f^{(n)}$ på formen

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \frac{P(x)}{x^N}$$

der P er et polynom og $N \in \mathbb{N}$.

- b) Vis at $f^{(n)}(0) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
 c) Finn Taylor-rekken til f i 0 og bestem konvergensområdet.
 d) I hvilke punkter er f lik summen av Taylor-rekken?

8. a) (UiO) Finn konvergensradien for potensrekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log \sqrt{n}}$. Avgjør så om rekken konvergerer i endepunktene av konvergensintervallet.

- b) La $f(x)$ være summen av potensrekken ovenfor i konvergensintervallet. Finn den trehundreogtiende deriverte av denne funksjonen i $x = 0$. Finn deretter et N slik at $\sum_{n=2}^N \frac{x^n}{\log \sqrt{n}}$ approksimerer $f(x)$ med nøyaktighet 0.1 for $x \in [-1/2, 1/2]$.

9. a) (UiO) Finn konvergensintervallet til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n+2}\right) x^n.$$

Heretter lar vi $f(x)$ være summen av rekken i a) (for x i konvergensintervallet).

b) Hva er $f^{(20)}(0)$? La $g(x) = x f(x^2)$. Hva er $g^{(35)}(0)$?

c) Finn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x}{x^2}$.

10. (UiB) La

$$f(x) = \int_0^x t e^t dt.$$

a) Finn et uttrykk for den n -te deriverte $f^{(n)}(x)$, og bestem Taylor-rekken for $f(x)$ om 0. For hvilke x konvergerer rekken?

b) Finn et tilnærmet uttrykk for $\int_0^1 t e^t dt$ ved hjelp av tre ledd i rekken for $f(x)$, og sammenlign med integralets eksakte verdi.

11. (UiO) Definer en funksjon f ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)x^{2n} = 2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6 + \dots$$

for alle x som er slik at rekken konvergerer.

a) Finn definisjonsområdet til f .

b) Vis at funksjonen

$$h(x) = \int_0^x t f(t) dt$$

har Taylor-rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2} = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$$

c) Bruk resultatet i b) til å finne h og f .

12. a) (NTNU) Bestem konvergensintervallet til rekken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n}$.

b) Finn summen til rekken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n}$.

13. a) (UiO) For hvilke x er rekken $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ konvergent?

b) Finn summen $S(x)$ av rekken.

14. a) (UiO) Finn konvergensområdet til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n+1}.$$

- b) Finn summen $S(x)$ til rekken.

15. a) (NTNU) Finn konvergensområdet til potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}. \quad (*)$$

- b) Finn summen $S(x)$ til (*).

- c) Benytt resultatet i b) til å beregne $\arctan(1/2)$ med nøyaktighet bedre enn 0.01.

16. (UiO) Gitt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}.$$

- a) Finn konvergensområdet til denne rekken. La $f(x)$ være summen til rekken når x ligger i konvergensområdet og finn en rekkeutvikling for $f''(x)$.

- b) Vis at $f(x) = (1+x) \ln(1+x) - x$.

- c) Bruk a) og b) til å bestemme $\ln(3/2)$ med feil $< 1/250$.

17. (UiO) Avgjør for hvilke x rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$$

konvergerer. Finn så summen av rekken i konvergensintervallet.

18. a) (NTNU) Avgjør for hvilke verdier av x rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$$

konvergerer. Undersøk spesielt endepunktene i konvergensintervallet.

- b) Finn summen av rekken ved å bruke leddvis derivasjon og integrasjon.

19. a) (NTNU) Potensrekken

$$x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot n!} + \cdots$$

er gitt. Vis at rekken konvergerer for alle x .

- b) Rekkens sum betegnes med $s(x)$. Vis at

$$s(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

- c) Benytt resultatene i a) og b) til å gi en tilnærmet beregning av

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$$

med en feil $E < 5 \cdot 10^{-6}$.

20. a) (UiO) Finn konvergensområdet til rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

- b) Funksjonen f er definert ved $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. Finn $f^{(100)}(0)$.

- c) Finn $f'(-\frac{1}{2})$ med nøyaktighet bedre enn $\frac{1}{100}$.

21. a) (UiO) Finn konvergensområdet til potensrekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

- b) La

$$f(x) = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

når x ligger i konvergensområdet til rekken. Finn en rekkeutvikling for $f'(x)$, og vis at $f'(x) = x^2 e^{-x}$.

- c) Bruk b) til å finne et endelig uttrykk for $f(x)$.

22. a) (UiO) La g være funksjonen definert ved

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

Skriv $g(x)$ og $g'(x)$ som potensrekker. Hva er $g^{(999)}(0)$?

- b) Vis (f.eks. ved å bruke potensrekken) at $g(x)$ er voksende i et lite, åpent intervall som inneholder 0.

- c) Finn konvergensintervallet til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) x^n$$

23. For hvilke x konvergerer rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}?$$

Finn summen til rekken i konvergensområdet.

24. a) (NTNU) Finn konvergensintervallet for rekken

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots,$$

og vis at summen er $\frac{x}{(1-x)^2}$.

- b) Formelen

$$E = \frac{h\omega(0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}{1 + x + x^2 + \dots}$$

for gjennomsnittsennergi opptrer i fysikken med $x = e^{-h\omega/kT}$. Vis at

$$E = \frac{h\omega}{e^{h\omega/kT} - 1} \quad (\text{det antas at } h\omega/kT \text{ er positiv}).$$

25. a) (UiO) For hvilke x konvergerer potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} ? \quad (*)$$

- b) En funksjon f er definert for alle $x < 1$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x} & \text{hvis } x \neq 0 \\ -1 & \text{hvis } x = 0. \end{cases}$$

Vis at f er kontinuerlig og deriverbar. Finn $f'(0)$.

- c) La g være definert for alle $x < 1$ ved

$$g(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt.$$

Vis at på intervallet $(-1, 1)$ kan summen til rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ uttrykkes ved hjelp av $g(x)$. Hva er Taylor-rekken til g om punktet $a = 0$?

- d) Vis at g har en omvendt (invers) funksjon h , og beregn $h'(1)$ og $h''(1)$.

26. a) (UiB) Bestem verdien av det uegentlige integralet

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{16x^2 + 8x - 3}.$$

- b) Bestem de verdier av x for hvilke rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{16n^2 + 8n - 3}$$

konvergerer.

c) Bruk delbrøkoppspaltning til å finne et enkelt uttrykk for

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{16k^2 + 8k - 3},$$

og bestem summen av rekken i punkt b) for $x = 1$.

27. (UiO) La $b_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$, $n \geq 0$.

a) Regn ut $b_n + b_{n-2}$, og vis at

$$\frac{1}{n+1} < 2b_n < \frac{1}{n-1} \quad \text{for alle } n \geq 2.$$

b) For hvilke x konvergerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$?

c) La $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ for x i konvergensintervallet. Skriv $f(x) + x^2 f(x)$ som en potensrekke, og uttrykk svaret ved hjelp av Taylor-rekken til $\ln(1-x)$. Bruk dette til å uttrykke $f(x)$ ved elementære funksjoner.

28. a) (NTNU) Skriv ned potensrekken til e^t , og finn summen av rekken

$$1 - x \ln x + \frac{1}{2}(x \ln x)^2 - \dots + \frac{(-1)^k}{k!}(x \ln x)^k + \dots$$

b) Den store norske matematikeren Atle Selberg viste at

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$$

som 15-åring. Kan du?

12.9 Potensrekker og differensialligninger

I resten av dette kapitlet skal vi se på anvendelser av potensrekker. Den første anvendelsen er til differensialligninger, og selv om dette er et omfattende tema, skal vi nøye oss med å illustrere grunnideen på et enkelt eksempel. Vi skal forsøke å løse differensialligningen

$$y'' + 2xy' + 2y = 0.$$

Vi antar at løsningen kan skrives som en potensrekke $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og forsøker å finne ut hva koeffisientene a_n må være. Deriverer vi, ser vi at

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Setter vi dette inn i ligningen, får vi

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

Vi skifter summasjonsindeks i den første summen for å få samme potenser av x i alle ledd:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} &= \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Dermed blir ligningen

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n] x^n. \end{aligned}$$

Skal denne ligningen være oppfylt for alle x , må

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n = 0$$

for alle n , det vil si

$$a_{n+2} = -\frac{2(n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n = -\frac{2}{n+2}a_n.$$

Ved hjelp av denne relasjonen kan vi uttrykke alle koeffisientene a_n ved hjelp av a_0 og a_1 . Ser vi først på de like indeksene, får vi

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{2}{2}a_0 = -a_0 \\ a_4 &= -\frac{2}{4}a_2 = -\frac{a_2}{2} = \frac{a_0}{2}. \end{aligned}$$

Fortsetter vi på denne måten, ser vi at

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{n!}$$

Ser vi så på de odde indeksene isteden, får vi

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{2}{3}a_1 = -\frac{2a_1}{3} \\ a_5 &= -\frac{2}{5}a_3 = \frac{2^2 a_1}{3 \cdot 5}. \end{aligned}$$

Generelt er

$$a_{2n+1} = \frac{a_1(-1)^n 2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n+1)} = \frac{a_1(-1)^n 4^n (n!)}{(2n+1)!}.$$

(vi har ganget med $2^n n!$ over og under brøkstreken). Dermed har vi funnet følgende uttrykk for løsningene:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (n!) x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ved å bruke forholdstesten sjekker vi lett at begge rekkene konvergerer for alle x . For hvert valg av konstanter $a_0 = C$ og $a_1 = D$ får vi derfor en løsning av differensialligningen.

I dette tilfellet kan vi faktisk kjenne igjen én av de to rekkene – vi ser at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = e^{-x^2}.$$

Dermed kan løsningen skrives

$$y = C e^{-x^2} + D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (n!) x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

der C og D er to vilkårlige konstanter.

Bemerkning

At vi er i stand til å kjenne igjen en av løsningene slik som her, er et unntakstilfelle – som regel får vi potensrekker vi aldri har sett før. Men nettopp dette er et av poengene ved metoden – ved hjelp av potensrekker kan vi få et grep på nye løsningsfunksjoner som vi ikke kan beskrive på vanlig måte.

Oppgaver i seksjon 12.9

1. a) (NTNU) Finn alle potensrekkeløsninger til differensialligningen

$$(1-x)^2 y'' - (1-x)y' - y = 0$$

i intervallet $(-1, 1)$.

- b) Vis at løsningene i a) kan skrives på formen

$$y = C(1-x) + \frac{D}{1-x},$$

hvor C og D er vilkårlige konstanter.

2. (NTNU) Bruk potensrekkeметoden til å finne løsninger av differensialligningen

$$xy'' + y = 0.$$

Vis at disse løsningene kan skrives som

$$y = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{[(n-1)!]^2 \cdot n}.$$

3. (NTNU) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$(1 + x^2)y' + 2xy = 0$$

ved å benytte potensrekkeметoden. Bestem for hvilke x den fremkomne rekkeløsningen er gyldig, og finn et enkelt uttrykk for løsningen.

4. a) (NTNU) Finn potensrekkeløsningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ til differensialligningen

$$y'' + x^2 y' + 2xy = 0$$

med initialkrav $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

- b) Løsningen i a) kan skrives på formen $y = e^{kx^3}$ for en passende konstant k . Hva blir k ?

5. a) (NTNU) Bestem konvergensradien R for rekken

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{4!} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{6!} x^6 + \dots$$

- b) Vis at funksjonen fremstilt ved rekken tilfredsstillere differensialligningen $y' = xy$. Hvilken funksjon fremstiller rekken?

6. (UiTØ) La funksjonen f være definert ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n (n+2)}$$

når potensrekken er konvergent.

- a) Bestem konvergensradien for potensrekken.
 b) For hvilke verdier av x er rekken konvergent?
 c) Vis at f er en løsning av differensialligningen

$$xy' + 2y = \frac{2}{x+2}.$$

- d) Finn funksjonen f . (Vink: Det finnes kun en løsning av differensialligningen i c) som er kontinuert for $x = 0$.)

7. a) (UiO) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x \quad \text{for } x > 0$$

- b) For hvilke x konvergerer rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

- c) La $f(x)$ betegne summen til rekken der den konvergerer. Vis at $f(x)$ er en løsning av differensialligningen

$$xy' + y = x \sin x,$$

og finn et uttrykk for $f(x)$ når $x > 0$.

8. a) (UiO) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$(x+1)y' + y = \frac{1}{1-x} \quad \text{for } x \in (-1, 1)$$

- b) En tallfølge $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ er definert ved

$$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vis, uten å regne ut a_{n+1} og a_n hver for seg, at

$$a_{n+1} + a_n = \frac{1}{n+1}$$

og at

$$0 < a_{n+1} < a_n$$

for $n = 0, 1, 2, \dots$. Bruk dette til å vise at

$$\frac{1}{2(n+1)} < a_n < \frac{1}{2n} \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

- c) Bestem konvergensområdet for potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

For hvilke x konvergerer rekken absolutt? Avgjør om rekken konvergerer uniformt på intervallet $[0, \frac{1}{2}]$.

- d) Kall summen til rekken for $f(x)$ og regn ut

$$(x+1)f'(x) + f(x)$$

ved hjelp av ligningen i b). Bruk svaret og resultatet i punkt a) til å finne $f(x)$. Hvorfor kan du slutte at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{1}{2}?$$

9. (UiO) Gitt potensrekken

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \dots$$

- a) Finn konvergensområdet til $f(x)$.

b) Vis at $f(x)$ er en løsning av differensialligningen

$$y' - y = e^x.$$

Finn et uttrykk for funksjonen $f(x)$ i konvergensområdet.

c) Vis at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n!} = 0$$

og at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n \geq -\frac{1}{e^2}$$

for alle x i konvergensområdet.

12.10 Binomiske rekker

I seksjon 1.4 viste vi binomialformelen

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \end{aligned}$$

Velger vi $a = 1$ og $b = x$, får vi

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{k} x^k + \dots + x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k. \end{aligned}$$

Binomialformelen forutsetter at n er et naturlig tall. I denne seksjonen skal vi finne et uttrykk for $(1+x)^\alpha$ når α ikke er et naturlig tall. Dette uttrykket er ikke lenger en endelig sum, men en uendelig rekke.

Vi begynner med å derivere funksjonen

$$f(x) = (1+x)^\alpha.$$

Vi får

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}. \end{aligned}$$

Generelt ser vi at

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$

Setter vi inn $x = 0$, får vi

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1).$$

Dette betyr at Taylor-rekken til f om 0 er

$$Tf(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \dots$$

Dersom m er et naturlig tall, er vi vant til å bruke notasjonen

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}.$$

Vi utvider nå denne notasjonen til å gjelde alle tall α . Vi skriver altså

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Med denne notasjonen kan Taylor-rekken skrives som

$$Tf(x) = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{k}x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}x^k.$$

Legg merke til at hvis α er et helt tall, så er $\binom{\alpha}{k} = 0$ når $k > \alpha$, og dermed er høyresiden en endelig sum. For alle andre α viser forholdstesten at konvergensradien er 1.

Vi ønsker å vise at Taylor-rekken er lik funksjonen i konvergensintervallet. Vanligvis gjør vi dette ved å vise at restleddet går mot null, men i dette tilfellet er det vanskelig å få til de riktige estimatene. Isteden skal vi bruke et elegant knep.

Vi observerer først at

$$y = (1+x)^\alpha$$

er en løsning av initialverdiproblemet

$$y' - \frac{\alpha}{1+x}y = 0, \quad y(0) = 1.$$

(Sett inn i differensialligningen og sjekk!) Fra setning 10.3.1 vet vi at dette problemet har nøyaktig én løsning på intervallet $(-1, 1)$, så hvis vi kan vise at

$$z = Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n$$

også er en løsning, så er $y = z$, og vi er ferdige.

Ved innsetning ser vi at $z(0) = 1$. Deriverer vi z , får vi

$$z' = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1}x^n.$$

Istedenfor å sette inn i den opprinnelige differensialligningen

$$y' - \frac{\alpha}{1+x}y = 0,$$

lønner det seg å sette inn i den ekvivalente ligningen

$$(1+x)y' - \alpha y = 0$$

som vi får om vi ganger med $1 + x$. Vi ser at

$$\begin{aligned}(1+x)z' - \alpha z &= z' + xz' - \alpha z = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n \\ &\quad + x \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} - \alpha \binom{\alpha}{n} \right] x^n.\end{aligned}$$

Vi må altså vise at

$$(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} = \alpha \binom{\alpha}{n}$$

for alle α og n . Dette er bare et lite regnestykke:

$$\begin{aligned}(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} &= (n+1) \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \\ &\quad + n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} [(\alpha-n) + n] \\ &= \alpha \binom{\alpha}{n}.\end{aligned}$$

Dette fullfører beviset for at $z = y$. Vi oppsummerer:

12.10.1 Setning

For alle reelle tall α og alle $x \in (-1, 1)$ er

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n.$$

Dersom α er et naturlig tall, er rekken på høyre side endelig, og formelen er identisk med binomialformelen.

Rekkene

$$1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n$$

kalles *binomiske rekker*. La oss se på noen eksempler.

12.10.2 Eksempel

Finn Taylor-rekken til $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Siden $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$, er dette den binomiske rekken for $\alpha = 1/2$. Vi får

$$\sqrt{1+x} = 1 + \binom{1/2}{1}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \dots + \binom{1/2}{n}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n}x^n.$$

La oss se hva binomialkoeffisienten $\binom{1/2}{n}$ egentlig er. For $n > 1$ er

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{n} &= \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)\dots(-n+3/2)}{n!} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n(n!)} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}.\end{aligned}$$

Rekken kan altså skrives

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} x^n.$$

■

12.10.3 Eksempel

Finn Taylor-rekken til $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Vi ser at $1/\sqrt{1-x^2} = [1 + (-x^2)]^{-1/2}$. Bruker vi den binomiske rekke for $\alpha = -1/2$, får vi

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = [1 + (-x^2)]^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{2n}$$

dersom $-x^2 \in (-1, 1)$, det vil si dersom $x \in (-1, 1)$. Vi skriver ut $\binom{-1/2}{n}$:

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)\dots(-n+1/2)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n(n!)} \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}.\end{aligned}$$

Altså er

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} x^{2n}.$$

■

12.10.4 Eksempel

Finn Taylor-rekken til $\arcsin x$.

Siden $D(\arcsin x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, er det nok å integrere rekken i forrige eksempel. Vi får

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+1)} x^{2n+1}.$$

Regningene ovenfor gjelder for $|x| < 1$, men man kan vise at formelen også gjelder for $x = \pm 1$ (se oppgave 4).

■

I de neste to seksjonene får du se flere eksempler på hvordan binomiske rekker dukker opp i praksis.

Oppgaver i seksjon 12.10

1. Vis at disse likhetene holder for $|x| < 1$:

$$\text{a) } \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} x^n$$

$$\text{c) } (1-x)^{1/3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^n (n!)} x^n$$

$$\text{d) } \sqrt{1+x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} x^{2n}$$

2. Finn Taylor-rekken til $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ om origo.

3. Vis at for $|x| < 1$ er

$$\frac{1}{(1+x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k-1}{k-1} x^n.$$

Skriv $\frac{1}{(1+x)^3}$ og $\frac{1}{(1+x)^4}$ som uendelig summer.

4. a) Vis at formelen

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)(2n+1)} x^{2n+1}$$

i eksempel 12.10.4 også gjelder når $|x| = 1$. (Vink: For $x = 1$ kan du enten bruke Stirlings formel 11.5.3 eller knepet i oppgave 6.)

b) Vis at

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

5. (UiO) I denne oppgaven er $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.

a) Finn definisjonsmengden D_f .

b) Avgjør hvor f er voksende og hvor den er avtagende. Bestem eventuelle ekstremalpunkter.

c) Finn eventuelle asymptoter og skisser grafen til f .

d) A er området i første kvadrant avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjen $x = 2$. Finn volumene til omdreiningslegemene når A dreies om henholdsvis x -aksen og y -aksen.

e) Avgjør om integralet $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergerer eller divergerer.

f) Vis at for $|x| < 1$ er

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^{3n+1}$$

g) Beregn $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ med feil mindre enn $2 \cdot 10^{-4}$.

6. I denne oppgaven skal vi undersøke når en binomisk rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

konvergerer i endepunktene ± 1 av konvergensintervallet.

a) Vis at dersom $\alpha \leq -1$ så divergerer rekken i begge endepunkter.

Heretter forutsetter vi at $\alpha > -1$ og setter $\beta = \alpha + 1$. Vi antar også at $\alpha \notin \mathbb{N}$.

b) Vis at $\binom{\alpha}{n} = (-1)^n \left(1 - \frac{\beta}{1}\right) \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\beta}{n}\right)$.

c) Bruk Taylors formel til å vise at

$$-x - 2x^2 \leq \ln(1-x) \leq -x$$

for $x \leq 1/2$.

d) Velg n_0 slik at $\beta/n_0 < 1/2$ og sett

$$P_n = \left(1 - \frac{\beta}{n_0}\right) \left(1 - \frac{\beta}{n_0+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\beta}{n}\right)$$

for $n \geq n_0$. Vis at

$$-\sum_{k=n_0}^n \left(\frac{\beta}{k} + 2\frac{\beta^2}{k^2}\right) \leq \ln P_n \leq -\sum_{k=n_0}^n \frac{\beta}{k}.$$

e) Vis at

$$\sum_{k=n_0}^n \frac{\beta}{k} \geq \beta \int_{n_0}^{n+1} \frac{dx}{x} = \beta \ln(n+1) - \beta \ln(n_0).$$

Vis også at det finnes en konstant K slik at

$$\sum_{k=n_0}^n \left(\frac{\beta}{k} + 2\frac{\beta^2}{k^2}\right) \leq \beta \ln(n+1) + K.$$

f) Vis at det finnes konstanter C_1 og C_2 slik at

$$\frac{C_1}{(n+1)^\beta} \leq P_n \leq \frac{C_2}{(n+1)^\beta} \quad \text{for alle } n \geq n_0,$$

og forklar hvorfor dette betyr at det finnes konstanter D_1 og D_2 slik at

$$\frac{D_1}{(n+1)^{\alpha+1}} \leq \left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq \frac{D_2}{(n+1)^{\alpha+1}} \quad \text{for alle } n \geq n_0.$$

g) Vis at rekken konvergerer for $x = 1$ når $\alpha > -1$ og for $x = -1$ når $\alpha \geq 0$.

12.11 Genererende funksjoner

Gitt en tallfølge a_0, a_1, a_2, \dots , kan vi danne potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Denne rekken kalles *den genererende funksjonen* til følgen. Det viser seg at når man er på jakt etter en følge, lønner det seg ofte å finne den genererende funksjonen først. Dette kan høres merkelig ut, men eksemplene i denne seksjonen vil gjøre ideen klare.

I kapittel 4 så vi hvordan vi kunne bruke differensligninger til å finne følger. I vårt første eksempel skal vi se hvordan genererende funksjoner kan brukes til å løse differensligninger på en ny og uventet måte.

12.11.1 Eksempel

Finn følgen $\{a_n\}$ slik at

$$a_{n+1} - 2a_n = 3^n \quad \text{og} \quad a_0 = 2.$$

La

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

være den genererende funksjonen til den ukjente følgen. Multipliserer vi ligningen med x^{n+1} , og summerer over alle n , får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1}.$$

Observerer vi at

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0 = f(x) - 2 \\ \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2xf(x) \\ \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} &= \frac{x}{1-3x} \quad (\text{sum av geometrisk rekke}) \end{aligned}$$

kan denne ligningen skrives som

$$f(x) - 2 - 2xf(x) = \frac{x}{1-3x}.$$

Løser vi for $f(x)$, får vi

$$f(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-3x)} + \frac{2}{(1-2x)}.$$

Dermed har vi funnet den genererende funksjonen. For å finne følgen, må vi skrive f som en potensrekke. Det lønner seg først å bruke delbrøkkopp spalting til å forenkle det første leddet. Setter vi

$$\frac{x}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{A}{(1-2x)} + \frac{B}{(1-3x)},$$

ser vi lett at $A = -1$ og $B = 1$. Dermed er

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(1-2x)(1-3x)} + \frac{2}{(1-2x)} \\ &= \frac{-1}{(1-2x)} + \frac{1}{(1-3x)} + \frac{2}{(1-2x)} \\ &= \frac{1}{(1-2x)} + \frac{1}{(1-3x)}. \end{aligned}$$

Bruker vi summeformelen for en geometrisk rekke baklengs, ser vi at

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \\ \frac{1}{1-3x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n. \end{aligned}$$

Dermed er

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n) x^n$$

og følgelig er

$$a_n = 2^n + 3^n.$$

Differensligningen er løst. ■

Løsningen ovenfor er ikke spesielt rask eller enkel sammenlignet med den metoden vi har brukt tidligere. Genererende funksjoner kan imidlertid også brukes på differensligninger som ikke faller inn under teorien i kapittel 4 (det er eksempler på slike i oppgavene).

Vårt neste eksempel kommer fra kombinatorikken. Vi har løst det med andre metoder før – i eksempel 1.3.9.

12.11.2 Eksempel

Du jobber som kokk på et gatekjøkken der man serverer pizza, hamburger og kylling. Gatekjøkkenet får besøk av en gjeng på 16 personer som hver bestiller en av de tre rettene, og du får inn en lapp på kjøkkenet der det står hvor mange bestillinger det er av hver type. Mens du gjør istand maten, begynner du å lure på hvor mange forskjellige bestillinger som er mulig fra en gruppe på 16 personer (som kokk er du selvfølgelig bare interessert i hvor mange retter det er av hver type, og ikke i hvilken rett hver enkelt gjest har bestilt).

Antallet muligheter er lik koeffisienten til leddet x^{16} i potensrekken til

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^3.$$

Hvorfor? Jo, la oss se hvordan vi får et bidrag til dette leddet når vi multipliserer ut. Vi må ta et ledd x^p fra den første faktoren, gange med et ledd x^h fra den andre faktoren og så med et ledd x^k fra den tredje faktoren. For å få riktig eksponent, må $p + h + k = 16$. Men dette korresponderer nøyaktig til en mulig bestilling, nemlig p pizzaer, h hamburgere og k kyllinger. Det er altså like mange bidrag til leddet x^{16} som det er bestillinger.

Men hvordan finner vi koeffisienten til x^{16} ? Vi kan selvfølgelig forsøke å gange ut, men det er tungvint. Her er en enklere metode. Siden

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

er

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^3 = \frac{1}{(1-x)^3} = (1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-x)^n$$

der vi i det siste skrittet bruker formelen for en binomisk rekke med $\alpha = -3$. Siden

$$\binom{-3}{n} (-x)^n = \frac{(-3)(-4)\dots(-n-2)}{n!} (-1)^n x^n = \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$$

ser vi at koeffisienten til x^{16} er $18 \cdot 17/2 = 153$. ■

Ideen i dette eksemplet er viktig – den viser hvordan kombinasjoner av muligheter svarer til multiplikasjon av potensrekker. En av fordelene ved metoden er at den er svært robust – forandrer vi litt på problemstillingen, fører det bare til en mindre, algebraisk modifikasjon av løsningen. Her er et eksempel.

12.11.3 Eksempel

Vi ser på samme eksempel som ovenfor, men antar at pizzaene er så store at de må deles på to personer. Det må altså være et like antall personer som bestiller pizza. Hvor mange muligheter er det nå?

Vi er fortsatt på jakt etter koeffisienten til x^{16} , men denne gang i uttrykket

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^2$$

(Hvorfor?). Siden

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)},$$

må vi altså finne koeffisienten til x^{16} i potensrekken til

$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)}.$$

Dette kan gjøres på flere måter, men vi velger en som har den fordelen at den lett kan brukes på en generell eksponent k istedenfor 16. Ved delbrøkkopp spalting er

$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{D}{1+x}.$$

Etter litt regning får vi $A = 1/8$, $B = 1/4$, $C = 1/2$ og $D = 1/8$. Vi kan nå utvikle hvert ledd i en potensrekke:

$$\frac{1/8}{1-x} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (\text{geometrisk rekke})$$

$$\frac{1/4}{(1-x)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-x)^k = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k \quad (\text{binomisk rekke})$$

$$\frac{1/2}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} (-x)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^k \quad (\text{binomisk rekke})$$

$$\frac{1/8}{(1+x)} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad (\text{geometrisk rekke}).$$

Legger vi sammen, ser vi at koeffisienten til det k -te leddet er

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4}(k+1) + \frac{1}{2} \frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{1}{8}(-1)^k.$$

For $k = 16$, får vi

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4}17 + \frac{1}{2} \frac{17 \cdot 18}{2} + \frac{1}{8} = 81.$$

Tallet på mulige bestillinger er altså redusert til 81. ■

Selv om regningene er lange og tunge, viser disse eksemplene noe av styrken ved teknikken – de kombinatoriske problemene har nesten forsvunnet og er blitt erstattet av regnetekniske.

Sannsynlighetsregning er et av de viktigste anvendelsesområdene for genererende funksjoner. Det neste eksemplet viser noen av grunnideene.

12.11.4 Eksempel

Vi kaster en mynt mange ganger etter hverandre og er interessert i når den første kronen kommer. Hvis p_n er sannsynligheten for at en kron første gang kommer i kast nummer n , ser vi at $p_n = 1/2^n$. Den *genererende funksjonen* til dette eksperimentet er

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n = \frac{x/2}{1-x/2} = \frac{x}{2-x},$$

der vi har summert en geometrisk rekke.

Når kan vi i gjennomsnitt regne med at den første kronen kommer? Siden sannsynligheten for at vi må vente i n kast er p_n , blir den gjennomsnittlige ventetiden $\sum_{n=0}^{\infty} n p_n$. Denne størrelsen kan vi regne ut på følgende måte. Deriverer vi den genererende funksjonen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, får vi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n x^{n-1}.$$

Velger vi $x = 1$, ser vi at

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n$$

som er det forventede antall kast.

Siden $f(x) = \frac{x}{2-x}$, får vi

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2-x) - x(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2}$$

og

$$f'(1) = \frac{2}{(2-1)^2} = 2.$$

I gjennomsnitt må vi altså vente i to kast før vi får første kron.

I det enkle eksemplet vi ser på her, kunne vi ha funnet gjennomsnittet enklere på andre måter. Men den grunnleggende ideen er den samme i mer kompliserte situasjoner – for å finne gjennomsnittsverdien, regner vi ut den deriverte til den genererende funksjonen i punktet $x = 1$.

La oss gjøre problemet litt mer komplisert ved å spørre om når den *andre* kronen kommer. Hvis q_n er sannsynligheten for at den andre kronen kommer i kast nummer n , så er den genererende funksjonen

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^n.$$

Det viser seg at $g(x) = f(x) \cdot f(x)$. Hvorfor? Jo, la oss regne ut q_n . Skal den andre kronen komme etter n skritt, må den første komme etter k skritt for en $k < n$, og deretter må den andre komme etter ytterligere $n - k$ skritt. Sannsynligheten for at dette skal skje er $p_k p_{n-k}$. Siden k kan være et hvilket som helst tall mindre enn n , må vi summere

$$q_n = p_1 p_{n-1} + p_2 p_{n-2} + \cdots + p_{n-1} p_1 = \sum_{k=1}^{n-1} p_k p_{n-k}.$$

Men dette er akkurat uttrykket for koeffisienten til x_n i produktet $f(x) \cdot f(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n)$.

Dette betyr at

$$g(x) = f(x)^2 = \frac{x^2}{(2-x)^2}.$$

For å regne ut q_n , må vi skrive $g(x)$ som en potensrekke. Bruker vi formelen for den binomiske rekken med $\alpha = -2$, får vi

$$\frac{1}{(1-x/2)^2} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \left(\frac{-x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} x^n.$$

Dermed er

$$g(x) = \frac{x^2}{4} \cdot \frac{1}{(1-x/2)^2} = \frac{x^2}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)}{2^n} x^n.$$

Altså er sannsynligheten for at den andre kronen kommer i kast nummer n

$$q_n = \frac{n-1}{2^n}.$$

Hvor lenge må vi i gjennomsnitt vente før den andre kronen dukker opp? Vi må regne ut $g'(1)$. Siden

$$g'(x) = \left(\frac{x^2}{(2-x)^2} \right)' = \frac{2x(2-x)^2 - x^2 \cdot 2(2-x)(-1)}{(2-x)^4} = \frac{2x(2-x) + 2x^2}{(2-x)^3}$$

får vi

$$g'(1) = 4.$$

I gjennomsnitt vil den andre kronen dukke opp i fjerde kast.

Denne fremgangsmåten kan generaliseres. Dersom vi ønsker å studere når den k -te kronen dukker opp, regner vi ut den genererende funksjonen

$$h(x) = f(x)^k = \left(\frac{x}{2-x} \right)^k.$$

Gjennomsnittlig ventetid er gitt ved $h'(1)$. ■

Regelen vi viste i dette eksemplet, er allmenngyldig: Dersom en tilfeldig hendelse Y er summen av N uavhengige enkelthendelser X_1, X_2, \dots, X_N , så er den genererende funksjonen til Y lik produktet av de genererende funksjonene til enkelthendelsene X_1, X_2, \dots, X_N . Det neste eksemplet viser en mer interessant anvendelse av genererende funksjoner.

12.11.5 Eksempel

I anledning av fotball-VM i 1994 introduserte en isfabrikk en ny type is med navnetrekket til norske landslagsspillere på pinnen. Hver pinne har ett navnetrekk, og det er umulig å se hvilket før isen er spist. En jente ønsker seg en komplett samling. Hvor mange is må hun regne med å kjøpe dersom det finnes N forskjellige navnetrekk i alt?

Vi antar at alle navnetrekkene er like vanlige. La X_k være antallet is jenta spiser fra hun får navnetrekk nummer $k-1$ til (og med) hun får den k -te autografen. Hvis Y er det totale antall is hun spiser for å få en komplett samling, så er

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

For å finne den genererende funksjonen til Y , må vi finne de genererende funksjonene til X_1, X_2, \dots, X_N , og så multiplisere dem.

For å finne den genererende funksjonen til X_{k+1} , observerer vi at jenta har k navnetrekk og mangler $N-k$. Dersom $X_{k+1} = m$, må hun altså først trekke blant de k hun har, $m-1$ ganger, og så blant de $N-k$ hun ikke har, den m -te gangen. Denne sannsynligheten er

$$\left(\frac{k}{N} \right)^{m-1} \cdot \frac{(N-k)}{N} = \frac{k^{m-1}(N-k)}{N^m}.$$

Den genererende funksjonen til X_{k+1} blir dermed

$$f_{k+1}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^{m-1}(N-k)}{N^m} x^m = \frac{N-k}{N} \cdot \frac{x}{1 - \frac{kx}{N}},$$

der vi har summert en geometrisk rekke.

Den genererende funksjonen g til Y er produktet av alle f_{k+1} for k fra 0 til $N-1$. Vi får

$$g(x) = \frac{(N-1)!}{N^{N-1}} x^{N-1} \left(1 - \frac{x}{N}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2x}{N}\right)^{-1} \cdots \left(1 - \frac{(N-1)x}{N}\right)^{-1}.$$

Ved å delbrøkkoppspalte kan vi finne et uttrykk for det n -te leddet i potensrekken til $g(x)$. Det tar imidlertid mye regning å få dette uttrykket pent, så vi lar den oppgaven være. Isteden ser vi på gjennomsnittsverdien til Y – altså hvor mange is jenta i gjennomsnitt må spise før hun har nådd sitt mål. Vi vet at denne verdien er gitt ved $g'(1)$. Siden g er såpass stygg, lønner det seg imidlertid å regne ut gjennomsnittet på en litt annen måte. Vi vet at Y er summen av X_1, X_2, \dots, X_N , og følgelig er gjennomsnittet til Y summen av gjennomsnittene til X_1, X_2, \dots, X_N . Gjennomsnittet av X_{k+1} får vi ved å derivere f_{k+1} :

$$\begin{aligned} f'_{k+1}(x) &= \left(\frac{N-k}{N} \cdot \frac{x}{1 - \frac{kx}{N}} \right)' = \frac{N-k}{N} \cdot \frac{1(1 - \frac{kx}{N}) - x(\frac{-k}{N})}{(1 - \frac{kx}{N})^2} \\ &= \frac{N-k}{N(1 - \frac{kx}{N})^2}, \end{aligned}$$

som gir

$$f'_{k+1}(1) = \frac{N-k}{N(1 - \frac{k}{N})^2} = \frac{N}{N-k}.$$

Gjennomsnittet til Y blir dermed

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} f'_{k+1}(1) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N}{N-k} = \frac{N}{N} + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N-2} + \cdots + \frac{N}{2} + \frac{N}{1} \\ &= N \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \right). \end{aligned}$$

Dette er det forventede antall is jenta må spise før hun har en komplett samling.

Hvor stor er denne størrelsen? Sammenligner vi summen $1/1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/N$ med integralet $\int dx/x$, ser vi at den er av størrelsesorden $\ln N$. Man kan vise at differansen

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \right) - \ln N$$

nærmer seg et tall γ når N går mot uendelig. Dette tallet kalles *Eulers konstant* og har verdi $0.5772 \dots$. For store N kan vi tilnærmet regne

$$N \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \right) \approx N(\ln N + 0.5772).$$

La oss si at $N = 23$ (en VM-tropp pluss landslagssjef). Da er

$$N \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \right) \approx 23(\ln 23 + 0.5772) \approx 85.$$

(Tar du bryet med å regne ut summen $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/23$, ser du at det eksakte svaret er nærmere 86.) Jenta må altså i gjennomsnitt regne med å spise rundt 85 is – et rimelig antall spør du de fleste barn. ■

Bemerkning

I dette kapitlet har vi ikke vært så nøye med å kontrollere konvergens til rekke-
ne våre. Det er imidlertid ikke noe problem å sjekke at alle rekkene konvergerer i et
område rundt null, og det er alt vi trenger. Faktisk kan mye av teorien for genereren-
de funksjoner utvikles uten konvergenskrav i det hele tatt, men vi skal ikke komme
nærmere inn på det her.

Oppgaver i seksjon 12.11

1. Bruk genererende funksjoner til å finne følgen $\{a_n\}$:

a) $a_{n+1} + 2a_n = 4^n; \quad a_0 = \frac{2}{3}$

b) $a_{n+1} + 3a_n = n; \quad a_0 = 1$

c) $a_{n+1} + a_n = \binom{\alpha}{n}; \quad a_0 = 0$

2. Bruk genererende funksjoner til å finne følgen $\{a_n\}$:

a) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n; \quad a_0 = 0$

b) $a_{n+1} - a_n = n \cdot 3^n; \quad a_0 = 1$

c) $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 3^n; \quad a_0 = 1, a_1 = -1$

3. En forretning selger seks forskjellige typer yoghurt. Du skal kjøpe 24 beger. Bruk den genererende funksjonen

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^6$$

til å regne ut hvor mange muligheter du har.

4. Du skal kjøpe til sammen 100 aksjer i de tre selskapene A, B og C, og du ønsker at minst 25 av aksjene skal være i selskap A. Bruk den genererende funksjonen

$$f(x) = (x^{25} + x^{26} + x^{27} + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2$$

til å regne ut hvor mange muligheter du har.

5. Et barn skal kjøpe småsjokolader for 20 kr. Det kan velge mellom to forskjellige typer til én krone per stykk og en type til 2 kroner per stykk. Bruk den genererende funksjonen

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)$$

til å regne ut hvor mange muligheter som finnes.

6. Vis at når k gjester skal bestille fra en meny med n retter, finnes det $\binom{n+k-1}{k}$ muligheter. (Gjestene bestiller én rett hver, men flere gjester kan godt bestille det samme.)

7. I et kortspill for barn består kortstokken av 36 kort. Fire og fire hører til samme familie og er like for våre formål. Et barn får delt ut 12 kort, og vi er interessert i å regne ut hvor mange muligheter som finnes.

a) Forklar hva funksjonen

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^9$$

har med problemet å gjøre.

b) Vis at

$$f(x) = (1 - x^5)^9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{8+k}{k} x^k.$$

c) Vis at antall muligheter er $\binom{20}{8} - 9 \cdot \binom{15}{7} + 36 \binom{10}{2}$.

8. Hvor mange løsninger har ligningen

$$y_1 + y_2 + y_3 = 10$$

når y_1, y_2 og y_3 skal være hele tall større enn eller lik 0?

9. Du kaster en terning gjentatte ganger inntil det totale antall øyne er n . Vis at antall måter dette kan gjøres på er gitt av den genererende funksjonen

$$g(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3 - \dots - x^6}.$$

10. Løs den ikke-lineære differensligningen

$$(n+1)a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_0 = 1.$$

11. *Catalan-tallene* er en følge $\{a_n\}$ som dukker opp i et utall av anvendelser. De er definert ved at $a_0 = 1$ og

$$a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \dots + a_{n-1} a_1 + a_n a_0$$

for $n \in \mathbb{N}$.

a) Beregn a_1, a_2 og a_3 .

b) La f være den genererende funksjonen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(du kan anta at rekken konvergerer for tilstrekkelig små x). Vis at

$$x[f(x)]^2 = f(x) - a_0.$$

c) Vis at

$$a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

d) Bestem konvergensradien til $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

12. Hvor lenge må jenta i eksempel 12.11.5 vente i gjennomsnitt før hun får det femtende navnetrekket?

13. Du spiller et terningspill med én terning og trenger en sekser for å komme i gang.

a) Vis at sannsynligheten for at den første sekseren kommer i kast nummer n er

$$\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

b) La f være den genererende funksjonen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} x^n.$$

Finn et enkelt uttrykk for f .

c) Bruk f til å regne ut hvor lenge du i gjennomsnitt må vente på den første sekseren.

14. I produksjonen av et vareslag er det en sannsynlighet p for at en gitt vare blir produsert med feil.

a) Vis at sannsynligheten for at den første feilen oppstår i vare nummer n er

$$p(1-p)^{n-1}.$$

b) Finn et enkelt uttrykk for den genererende funksjonen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} x^n.$$

c) Vis at det i gjennomsnitt blir produsert $1/p$ varer før den første feilen oppstår.

15. Du kaster en mynt (uendelig) mange ganger. Hva er sannsynligheten for at du får kron for n -te gang i kast nummer N ?

16. Per og Kari spiller om penger. Etter hvert spill må taperen betale én krone til vinneren. Sannsynligheten for at Kari vinner et spill er p og sannsynligheten for at Per vinner er $q = 1 - p$. Til sammen har Per og Kari a kroner som de spiller om, og de har bestemt seg for å spille til førstemann er blakk.

a) La u_n være Karis sannsynlighet for å vinne i en situasjon der hun har n kroner (og Per $a - n$). Vis at

$$u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1}, \quad u_0 = 0, \quad u_a = 1.$$

Finn et uttrykk for u_n .

- b) La v_n være det gjennomsnittlige antall spill som gjenstår før en av spillerne er blakk i en situasjon der Kari har n kroner. Vis at

$$v_n = pv_{n+1} + qv_{n-1} + 1, \quad v_0 = v_a = 0$$

og finn et uttrykk for v_n .

- c) La $w_{n,k}$ være sannsynligheten for at Kari er blakk etter nøyaktig k spill når hun starter med n kroner. Vis at

$$w_{n,k+1} = pw_{n+1,k} + qw_{n-1,k}$$

og at $w_{0,0} = 1$, $w_{n,0} = 0$ for $n > 0$, $w_{0,n} = w_{a,n} = 0$ for $n \geq 1$.

- d) La $W_n(x)$ være den genererende funksjonen

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{n,k} x^k.$$

Vis at

$$W_n(x) = pxW_{n+1}(x) + qxW_{n-1}(x)$$

for $0 < x < a$, og at $W_0(x) = 1$, $W_a(x) = 0$.

- e) Vis at

$$W_n(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^n \frac{r_1(x)^{a-n} - r_2(x)^{a-n}}{r_1(x)^a - r_2(x)^a}$$

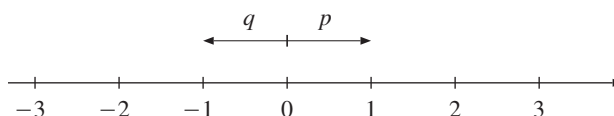
der

$$r_1(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4pqx^2}}{2px}, \quad r_2(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}}{2px}.$$

*12.12 En virrevandrer vender hjem

Til slutt i dette kapitlet skal vi se hvordan rekker og genererende funksjoner kan brukes til å løse vanskeligere problemer i sannsynlighetsregningen. Vi skal få bruk for nesten alt vi vet om rekker, pluss en del av det vi vet om andre ting. Argumentasjonen er typisk for mange vellykkede anvendelser av matematikk – det er forbløffende hvilke resultater og teknikker man får bruk for underveis.

Vi begynner med å tegne opp tallinjen og merke av heltallene $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ som vist på figur 12.12.1. Vi skal foreta en vandring på tallinjen etter følgende oppskrift: Vi starter i punktet 0 og kaster kron og mynt om vi skal gå mot høyre til punktet 1 eller mot venstre til punktet -1 . Mynten er ikke nødvendigvis rettferdig, så vi går til høyre med sannsynlighet p og til venstre med sannsynlighet $q = 1 - p$. Når vi har kommet frem til 1 eller -1 , kaster vi den samme mynten en gang til, og går så til høyre med sannsynlighet p og til venstre med sannsynlighet q .



Figur 12.12.1.

Etter at vi har kommet frem til det nye bestemmelsesstedet (som er enten 2, 0 eller -2), kaster vi mynten igjen, og så videre. Vi kaller denne prosessen en *virrevandring* med overgangssannsynligheter p og q . Tilfellet $p = q = 1/2$ kaller vi en *symmetrisk virrevandring*.

Vårt mål er å beregne sannsynligheten for at virrevandrerens før eller senere vender tilbake til 0.

Bemerkning

Det kan virke merkelig å bruke så mye energi på en forvirret vandringsmann, men teorien for virrevandringer har en rekke anvendelser i så forskjellige fag som biologi, fysikk og økonomi. Den enkleste anvendelsen får du ved å tenke på en serie med spill mellom to personer A og B . Etter hvert spill må vinneren betale en krone til taperen. Dersom A vinner hvert spill med sannsynlighet p , og B vinner med sannsynlighet q , vil virrevandrerens posisjon etter n skritt angi hvor mye A har vunnet på de n første spillene. Sannsynligheten for at vandreren vender tilbake til 0, er lik sannsynligheten for at stillingen en eller annen gang blir uavgjort etter at spillet er begynt.

Vi begynner med litt notasjon. Med p_n skal vi mene sannsynligheten for at vandreren er i punktet 0 etter n skritt (vi tar med p_0 som er lik 1). Med f_n skal vi mene sannsynligheten for at vandreren *første* tilbakekomst til 0 skjer etter n skritt. Vanligvis er $p_n > f_n$ siden vandreren godt kan være i 0 uten at det er hans første tilbakekomst (det kan være hans andre eller tredje osv.). Legg merke til at $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er sannsynligheten for at vandreren kommer tilbake til 0 en eller annen gang. Det er altså summen av f_n -ene vi egentlig er interessert i, men det er mye lettere å regne ut p_n -ene. Heldigvis er det en enkel sammenheng mellom disse størrelsene.

12.12.1 Lemma

For $n \geq 1$ er

$$p_n = \sum_{i=1}^n f_i p_{n-i}.$$

Bevis: En partikkel som er tilbake i 0 etter n skritt, må ha hatt sin første tilbakekomst ved ett av tidspunktene $1, 2, 3, \dots, n$. Sannsynligheten for at en partikkel har sin første tilbakekomst etter i skritt og så er tilbake igjen i 0 etter n skritt, er $f_i p_{n-i}$. Summerer vi over alle muligheter, får vi

$$p_n = \sum_{i=1}^n f_i p_{n-i}$$

og lemmaet er bevist. ■

For å komme videre innfører vi de genererende funksjonene

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

og

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n.$$

Siden både p_n og f_n er sannsynligheter, må $p_n \leq 1$, $f_n \leq 1$. Sammenligner vi med den geometriske rekken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, ser vi at både $\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$ må ha konvergensradius minst 1.

Bruker vi lemmaet ovenfor, ser vi at

$$P(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n f_i p_{n-i} \right) x^n = 1 + F(x)P(x)$$

der vi også har brukt setning 12.7.6 til å multiplisere de to potensrekkenes. Løser vi for $P(x)$, får vi

$$P(x) = \frac{1}{1 - F(x)}. \quad (1)$$

Rekkeoperasjonene ovenfor gjelder når x ligger i konvergensområdet til $F(x)$ og $P(x)$. Det betyr at formelen $P(x) = 1 + F(x)P(x)$ i hvert fall holder for $x \in (-1, 1)$. I tillegg ser vi at siden $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leq 1$, kan ikke $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$ være lik 1 når x ligger i dette intervallet. Altså gjelder formel (1) for alle $x \in (-1, 1)$.

12.12.2 Setning

Dersom rekken $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ konvergerer, returnerer vandreren til 0 med sannsynlighet $\frac{s-1}{s}$, der $s = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$. Dersom rekken $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ divergerer, returnerer vandreren til 0 med sannsynlighet 1.

Bevis: Husk at sannsynligheten for at vandreren kommer tilbake til 0 er $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Siden $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergerer, forteller Abels teorem oss at

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = f.$$

Anta først at $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ konvergerer mot en grense s . Ifølge Abels teorem er da $\lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = s$. Tar vi grenseverdien på begge sider av (1), får vi

$$s = \lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - F(x)} = \frac{1}{1 - f}.$$

Løser vi for f , får vi

$$f = \frac{s - 1}{s}.$$

Anta så at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ divergerer. Siden alle leddene er positive, må $\lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = \infty$ (sjekk at dette er riktig!). Men

$$P(x) = \frac{1}{1 - F(x)},$$

så hvis $P(x) \rightarrow \infty$, må $F(x) \rightarrow 1$. Ifølge Abels teorem er da $f = 1$, og vandreren returnerer med sannsynlighet 1. ■

La oss gjøre en viktig observasjon før vi bruker resultatet ovenfor. Dersom $f = 1$, vil vandreren med sannsynlighet 1 returnere uendelig mange ganger. Etter at han returnerer første gang, vil han nemlig fortsatt ha sannsynlighet 1 for å returnere enda en gang, og så videre. Er derimot f mindre enn 1, så er sannsynligheten for å vende tilbake uendelig mange ganger lik 0. Sannsynligheten for å returnere minst n ganger er nemlig lik f^n , og når n går mot ∞ , går f^n mot 0.

Vi sier at virrevandringen er *rekurrent* dersom den med sannsynlighet 1 returnerer uendelig mange ganger til null, og vi sier at den er *transient* dersom den med sannsynlighet 1 bare kommer tilbake et endelig antall ganger. Med denne terminologien kan vi omformulere resultatet ovenfor.

12.12.3 Korollar

Virrevandringen er rekurrent hvis og bare hvis rekken $\sum p_n$ divergerer.

Vi ser altså at konvergens og divergens av rekken reflekterer to helt forskjellige oppførsler til virrevandringen. Divergens svarer til en bevegelse som returnerer uendelig mange ganger, mens konvergens svarer til at vandreren kommer tilbake et endelig antall ganger før han forsvinner for godt. I sannsynlighetsregning og matematisk fysikk er det ganske vanlig å kvalitativt forskjellig oppførsel røper seg gjennom konvergens og divergens av rekker og integraler.

For hvilke verdier av p og q er virrevandringen rekurrent?

12.12.4 Setning

Virrevandringen er rekurrent hvis og bare hvis $p = 1/2$.

Det er altså bare den symmetriske virrevandringen som fortsetter å komme tilbake – alle de andre takker for seg etter et endelig antall besøk. For å vise dette resultatet, må vi først finne et uttrykk for p_n . Det er ikke så vanskelig. Hvis n er odde, er $p_n = 0$ – vandreren kan ikke komme tilbake etter et odde antall skritt. Er n et partall, $n = 2k$, må vandreren ha gått like mange skritt til høyre som til venstre. Plasseringen av de k høyreskrittene kan velges på $\binom{2k}{k}$ måter, og hvert slikt valg har en sannsynlighet $p^k q^k$. Den totale sannsynligheten er derfor

$$p_{2k} = \binom{2k}{k} p^k q^k.$$

Dermed blir

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k q^k.$$

For å sjekke om denne rekken konvergerer eller divergerer, bruker vi forholdstesten.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\binom{2k+2}{k+1} p^{k+1} q^{k+1}}{\binom{2k}{k} p^k q^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{pq(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} = 4pq.$$

Hvis $p = q = 1/2$, blir $4pq = 1$, og vi får ingen konklusjon. Er $p \neq 1/2$, kan vi skrive $p = 1/2 + d$, $q = 1/2 - d$ for et tall d (positivt eller negativt). Dermed ser vi at

$$4pq = 4\left(\frac{1}{2} + d\right)\left(\frac{1}{2} - d\right) = 1 - 4d^2 < 1$$

og rekken konvergerer. Altså er virrevandringen transient for $p \neq 1/2$.

For $p = 1/2$ må vi bruke kraftigere metoder. Vi skal se på to. Den første forutsetter kjennskap til Stirlings formel 11.5.3. Ifølge denne formelen er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Definerer vi

$$c_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n},$$

kan vi dermed skrive

$$n! = c_n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

der $c_n \rightarrow 1$ når $n \rightarrow \infty$.

Vi går tilbake til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k q^k.$$

For $p = q = 1/2$, får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-k} \binom{2k}{k}.$$

Bruker vi formlene ovenfor, ser vi at

$$4^{-k} \binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} = \frac{c_{2k} \sqrt{2\pi} \sqrt{2k} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{4^k [c_k \sqrt{2\pi} \sqrt{k} \left(\frac{k}{e}\right)^k]^2} = \frac{c_{2k}}{c_k^2 \sqrt{\pi} \sqrt{k}}. \quad (2)$$

Sammenligner vi med den divergente rekken $\sum 1/k^{1/2}$, ser vi at

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4^{-k} \binom{2k}{k}}{k^{-1/2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{2k}}{c_k^2 \sqrt{\pi} \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Altså divergerer rekken $\sum p_n = \sum 4^{-k} \binom{2k}{k}$. Dette viser at virrevandringen er rekurent for $p = q = 1/2$, og fullfører det første beviset for setning 12.12.4.

I det andre beviset for setningen, bruker vi genererende funksjoner. Vi observerer først at den genererende funksjonen til $\{p_n\}$ er

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k q^k x^{2k}.$$

Det er slett ikke åpenbart hvordan man summerer rekken på høyre side, men en liten omskrivning hjelper oss videre. Vi observerer at

$$\begin{aligned} \binom{2k}{k} &= \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(k!)^2} \\ &= \frac{4^k \cdot k \cdot (k-1/2) \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (3/2) \cdot 1 \cdot (1/2)}{(k!)^2} \\ &= \frac{4^k \cdot (k-1/2) \cdot (k-3/2) \cdot \dots \cdot (3/2) \cdot (1/2)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k \cdot 4^k \cdot (-1/2) \cdot (-3/2) \cdot \dots \cdot (-k+1/2)}{k!} \\ &= (-1)^k 4^k \binom{-1/2}{k}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k q^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 4^k \binom{-1/2}{k} p^k q^k x^{2k} = (1 - 4pqx^2)^{-1/2}$$

der vi har gjenkjent den binomiske rekken med $\alpha = -1/2$. Siden

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - 4pqx^2)^{-1/2}$$

får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \begin{cases} (1 - 4pq)^{-1/2} < \infty & \text{for } p \neq \frac{1}{2} \\ \infty & \text{for } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

som på nytt viser setning 12.12.4.

Et interessant aspekt ved den siste utledningen er at siden vi nå har funnet den genererende funksjonen $P(x)$ for $\{p_n\}$, kan vi også finne den genererende funksjonen for $\{f_n\}$. Ifølge (1) er

$$P(x) = \frac{1}{1 - F(x)},$$

og løser vi denne ligningen for $F(x)$, får vi

$$F(x) = 1 - \frac{1}{P(x)} = 1 - (1 - 4pqx^2)^{1/2}.$$

Ved å bruke den binomiske rekken for $\alpha = 1/2$, finner vi et uttrykk for f_n . Siden

$$F(x) = 1 - (1 - 4pqx^2)^{1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} 4^k \binom{1/2}{k} p^k q^k x^{2k}$$

er

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ er odde eller } n = 0 \\ (-1)^{k+1} 4^k \binom{1/2}{k} p^k q^k & \text{hvis } n = 2k > 0. \end{cases}$$

Ved å regne litt på binomialkoeffisienten, ser vi at

$$(-1)^{k+1} 4^k \binom{1/2}{k} = \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k}.$$

Altså har vi bevist:

12.12.5 Setning

Sannsynligheten for at vandreren returnerer for første gang etter n skritt, er

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ er odde eller } n = 0 \\ \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} p^k q^k & \text{hvis } n = 2k > 0. \end{cases}$$

Vi vet at hvis $p = q = 1/2$, så vender vandreren tilbake med sannsynlighet 1. La oss regne ut hvor lenge vi i gjennomsnitt må vente på den første hjemkomsten.

12.12.6 Setning

Anta at $p = q = 1/2$. Den gjennomsnittlige ventetiden på den første returen til 0 er uendelig.

Bevis: Den gjennomsnittlige ventetiden er

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2k \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{2k-1} \binom{2k}{k} 4^{-k}.$$

Fra tidligere vet vi at (husk formel (2))

$$4^{-k} \binom{2k}{k} = \frac{c_{2k}}{c_k^2 \sqrt{\pi} \sqrt{k}}$$

der $c_k \rightarrow 1$ når $k \rightarrow \infty$. Altså er

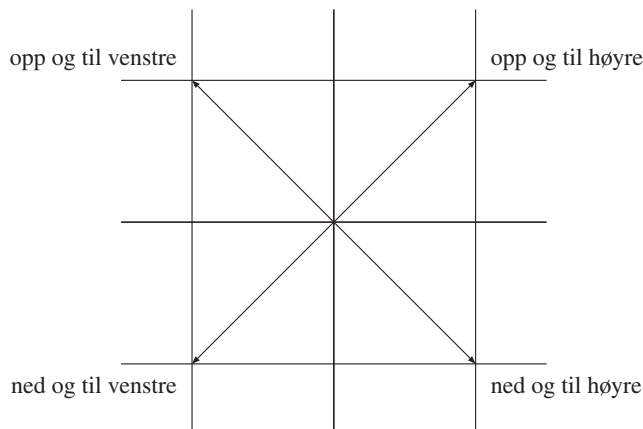
$$\frac{2k}{2k-1} \binom{2k}{k} 4^{-k} = \frac{2k c_{2k}}{(2k-1) c_k^2 \sqrt{\pi} \sqrt{k}} = \frac{c_{2k}}{(1-1/2k) c_k^2 \sqrt{\pi} \sqrt{k}}.$$

Ved å sammenligne med den divergente rekken $\sum 1/k^{1/2}$, ser vi at $\sum \frac{2k}{2k-1} \binom{2k}{k} 4^{-k}$ også divergerer. Setningen er bevist. ■

Selv om det er sannsynlighet 1 for at vandreren vender hjem, er den gjennomsnittlige ventetiden uendelig! Man må være litt forsiktig med å tolke et slikt resultat – det betyr *ikke* at et flertall av vandrerne blir borte svært lenge (nøyaktig halvparten er jo tilbake allerede etter to skritt), men heller at et lite mindretall drar gjennomsnittet kraftig opp.

Virrevandringer i to og tre dimensjoner

Til slutt i denne seksjonen skal vi se litt på virrevandringer i høyere dimensjoner. Tenk deg at vi har delt inn planet i et rutenett som vist på figur 12.12.2.



Figur 12.12.2.

En vandrer starter i origo, men kaster denne gang to mynter – én som forteller ham om han skal gå til høyre eller venstre, og én som forteller ham om han skal gå opp eller ned. Det er derfor fire mulige skritt:

opp og til høyre
 opp og til venstre
 ned og til høyre
 ned og til venstre

Vi regner med at begge myntene er rettferdige slik at sannsynligheten for hver av disse hendelsene er $1/4$ (vi ser altså på en *symmetrisk* virrevandring). Som før lurer vi på om vandringen er transient eller rekurrent. Setning 12.12.3 gjelder også i dette tilfellet (selv om vi tenkte på en-dimensjonale virrevandringer da vi utledet den, er det ingen ting i argumentet som ikke fungerer for to-dimensjonale virrevandringer), og vi må altså sjekke om

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

divergerer eller konvergerer.

Heldigvis slipper vi å regne ut sannsynligheten p_n fra bunnen av. Vi kan tenke på den to-dimensjonale virrevandringen som sammensatt av to uavhengige, en-dimensjonale virrevandringer, en i horisontal og en i vertikal retning. Dersom den to-dimensjonale vandringen skal returnere til origo etter $n = 2k$ skritt, må begge de to en-dimensjonale vandringene returnere til 0. Vi vet at sannsynligheten for at én av dem returnerer, er

$$4^{-k} \binom{2k}{k} = \frac{c_{2k}}{c_k^2 \sqrt{\pi} \sqrt{k}}.$$

Sannsynligheten for at begge returnerer samtidig etter $2k$ skritt, er derfor

$$p_{2k} = \left[4^{-k} \binom{2k}{k} \right]^2 = \left(\frac{c_{2k}}{c_k^2 \sqrt{\pi} \sqrt{k}} \right)^2 = \frac{c_{2k}^2}{c_k^4 \cdot \pi \cdot k}.$$

Sammenligner vi med den divergente rekken $\sum 1/k$, ser vi at $\sum p_{2k}$ divergerer. Altså er virrevandringen rekurrent.

La oss gjøre det tilsvarende i tre dimensjoner. Siden det nå er tre hovedretninger, må vi kaste tre mynter for å avgjøre hvor vi skal gå. Sannsynligheten for å returnere til origo etter $2k$ skritt er

$$p_{2k} = \left[4^{-k} \binom{2k}{k} \right]^3 = \left(\frac{c_{2k}}{c_k^2 \sqrt{\pi} \sqrt{k}} \right)^3 = \frac{c_{2k}^3}{c_k^6 \pi^{3/2} k^{3/2}}.$$

Denne gang sammenligner vi med den *konvergente* rekken $\sum 1/k^{3/2}$, og finner at $\sum p_{2k}$ konvergerer. Altså er virrevandringen transient. Vi har dermed vist:

12.12.7 Teorem

Den symmetriske virrevandringen er rekurrent i dimensjon 1 og 2, men transient i dimensjon 3.

På en måte er ikke dette resultatet så overraskende; dess høyere dimensjonen blir, dess større rom er det å bevege seg i, og dess mindre er sannsynligheten for å finne veien tilbake. At skillet går mellom dimensjon 2 og 3, er det imidlertid umulig å se uten å regne. I mange deler av matematikken finnes det slike avgjørende skiller mellom dimensjoner, og ofte er disse skillene knyttet nettopp til konvergens og divergens av integraler eller rekker.

Teorem 12.12.7 ble først vist av den ungarskfødte matematikeren George Polya (1887–1985) i 1921. Han arbeidet med en litt annen (og vanskeligere) versjon av to- og tre-dimensjonale virrevandringer.

Oppgaver i seksjon 12.12

1. I denne oppgaven skal vi studere en én-dimensjonal virrevandrer med $p = q = 1/2$. Dersom x_n er posisjonen til vandreren etter n skritt, sier vi at posisjonen er *positiv* i intervallet $[n, n + 1]$ dersom x_n eller x_{n+1} er positiv (den andre er da positiv eller null).

- Vis at i perioden fra 0 til $2n$, $n \in \mathbb{N}$, vil posisjonen alltid være positiv i et like antall intervaller.
- La $q_{2k,2n}$ være sannsynligheten for at posisjonen er positiv i nøyaktig $2k$ intervaller i perioden fra 0 til $2n$. Tipp hvilke av tallene

$$q_{0,2n}, q_{2,2n}, \dots, q_{2n-2,2n}, q_{2n,2n}$$

som er størst og hvilke som er minst.

- Målet er å finne et uttrykk for $q_{2k,2n}$. Vis først at for $1 \leq k \leq n - 1$ er

$$q_{2k,2n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k f_{2r} q_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} q_{2k,2n-2r}$$

der f er som tidligere i seksjonen. (Vink: Anta at $2r$ er første gang vandreren er tilbake i null og se på tilfellene der den første utflukten er positiv og negativ hver for seg.)

d) Vis ved induksjon på n at

$$q_{2k,2n} = p_{2k}p_{2n-2k} \quad \text{for } 0 \leq k \leq n$$

der p_m er som tidligere i seksjonen. (Vink: I tillegg til resultatet i c) får du bruk for lemma 12.12.1.)

e) Vis at

$$q_{2k,2n} = \frac{\binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}}$$

og regn ut $q_{2k,20}$ for $k = 0, 1, 2, \dots, 10$. Stemmer resultatet med det du tippet i b)?

f) Bruk Stirlings formel til å vise at $\frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}}$ er en god tilnærmelse til $q_{2k,2n}$ når k og $n-k$ er store. Forklar også hvorfor

$$\frac{1}{\pi n} \sum_{n/2 < k < \alpha n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}}$$

er en god tilnærmelse til sannsynligheten for at vandreren er på positiv side i en brøkdel av tiden som ligger mellom $1/2$ og α (anta at $1/2 < \alpha < 1$).

g) Forklar hvorfor

$$\frac{1}{\pi n} \sum_{n/2 < k < \alpha n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}} \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{1/2}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}.$$

h) La P_α være sannsynligheten for at vandreren er på positiv side en brøkdel av tiden som ligger mellom 0 og α . Forklar hvorfor

$$P_\alpha \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha}$$

når n er stor (i praksis er tilnærmelsen god allerede når n er rundt 20). Dette kalles den *første arcussinusloven*.

i) Tegn grafen til $g(\alpha) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha}$. Hva forteller grafen deg om problemet vårt?

2. Denne oppgaven er en fortsettelse av oppgave 1. Også i denne oppgaven arbeider vi med en én-dimensjonal virrevandring med $p = q = 1/2$.

a) Vis at $f_{2n} = p_{2n-2} - p_{2n}$.

b) Vis at sannsynligheten for at vandreren er negativ i alle tidspunktene $1, 2, \dots, 2n$ er $\frac{1}{2} p_{2n}$.

- c) Vis at sannsynligheten for at vandrerenes posisjon er ikke-positiv i alle tidspunktene $1, 2, 3, \dots, 2n$ er p_{2n} .
- d) La $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ være vandrerenes posisjon i tidspunktene $0, 1, 2, \dots, 2n$. Vi sier at han har sitt *første maksimum ved tiden* k dersom $x_k > x_i$ for $i < k$ og $x_k \geq x_i$ for $i \geq k$. Vis at sannsynligheten for at det første maksimumet er ved tiden k er

$$\frac{1}{2} p_{2m} p_{2n-2m} \quad \text{hvis} \quad \begin{cases} k = 2m & (m = 1, 2, \dots, n) \\ k = 2m + 1 & (m = 0, 1, \dots, n - 1) \end{cases}$$

og p_{2n} hvis $k = 0$.

- e) Sammenlign resultatet i d) med resultatet i oppgave 1. Hvor er den mest sannsynlige plasseringen til et maksimum? Formuler den *andre arcussinusloven* for plassering av maksimumspunkter.

12.13 Historisk epistel: Fra Madhava til Riemann

Beauty is the first test; there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

— G.H. Hardy (1877–1947),
A Mathematician's Apology

Zenon het en filosof som levde i den greske kolonien Elea i Sør-Italia rundt 450 f. Kr., og som huskes for sine paradokser om tid og bevegelse. Et av dem handler om Akilles og skilpadden som skal løpe om kapp. Akilles løper fortere enn skilpadden, men skilpadden har fått et forsprang. Slik argumenterer Zenon for å vise at Akilles ikke kan ta igjen skilpadden: Når Akilles når frem til stedet der skilpadden startet, har skilpadden flyttet seg til et nytt sted. Når Akilles når frem til dette stedet, har skilpadden igjen flyttet seg til et nytt sted. Slik kan vi holde på i det uendelige uten at Akilles tar skilpadden igjen!

Bak dette eksemplet skjuler det seg en uendelig geometrisk rekke. Hvis vi lar a være skilpaddens forsprang og r forholdet mellom de to hastighetene, ser vi at etter n steg i Zenons argument, vil Akilles ha tilbakelagt en strekning med lengde

$$a + ra + r^2a + r^3a + \dots + r^{n-1}a.$$

Lar vi n gå mot uendelig, vil denne størrelsen gå mot

$$a + ra + r^2a + r^3a + \dots + r^{n-1}a + \dots$$

som er en uendelig geometrisk rekke med sum $a/(1-r)$. Alt argumentet sier, er altså at Akilles ikke vil ta igjen skilpadden i løpet av de $a/(1-r)$ første metrene, og det er aldeles riktig (prøv å regne ut hvor Akilles tar igjen skilpadden uten å bruke rekker).

Zenon hadde en filosofisk hensikt med sine paradokser. Han var elev av Parmenides som hevdet at verden egentlig er fast og uforanderlig, og at de bevegelsene og forandringene vi ser rundt oss, skyldes sansebedrag. Gjennom sine paradokser forsøkte Zenon å vise at bevegelse er en logisk umulighet.

Av filosofiske og religiøse grunner var også de europeiske middelalderfilosofene opptatt av bevegelse og uendelighet, og denne interessen ledet dem naturlig til uendelige rekker. I eksempel 12.1.6 møtte vi Nicole Oresmes (ca. 1323–1382) elegante argument for at den harmoniske rekken divergerer, og det finnes flere eksempler av samme natur.

De europeiske middelaldermatematikerne ble imidlertid klart overgått av sine indiske kolleger. I provinsen Kerala på sørvestkysten av India vokste det i senmiddelalderen frem en imponerende matematisk skole. På grunn av sin beliggenhet har Kerala alltid vært et kulturelt møtepunkt – provinsen er det naturlige utgangspunktet for seilaser til den arabiske verden, og det var her Vasco da Gama steg i land i 1498 som den første europeiske sjøfareren til India.

Den fremste av Kerala-matematikerne var Madhava fra Sangamagramma (ca. 1340–1425). Dessverre er det bare Madhavas astronomiske verker som er bevart, og når det gjelder hans matematiske innsats, er vi avhengige av hans etterfølgeres omtale. I indisk tradisjon var det ikke uvanlig at man ga store læremestere æren for egne resultater, og av den grunn er det ikke alltid klart hvilke resultater som stammer fra Madhava og hvilke som ble funnet av hans etterfølgere. Det virker imidlertid klart at Madhava selv har funnet potensrekken for arcustangens

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

og det er også godt mulig at det var han som fant potensrekken for sinus og cosinus. Sannsynligvis beviste Madhava formelen for arcustangens ved først å dele opp vinkelen i mange små deler og deretter summere opp bidragene fra hver del. Det er i hvert fall et slikt bevis vi finner i Jyesthadevas verk *Yuktibhasa* fra rundt 1550 (beviset er gjengitt i Katz' bok [12]). Madhavas fremste etterfølger var Nilakantha (ca. 1445–ca. 1545), men også i hans tilfelle er det bare astronomiverkene som er bevart.

Det skulle gå rundt tre hundre år før europeiske matematikere gjenoppdaget Madhavas rekker og brakte utviklingen videre. Vi finner tidlige tilløp hos blant annet François Viète (1540–1603) og John Wallis (1616–1703), men utviklingen begynner for alvor i 1660-årene med Newton, Leibniz, Nicholas Mercator (1620–1687) og James Gregory (1637–1675). Newton oppdaget binomialrekken og rekkene til sinus og cosinus rundt 1665, Mercator publiserte rekken til $\ln(1+x)$ i 1668, og i et brev fra 1670 angir Gregory rekkene til arcussinus, arcustangens og tangens.

I våre dagers lærebøker blir rekker oftest behandlet etter derivasjon og integrasjon, men historisk vokste de to teoriene frem side om side, og rekketeorien var vel så mye en forutsetning for integrasjonsteorien som et resultat av den. Spesielt spilte rekkene en sentral rolle hos Newton som aldri nølte med å gi svaret på rekkeform dersom han ikke kunne finne et kortere uttrykk.

De første rekkene ble funnet ved hjelp av ulike knep, og en enhetlig fremstilling kom først i en avhandling av den engelske matematikeren Brook Taylor (1685–1731) i 1715. I denne avhandlingen stiller Taylor opp Taylor-rekkene

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

slik vi bruker dem i dag. Ideen var imidlertid kjent av Newton og Johann Bernoulli minst 20 år tidligere.

1700-tallet var potensrekkenes glansperiode. I hendene på matematikere som Euler og Lagrange utviklet de seg til å bli et fleksibelt verktøy som kunne brukes til å løse

en forbausende mangfoldighet av problemer. De fikk også en sentral rolle i forsøkene på å gi analysen et logisk fundament. For å forstå hvorfor tidens matematikere var så glade i potensrekker, må vi først se et eksempel på hvordan de brukte disse rekkene i regningene sine. Vi skal se på en forbløffende formel som kalles *Eulers produktformel for sinus*, og som sier at

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) \dots$$

der produktet fortsetter i det uendelige. I sin utledning tar Euler utgangspunkt i algebraens fundamentalteorem (3.5.1) (som riktignok ikke var bevist på hans tid!). Som vi husker, sier dette teoremet at et polynom $P(x)$ kan skrives som et produkt

$$P(x) = c(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

der c er en konstant og r_1, r_2, \dots, r_n er røttene. Antar vi at 0 er en rot med multiplisitet én, kan vi skrive

$$P(x) = cx(x - r_2) \dots (x - r_n).$$

Dette uttrykket kan omskrives til

$$P(x) = dx \left(1 - \frac{x}{r_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{r_n}\right)$$

der d er en annen konstant.

For Euler og hans samtidige var en potensrekke som

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

bare et polynom med uendelig mange ledd, og det var derfor naturlig å anta at formelen ovenfor også gjaldt for potensrekker. Siden $\sin x$ har nullpunktene $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$, betyr det at

$$\sin x = dx \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) \dots$$

for en konstant d . Ved å slå sammen to og to faktorer, får vi

$$\sin x = dx \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) \dots$$

Tenker vi oss at vi multipliserer ut parentesene på høyre side, ser vi at førstegradsleddet blir dx . Siden førstegradsleddet i potensrekken til $\sin x$ er x , betyr det at $d = 1$. Dermed har vi

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) \dots$$

som er Eulers produktformel. Ut av denne formelen hopper det diverse fascinerende relasjoner. Setter vi f.eks. $x = \frac{\pi}{2}$ og rydder opp litt i uttrykket, får vi en berømt produktformel for π oppkalt etter den engelske matematikeren John Wallis (1616–1703). For å få en annen relasjon tenker vi oss at vi multipliserer ut faktorene på høyre

side, og observerer at koeffisienten til x^3 da blir $-1/\pi^2 - 1/(2\pi)^2 - \dots - 1/(n\pi)^2 - \dots$. Fra potensrekken til $\sin x$, vet vi at denne koeffisienten skal være $-1/3! = -1/6$, og dermed får vi

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{(2\pi)^2} - \dots - \frac{1}{(n\pi)^2} - \dots$$

Ganger vi med $-\pi^2$, får vi

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ser vi på de andre odde koeffisientene, kan vi finne tilsvarende formler for $\sum 1/n^{2k}$ for alle naturlige tall k . (Utregningene blir stygge etter hvert, og selv Euler stoppet etter $k = 13$.)

Hva skal vi si om Eulers resonnement? Det er utvilsomt briljant, men det er også fullt av tvilsomme overganger. Euler bruker analysens fundamentalteorem som bare var en hypotese på hans tid; han antar at formelen som gjelder for polynomer, også vil gjelde for potensrekker; og han behandler uendelige produkter som om de var endelige. Både briljansen og de logiske bristene er typiske for tiden – man hadde en sterk tro på de matematiske ideenes allmenngyldighet og var ikke redd for å generalisere fra enkelttilfeller. For en matematiker med Eulers intuisjon ble svaret som oftest riktig (slik som i tilfellet ovenfor), men mindre matematikere kunne komme frem til merkelige resultater. Og selv Euler kunne finne på å bruke formelen for en geometrisk rekke til å skrive

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \dots = \frac{1}{1 - (-2)} = \frac{1}{3}.$$

Etter hvert ble et større opprydningsarbeid nødvendig, men før vi ser nærmere på det, skal vi hilse på Euler og noen av hans samtidige.

Leonhard Euler (1707–1783) var født i Basel i Sveits. Han var sønn av en prest, og etter farens ønske studerte han selv teologi i hjembyen. Faren var imidlertid også interessert i matematikk og fikk ordnet privatundervisning for sønnen hos bysbarnet Johann Bernoulli (1667–1748). Bernoulli var ikke alltid like gladlynt og imøtekommende, men han oppdaget raskt at hans nye elev hadde ualmannelige talenter. Nitten år gammel vant Euler det franske akademiets priskonkurranse om den beste plasseringen av skipsmaster – til tross for at han aldri hadde sett et skip!

Johann Bernoulli tilhørte en bemerkelsesverdig familie som kom til å yte betydelige bidrag til matematikkhistorien i tre generasjoner. To av sønnene hans, Niklaus (1695–1726) og Daniel (1700–1782), arbeidet ved det nye vitenskapsakademiet som Peter den store hadde opprettet i Sankt Petersburg, og i 1727 utnevnte akademiet Euler til professor i medisin og fysiologi – det var ingen stilling ledig i matematikk! Etter at Daniel var dratt tilbake til Sveits, overtok Euler i 1733 professoratet i matematikk. Samme år giftet han seg med Catharine Gsell, og de fikk etter hvert 13 barn.

Etter Peter den stores død i 1725 var det urolige tider i Russland med hyppige tronskifter og sterk strid om Peters brutale moderniseringspolitikk. Urolighetene tilspisset seg etter keiserinne Annas død i 1740, og året etter aksepterte Euler et tilbud fra Fredrik den store om å bli medlem av vitenskapsakademiet i Berlin. Euler var fra første stund den ledende vitenskapsmannen ved akademiet, men forholdet til kongen ble aldri godt – Euler hadde bevart sin kalvinistiske barnetro, og han foretrakk å dyrke grønnsaker og fortelle eventyr for barna fremfor å glitre ved Fredriks intellektuelle

sammenkomster. I 1762 fikk Russland igjen en sterk regent i Katarina den store, og i 1766 dro Euler tilbake til akademiet i Sankt Petersburg.



Figur 12.13.1. Leonhard Euler

Hele sitt voksne liv var Euler plaget av øyeproblemer. Han ble blind på det ene øyet i 1735, og i 1771 mistet han også synet på det andre. Blindheten ser ikke ut til å ha affisert ham stort – han fortsatte å publisere bøker og avhandlinger med samme hastighet til han døde i 1783.

Euler ble aldri den spirituelle hoffmannen som Fredrik den store ønsket, men som matematiker er det ingen som har vært så spirituell som ham – ingen har hatt et slikt øye for formler, og ingen har produsert så mange nye og overraskende sammenhenger. Han er den mest produktive av alle matematikere; hans samlede verk fyller mer enn 100 store bind som bugner med overraskende ideer og dristige regninger. Han arbeidet på alle felter av matematikken og ytet betydelige bidrag til samtlige.

Noe av årsaken til Eulers triumfer lå i hans enorme hukommelse og fenomenale regneferdighet. Han kunne utføre lange regnestykker i hodet, og forbløffede samtidige hevdet at han regnet like naturlig som mennesker puster og fugler flyr. Det påstås også at han kunne hele Vergils helteepos *Aeneiden* utenat, og at han kunne starte fra en hvilken som helst verselinje (et raskt overslag tilsier at *Aeneiden* har rundt 10 000 verselinjer!).

På 1700-tallet var matematisk analyse fortsatt et nytt og eksotisk forskningsområde, og det var et stort behov for lærebøker som kunne formidle den nye teorien til et større publikum. I tre store verk utgitt fra 1748 til 1770 tok Euler på seg denne oppgaven. Mens de to siste verkene, *Institutiones Calculi Differentialis* og *Institutiones Calculi Integralis*, omhandler differensial- og integralregning, finner vi rekkene i det første og innledende verket, *Introductio in Analysin Infinitorum*. For Euler var rekketeorien en slags algebra med uendelige summer og produkter, og i *Introductio* bruker han disse operasjonene til å bygge opp de funksjonene vi kjenner fra dagens matematikk. Fritt og uhemmet boltrer han seg med uendelig små størrelser som han setter lik eller ulik null etter behag, og han gjør ingen forskjell på divergente og konvergente rekker.

Som vi så i seksjon 6.5, var det allerede på denne tiden mange som følte et ubehag ved de uendelig små størrelsene, og som prøvde å finne et annet fundament for analysen. Et av de dristigste av disse forsøkene går tilbake til Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Eulers eneste konkurrent som tidens største matematiker. Selv om han

aldri forsøkte å bevise det, er det tydelig at Euler forestilte seg at enhver funksjon kan utvikles i en potensrekke (unntatt muligens i noen få punkter). I *Theorie des fonctions analytiques* fra 1797 tar Lagrange skrittet fullt ut og postulerer at enhver funksjon $f(x)$ kan utvikles som en uendelig potensrekke

$$f(x + i) = f(x) + p(x)i + q(x)i^2 + r(x)i^3 + \dots$$

Ved hjelp av denne rekkefremstillingen kan Lagrange definere den deriverte uten bruk av infinitesimaler – han setter rett og slett $f'(x) = p(x)$. Deretter påviser han at den annenderiverte (definert som den deriverte av den deriverte) er lik $2q(x)$, den tredjederiverte lik $6r(x)$ og så videre.

Hvilke argumenter hadde så Lagrange for at enhver funksjon kunne skrives som en sum av en potensrekke? I tillegg til erfaringen om at det var slik for alle funksjoner man var kommet borti, hadde Lagrange også en metode som tillot ham å beregne leddene $p(x), q(x), r(x), \dots$. Det som manglet var et bevis for at rekken virkelig konvergerer mot funksjonen. Merkelig som det kan virke for oss, hadde man på denne tiden ikke noe konvergensbegrep – man regnet med konvergente og divergente rekker om hverandre og etter de samme reglene. Ingen av Lagranges samtidige fant grunn til å tvile på at en funksjon kunne utvikles i en potensrekke, men de mislikte hans nye og uvante metoder av andre grunner. Først hos Cauchy finner vi et eksempel på en funksjon som ikke kan skrives som en potensrekke.

Selv om Lagranges forsøk på å basere hele integral- og differensialregningen på potensrekker var lite vellykket, har mye av det andre han gjorde blitt stående. Som Euler arbeidet han i alle deler av matematikken og satte spor etter seg over alt. I algebræen var han en av Abels og Galois' nærmeste forløpere og inspirerte dem begge; i tallteorien viste han at ethvert helt tall kan skrives som en sum av fire kvadrattall; i analysen videreførte han variasjonsregningen og ga betydelige bidrag til teorien for differensialligninger. Men hans aller betydeligste innsats finner vi nok i mekanikken der hans *Mécanique analytique* fra 1788 gir en omforming av Newtons ideer som har vist seg å være uhyre fruktbar.

Lagrange kom fra en fransk familie, men han var født i Torino i Nord-Italia. Bare 19 år gammel ble han professor ved militærakademiet i hjembyen, men han følte seg etter hvert vitenskapelig isolert i Torino, og da Euler i 1766 flyttet tilbake til Sankt Petersburg, overtok Lagrange hans stilling ved akademiet i Berlin. Etter Fredrik den stores død i 1786 flyttet Lagrange videre til Paris. I motsetning til mange av sine kolleger kom den stillfarne og tilbakeholdne Lagrange gjennom den franske revolusjonen uten altfor mange dramatiske opplevelser, men de stadige stridighetene og den vilkårlige terroren gjorde et sterkt inntrykk på ham. I 1792 giftet han seg med den 17 år gamle Renée Lemonnier som hjalp ham å komme over fortvilelsen og svartsynet som ofte plaget ham. Etter terroren var Lagrange med på å bygge opp École Polytechnique til Frankrikes ledende utdannelseinstitusjon for ingeniørfag og naturvitenskap.

Fordi de manglet konvergensbegrepet, fikk 1700-talls matematikerne aldri gitt rekketeorien et logisk fundament. Det er først i en avhandling av Gauss fra 1812 at begrepet får en skikkelig definisjon. I sine forelesninger ved École Polytechnique i 1820-årene la Cauchy stor vekt på konvergens og utviklet en omfattende teori for konvergente rekker. Som vi så i seksjon 11.5, er ikke alle Cauchys resultater korrekte, men hans innsats fikk likevel stor betydning fordi han pekte på de riktige problemstillingene og utviklet de grunnleggende teknikkene. I en avhandling fra 1826 videreførte Abel Cauchys ideer og ga den første stringente behandlingen av binomialrekkene (i

denne avhandlingen finner vi også Abels teorem som har spilt en sentral rolle i dette kapitlet).

Det var ikke bare behovet for å gi analysen et skikkelig fundament som ledet matematikerne til å se nærmere på rekketeorien. På begynnelsen av 1800-tallet dukket det opp en ny form for rekker. Fourier hadde oppdaget at funksjoner kunne skrives som uendelige summer

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

av trigonometriske funksjoner, og han hadde funnet en metode til å bestemme koeffisientene a_n og b_n . Den nye oppdagelsen ble møtt med mistro, og spesielt hadde Lagrange vondt for å akseptere Fouriers påstander. Fourier selv ga ingen beviser, og det var først gjennom Dirichlets arbeider at Fourier-rekkene fikk et sikkert fundament.

Fourier-rekkene var potensrekkene overlegne når det gjaldt å løse fysiske problemer, men de hadde også sine ulemper – de lot seg ikke behandle med den samme omtrentligheten som potensrekkene. Som vi har sett, kan man derivere potensrekker ledd for ledd uten problemer, men prøver man det samme med Fourier-rekker, kommer man raskt i vanskeligheter. For å regne trygt med Fourier-rekker er man helt avhengig av en skikkelig teori for konvergente rekker. Også på en annen måte fikk Fourier-rekkene stor innflytelse på analysens utvikling – de gjorde det naturlig å regne med mye styggere funksjoner enn før. Mens en funksjon definert av en potensrekke er uendelig mange ganger deriverbar, behøver summen til en Fourier-rekke ikke en gang å være kontinuerlig. Studiet av Fourier-rekker førte etter hvert til studiet av mer generelle trigonometriske rekker, og dermed til fenomener som ingensteds deriverbare funksjoner. Den abstrakte mengdelæren som ble skapt av Georg Cantor (1845–1918) på slutten av 1800-tallet, vokste naturlig ut av studiet av visse unntaksmengder i teorien for trigonometriske rekker.

I dag er bildet et helt annet enn på Lagranges tid. De funksjonene som kan fremstilles av potensrekker, utgjør en viktig og interessant, men ganske liten klasse. For å løse problemer som oppstår i fysikk og andre fag, har man gått i motsatt retning og innført forskjellige typer *generaliserte funksjoner*. Disse generaliserte funksjonene tillater en å derivere og integrere størrelser som man ellers ikke kunne ha regnet med, og å løse differensialligninger som man tidligere ikke har fått tak på.

Hittil har vi stort sett holdt oss til bruken av rekker i integral- og differensialregningen, men som vi har sett tidligere i dette kapitlet, finnes det også anvendelser til andre deler av matematikken. Vi skal avslutte med å se på en forbausende sammenheng mellom rekker og tallteori. La oss først gå tilbake til Euler og hans forunderlige formler.

Euler brukte potensrekker som et tallteoretisk verktøy på flere måter. I 1718 hadde Abraham de Moivre brukt genererende funksjoner til å finne formelen for det n -te Fibonacci-tallet, og Euler videreutviklet denne ideen til et slagkraftig verktøy til å studere tallteoretiske partisjonsproblemer. Langt viktigere var imidlertid en forbindelse han fant mellom funksjonen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{der } s > 1,$$

og primtallene (ζ er den greske bokstaven zeta). Regner vi formelt uten å ta hensyn til konvergensspørsmål, er denne sammenhengen lett å forstå; ifølge aritmetikkens

fundamentalteorem (1.1.1) er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \dots)$$

der uttrykket på venstre side betyr produktet av $(1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \dots)$ for alle primtall p (tenk på hva som skjer når du multipliserer ut parentesene på høyre side). Summerer vi den geometriske rekken $1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \dots$, ser vi at formelen også kan skrives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}.$$

Ved hjelp av denne formelen kunne Euler gi et nytt bevis for at det finnes uendelig mange primtall, og han kunne også vise at $\sum_p 1/p$ (der summen løper over alle primtall) divergerer.

Sprengkraften i Eulers formel ble klar i 1837 da Dirichlet forfinet Eulers bevis for at det finnes uendelig mange primtall til å vise at hvis a og b ikke har felles faktorer, så finnes det alltid uendelig mange primtall på formen $an + b$, der $n \in \mathbb{Z}$. Det store gjennombruddet kom imidlertid med en avhandling av Riemann i 1859. Vi vet at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ konvergerer når $s > 1$, og at funksjonen $\zeta(s)$ derfor er definert for $s > 1$. Riemann viste at det finnes en naturlig utvidelse av ζ som er definert for alle komplekse tall s bortsett fra $s = 1$. Uten å gi fullstendige bevis, påviste han også at det er en nær sammenheng mellom nullpunktene til $\zeta(s)$ og fordelingen av primtallene.

Det er lett å vise at $\zeta(s) = 0$ når $s = -2, -4, -6, \dots$, men spørsmålet er hvor de andre nullpunktene ligger. Riemann fremsatte en hypotese om at de alle har imaginær del $1/2$ og derfor ligger på den samme rette linjen i det komplekse planet (*den kritiske linjen*). Riemanns hypotese er fortsatt ikke bevist (eller motbevist), og regnes vanligvis som det viktigste, uløste problemet i matematikken. Men selv om hypotesen ikke er fullstendig løst, har delresultater hatt stor betydning. I 1896 viste Jacques Hadamard (1865–1963) og Charles de la Vallée Poussin (1866–1962) uavhengig av hverandre at ζ -funksjonen ikke har noen nullpunkter med realdel 1, og dermed fulgte også primtallsatsen som sier at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$$

der $\pi(x)$ er antall primtall mindre enn eller lik x . Et av de største gjennombruddene siden den gang kom i 1942 da Atle Selberg (1917–2007) i sin doktoravhandling viste at en positiv prosentdel av de ikke-trivielle nullpunktene ligger på den kritiske linjen (siden det finnes uendelig mange slike nullpunkter, må man være litt forsiktig med hvordan man regner prosent). Ved hjelp av andre metoder viste den amerikanske matematikeren Norman Levinson i 1974 at minst $1/3$ av nullpunktene ligger på den kritiske linjen, og denne rekorden er siden blitt forbedret til 40 %. Men siden det finnes uendelig mange nullpunkter, er ikke en gang 100 % godt nok til å etablere Riemanns hypotese!

Det er ingen tilfeldighet at det var Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) som formulerte den viktigste, uløste hypotesen i matematikken. Riemann er en av de dypsindigste og mest visjonære matematikerne noensinne og kanskje den som har hatt størst innflytelse på matematikkens utvikling i de siste århundrene. Han

var sønn av en prest og ble født i en landsby noen mil sørøst for Hamburg. Allerede som skolegutt viste han gode evner for matematikk, men han begynte likevel å studere teologi etter farens ønske. Det skulle ikke gå lenge før han skiftet studium, og i 1847 flyttet han fra Göttingen til det rikere matematiske miljøet i Berlin. Her traff han Dirichlet som fikk stor innflytelse på hans tankesett. I 1849 flyttet han tilbake til Göttingen der han fulgte Wilhelm Webers fysikkforelesninger med stor interesse.

I 1851 avla Riemann doktorgraden i Göttingen med en avhandling om kompleks funksjonsteori. I avhandlingen kombinerte han Cauchys analytiske teknikker med Gauss' geometriske ideer på et vis som imponerte selv Gauss. To år senere passerte Riemann neste hinder i det akademiske kappløpet – «habilitation», en slags doktorgrad nummer to som åpnet muligheten for en akademisk stilling. I denne avhandlingen studerte Riemann konvergens av trigonometriske rekker, og innførte i den forbindelse Riemann-integralet som vi studerte i kapittel 8. Til en habilitation hørte også en forelesning. Riemann hadde levert inn tre forslag til tema, og Gauss, som ledet kommisjonen, valgte det tredje «om geometriens grunnlag». Riemann hadde håpet på de to første som handlet om elektrisitetslære – et tema han hadde fulgt opp etter Webers forelesninger. Geometriens grunnlag var et farlig emne – Gauss hadde grublet over dette temaet hele sitt liv selv om han ikke hadde publisert mye. Riemanns forelesning ble likevel en formidabel suksess – i korte trekk skisserte han et geometrisk program som kom til å revolusjonere både geometrien og fysikken. Det var Riemanns geometri Einstein bygde på da han utformet sin generelle relativitetsteori i begynnelsen av forrige århundre.

Riemann var nær knyttet til sin familie. Moren døde tidlig, men han hadde jevnlig brevkontakt med faren, broren og de fire søstrene. Midt på 1850-tallet døde både faren og broren, og Riemann måtte overta ansvaret for søstrene. Det var vanskelige år – Riemann hadde bare en underordnet og dårlig betalt stilling ved universitetet i Göttingen, og han slet for å få endene til å møtes. Men de matematiske fremskrittene fortsatte, og i 1857 revolusjonerte Riemann et nytt emne med sin avhandling *Theorie der Abelschen Funktionen*. Ved å bruke flertydige komplekse funksjoner (*Riemann-flater*) bygde han opp en geometrisk teori som gir en anskuelig tolkning av Abels addisjonsteorem og samtidig generaliserer Abels arbeider om elliptiske funksjoner.

Riemanns økonomiske problemer løste seg i 1859, men på den måten han aller minst ønsket – hans venn og forbilde Dirichlet døde, og Riemann ble utnevnt til hans etterfølger. Omtrent samtidig ble han valgt inn som korresponderende medlem ved akademiet i Berlin. Som nyvalgt medlem måtte han sende en rapport om et nytt vitenskapelig arbeid, og for tredje gang gjorde Riemann et akademisk pliktøp til en vitenskapelig milestein. Rapporten heter *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* og inneholder hans visjoner om sammenhengen mellom primtallenes fordeling og ζ -funksjonen.

I 1862 giftet Riemann seg med Elise Koch, og året etter fikk de en datter. Samtidig begynte det å gå nedover med Riemanns helse – høsten 1862 fikk han en blodstyrting, og det ble snart klart at han hadde tuberkulose. Han måtte søke til varmere trakter, og siste fire årene levde han hovedsakelig i Italia. Han døde ved Lago Maggiore noen uker før han ville ha fylt 40 år.

I tillegg til temaene vi allerede har nevnt, arbeidet Riemann med en del emner av mer fysisk karakter. I et av disse arbeidene studerte han hvordan gass strømmer gjennom et tynt rør. Dette problemet leder til en klasse differensialligninger som kalles hyperbolske konserveringslover. Til tross for sitt uskyldige utseende har disse differen-

sialligningene en usedvanlig komplisert oppførsel, og de er fortsatt ikke fullstendig forstått. Det viser seg at slike hyperbolske konserveringslover er en viktig ingrediens i de ligningssystemene som beskriver hvordan olje og gass strømmer gjennom et reservoar, og de har derfor vært mye studert i norske fagmiljøer det siste tiåret.

Vil du vite mer om rekker, gir Strombergs bok [20] en generell innføring i forlengelse av vår fremstilling. Er du blitt fascinert av genererende funksjoner, finner du gode fremstillinger hos Graham, Knuth og Patashnik [8] og Wilf [21] (deler av den siste boken forutsetter kunnskaper om kompleks funksjonsteori). Liker du sannsynlighetsteorien i seksjon *12.12, kan du finne mer informasjon på samme nivå i bøkene til Chung [1] og Grimmett og Welsh [10]. Boken til Feller [7] er en klassiker som fortsatt er vel verd å lese, men den egner seg ikke som en første innføring.

Du finner litt om Kerala-skolen i bøkene til Joseph [11] og Katz [12], men vil du vite mer, må du gå til spesiallitteratur som [15] og [16]. En systematisk gjennomgang av europeisk rekketeori på 1600-tallet finner du hos Edwards [5]. Dunhams bok [3] inneholder en del morsomt og lesbart stoff om Eulers rekketeori, og det kan også være interessant å kikke litt på Stillwells bok [19] og på Eulers egen fremstilling [6]. Det er mange måter å rettfærdiggjøre Eulers produktformel på; et kortfattet bevis som ikke forutsetter mer enn du har lært i denne boken, finner du i Kirkebøs artikkel [13]. Den historiske utviklingen fra Euler til Riemann er godt beskrevet hos Grattan-Guinness [9], og du finner en kort biografi av Riemann i Monastyrskys bok [14] (sammen med mye utilgjengelig matematikk). Det finnes minst fire populærvitenskapelige bøker om Riemanns hypotese [2], [4], [17], [18].

Litteratur

- [1] Chung, Kai-Lang: *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [2] Derbyshire, John: *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Joseph Henry Press, 2003
- [3] Dunham, William: *Journey through Genius*, Penguin Books, London, 1990.
- [4] du Sautoy, Marcus: *The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*, HarperCollins, 2003.
- [5] Edwards, C.H.: *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [6] Euler, Leonhard: *Introduction to Analysis of the Infinite*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [7] Feller, William: *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 3rd Edition, Wiley, New York, 1988.
- [8] Graham, R.L., D.E. Knuth og O. Patashnik: *Concrete Mathematics*, 2nd Edition, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1994.
- [9] Grattan-Guinness, Ivor: *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1970.
- [10] Grimmett, Geoffrey og Dominic Welsh: *Probability. An Introduction*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

- [11] Joseph, George Gheverghese: *The Crest of the Peacock*, Penguin Books, London, 1991.
- [12] Katz, Victor J.: *A History of Mathematics*, 3rd Edition, Addison Wesley, Boston, 2009.
- [13] Kirkebø, Carl Peter: «Eulers uendelige produkt for sinus», *NORMAT* 42 (1994), 40–41.
- [14] Monastyrsky, Michael: *Riemann, Topology and Physics*, Birkhäuser, Boston, 1987.
- [15] Rajagopal, C.T. og M.S. Rangachari: «On an Untapped Source of Medieval Keralese Mathematics», *Archive for the History of Exact Sciences*, 18 (1978), 89–101.
- [16] Rajagopal, C.T. og M.S. Rangachari: «On Medieval Kerala Mathematics», *Archive for the History of Exact Sciences*, 35 (1986), 91–99.
- [17] Rockmore, Dan: *Stalking the Riemann Hypothesis. The Quest to Find the Hidden Law of Prime Numbers*, Pantheon Books, 2005.
- [18] Sabbagh, Karl: *The Riemann Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem of Mathematics*, Farrar, Strauss and Giroux, 2003.
- [19] Stillwell, John: *Mathematics and its History*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [20] Stromberg, Karl R.: *Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth, Belmont, 1981.
- [21] Wilf, Herbert S.: *Generatingfunctionology*, 2nd edition, Academic Press, Boston, 1994.

Fasit

Fasit til innledningen

1. Like mye 2. Hvit 3. Nei 4. 42 134 (generelt $N - 1$) 5. Ja 6. 4

Fasit til seksjon 1.1

1. a) $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 37$ b) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ c) $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ d) $3^3 \cdot 19$ e) 773 3. a) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$ b) $1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$ c) $\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} = \frac{49}{10}$
d) $(2^{1+1} + 2^{1+2} + 2^{1+3}) + (2^{2+1} + 2^{2+2} + 2^{2+3}) + (2^{3+1} + 2^{3+2} + 2^{3+3}) = 196$ 5. a)
 $\sum_{n=1}^5 n$ b) $\sum_{n=2}^6 (2n+1)$ c) $\sum_{n=1}^{16} 4n$ d) $\sum_{n=0}^7 2^n$ e) $\sum_{n=0}^5 (-1/3)^n$ 7. a) $\sum_{m=0}^5 ma^{m+1}$ b) $\sum_{m=0}^3 x^m$
c) $\sum_{k=20}^{25} a^{k-1}$ d) $\sum_{n=0}^{20} 81 \cdot 3^n$ 13. Barna er 2, 2 og 9 år gamle, og Marit bor i nummer 13.

Fasit til seksjon 1.2

21. 43

Fasit til seksjon 1.3

1. $\binom{13}{6} = 1716$ 3. $\frac{10!}{(2!)^2} = 907\,200$ 5. $\binom{30}{3}$ 7. $\binom{48}{6}$ 11. a) $\binom{34}{7} = 5\,379\,616$
b) $\binom{28}{7} = 1\,184\,040$ 13. $\binom{22}{7}$ 14. $\binom{6}{2} = 15$ 15. $\binom{18}{6}$ c) $1 - \frac{\binom{28}{7}}{\binom{34}{7}} \approx 0.78$ 17.
a) $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ 19. a) 2^n , $\binom{n}{k}$ b) 3^n $\left(= \sum_{j=0}^n 2^j \binom{n}{j} \right)$ 21. $1 - \frac{\binom{490}{50}}{\binom{500}{50}} \approx$
0.65 23. 0.993 27. $\frac{r(1-r)^{k-1}}{1-(1-r)^N}$ der $r = \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}}$

Fasit til seksjon 1.4

1. Linjene er 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1 og 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.
 3. a) $a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$ b) $16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$
 c) $17 + 12\sqrt{2}$ d) $76 - 44\sqrt{3}$ 5. $3^3 \binom{50}{47} = 3^3 \binom{50}{3} = 529\,200$ 11. d) 0.5005

Fasit til seksjon 1.5

1. a) $3x^2 + 11x + 38 + \frac{110}{x-3}$ b) $x^2 - 5x + 13 + \frac{-28x + 11}{x^2 + 2x - 1}$ 3. a) $x = -2$ og $x = -3$

Fasit til seksjon 2.1

1. a) $[2, 6]$ b) $[3, 4]$ c) $(-3, 4)$ d) $\{4, 5, 6, 7\}$ e) \mathbb{R} f) $[3, 4]$ 3. a) $(-2, 3]$ b) $(-3, 3)$
 c) $(-\infty, -4)$ d) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e) $(0, \infty)$ f) $[-5, -2)$ 5. a) $x > -1/2$ b) $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{17}) \cup (0, 2) \cup (1 + \sqrt{17}, \infty)$

Fasit til seksjon 2.2

3. a) rasjonal b) irrasjonal c) rasjonal d) irrasjonal e) rasjonal 5. a) gal b) sann c) gal
 d) sann e) sann 11. Nei, velg $x = \frac{\pi}{3}$.

Fasit til seksjon 2.3

1. a) oppad og nedad begrenset b) nedad begrenset c) ubegrenset d) ubegrenset e) oppad begrenset
 f) oppad begrenset g) ubegrenset 3. a) nedre -1 , øvre 2 b) nedre 1 , ingen øvre c)
 nedre -3 , øvre 9 d) nedre e^{-2} , øvre e^3 e) nedre $-\sqrt{3}$, øvre $\sqrt{3}$ 5. a) sann b) gal c) sann
 d) gal

Fasit til seksjon 3.1

1. a) $7 - 3i$ b) $-3 + 11i$ c) $12 + 5i$ d) $13 + 11i$ e) $2 + 10i$ f) $\frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$ g) $-\frac{33}{41} - \frac{10}{41}i$ h)
 $\frac{5+i}{26}$ i) $\frac{7-2i}{53}$ 3. a) $2 - 3i$ b) $4 + 6i$ c) $-7 + 8i$ d) $-2 + 6i$ e) $-3 + 4i$ f) $-\frac{5}{2} + \frac{7}{2}i$
 5. a) $z = 2 - \frac{3}{2}i$ b) $\frac{-3+i}{2}$ c) $\frac{-7+9i}{10}$ d) $\frac{-17+31i}{50}$ 7. $z = \frac{5-i}{2}$, $w = \frac{3+i}{2}$

Fasit til seksjon 3.2

1. Punktene $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ og $(-1, -1)$. 3. a) $r = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$ b) $r = 1, \theta = \frac{3\pi}{2}$ c)

$r = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$ d) $r = 3, \theta = \pi$ e) $r = 2, \theta = \frac{\pi}{3}$ 5. a) $4i$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ c) $\sqrt{3} + i$ d) $-\frac{i}{2}$ 7. a) $6i$ b) $4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$ c) $-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$ 11. a) Utsiden av sirkelen med sentrum

i $(1, 0)$ og radius 1. b) Parabelen $x = y^2$ (toppunkt i origo, akse langs den positive x -aksen). c) Sirkelen med sentrum i $(\frac{5}{2}, 0)$ og radius $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

13. a) $zw = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$, $\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$. b) For z : $r = 2, \theta = \frac{\pi}{3}$. For w :

$\rho = \sqrt{2}, \phi = \frac{\pi}{4}$ c) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

16. b) Anta at en trekant er innskrevet i en sirkel, og at to av hjørnene ligger på samme diameter. Da er den tredje vinkelen rett.

Fasit til seksjon 3.3

1. a) i b) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ 3. a) $2e^{i\pi/3}$ b) $4\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ c) $23e^{i\pi}$ 5. a) $zw = 8e^{i5\pi/12}$, $z/w = \frac{1}{2}e^{i\pi/12}$ b) $zw = 40e^{-i\pi/12}$, $z/w = \frac{5}{8}e^{-i7\pi/12}$ 7. $\cos 4\theta = \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta$, $\sin 4\theta = 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta$

Fasit til seksjon 3.4

1. a) $w_0 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}$, $w_1 = e^{i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}$ b) $w_0 = e^{i3\pi/4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}$,

$w_0 = e^{i7\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}$ c) $w_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i$, $w_1 = 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i$ d) $w_0 =$

$\sqrt{2}e^{i\pi/3} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}i}{2}$, $w_1 = \sqrt{2}e^{i4\pi/3} = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}i}{2}$

3. a) $w_0 = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $w_1 = e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $w_2 = e^{i3\pi/2} = -i$ b) $w_0 =$

$e^{i\pi/2} = i$, $w_1 = e^{i7\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $w_2 = e^{i11\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ c) $w_0 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}$, $w_1 =$

$e^{i11\pi/12} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$, $w_2 = e^{i19\pi/12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i$ 5.

$z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/12}$, $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i3\pi/4}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i17\pi/12}$ 7. $z_0 = 2i$, $z_1 = -\sqrt{3} - i$, $z_2 =$

$\sqrt{3} - i$ **9. a)** $x = -1 \pm i\sqrt{3}$ **b)** $x = -\frac{3}{5} \pm i\frac{4}{5}$ **c)** $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$ **11. a)** $z = -1 \pm 2i\sqrt{2}$
b) $z = i(\pm\sqrt{6} - 1)$ **c)** $z = -1 \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **d)** $z = i$ og $z = -1$ **13.** $z = \pm 1 + 2i$
15. a) $0, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}i$ **b)** $\pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **19. a)** $\frac{w^k - 1}{w^k + 1}$ for $k = 1, 2, 3, 4, 5$ **b)** $\frac{w_n^k - 1}{w_n^k + 1}$ for
 $k = 1, 2, \dots, n$ der $w_n = e^{2\pi i/n}$ **c)** Alle ligger på den imaginære akse.

Fasit til seksjon 3.5

1. a) $(z+2)(z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3}) = (z+2)(z^2-2z+4)$ **b)** $(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = (z-1)(z+1)(z^2+1)$ **c)** $(z+1) \cdot (z - e^{\pi i/5}) \cdot (z - e^{3\pi i/5}) \cdot (z - e^{7\pi i/5}) \cdot (z - e^{9\pi i/5})$
 $= (z+1) \cdot (z^2 - 2\cos(\pi/5)z + 1) \cdot (z^2 - 2\cos(3\pi/5)z + 1)$ **3. a)** $(z^2+1)^2 = (z+i)^2(z-i)^2$ **b)**
 $z(z^2+2z+4) = z(z+1-i\sqrt{3})(z+1+i\sqrt{3})$ **c)** $(z - \sqrt[3]{2})^2(z^2 + \sqrt[3]{2}z + 2^{2/3})^2 = (z - \sqrt[3]{2})^2(z + \sqrt[3]{2}/2 + \frac{i}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{2})^2(z + \sqrt[3]{2}/2 - \frac{i}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{2})^2$ **5. b)** $(z-i)(z+i)(z+1+i\sqrt{2})(z+1-i\sqrt{2}) = (z^2+1)(z^2+2z+3)$ **7. b)** Røtter: $1 + 2i, -4$. Faktorisering: $(z+4)(z-1+2i)(z-1-2i)$
9. $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **11.** $-1, \pm i$ **13. a)** $z_0 = \sqrt{2}e^{\pi i/3} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$, $z_1 = \sqrt{2}e^{-2\pi i/3} = -\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$ **b)** $e^{\pm\pi i/3}, e^{\pm 2\pi i/3}, (z^2+z+1)(z^2-z+1)$

Fasit til seksjon 4.1

1. a) $x_n = C(-3)^n$ **b)** $x_n = C(-1)^n + D4^n$ **c)** $x_n = C(-7)^n + D2^n$ **3. a)** $x_n = (C + nD)(-2)^n$ **b)** $x_n = C(-1+i\sqrt{3})^n + D(-1-i\sqrt{3})^n$, $x_n = A2^n \cos(2\pi n/3) + B2^n \sin(2\pi n/3)$
c) $x_n = C(3i)^n + D(-3i)^n$, $x_n = A3^n \cos(\pi n/2) + B3^n \sin(\pi n/2)$ **d)** $(C+nD)(3/2)^n$ **5.**
a) $x_n = 4(-3)^n + 5 \cdot 2^n$ **b)** $x_n = 2 \cos(\pi n/3)$ **c)** $x_n = (2-3n)(-1)^n$ **d)** $x_n = (\sqrt{2})^n (\cos(3n\pi/4) - \sin(3n\pi/4))$ **7. a)** $a_n = \frac{9}{2\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$ **c)** 9 **9. a)** $a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$ **11.** $\frac{1 - (19/18)^{90}}{1 - (19/18)^{100}} \approx 0.58$ **13. a)** $x_n = C(-1)^n + D(5/4)^n$ **b)** $x_n = -10(-1)^n + 200(5/4)^n \rightarrow \infty$ **c)** $x_n = 230 - 40(-3/4)^n \rightarrow 230$. Blir færre enn 3/4 smittet, går antall syke mot null når $n \rightarrow \infty$ **15.** $\frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} \right]$ **17. e)**
 $x_n = A2^n + B2^n \cos\left(2n\frac{\pi}{3}\right) + C2^n \sin\left(2n\frac{\pi}{3}\right)$

Fasit til seksjon 4.2

1. a) $x_n = -n - 1 + C2^n$ b) $x_n = -(7/4) + C(-1)^n + D3^n$ 3. a) $x_n = 2n + C + D(-2)^n$
 b) $x_n = 4^n/13 + C \sin(n\pi/3) + D \cos(n\pi/3)$ c) $x_n = 2n \cdot 3^{n-1} + C3^n + D2^n$ d) $x_n = (n^2/18 + Cn + D) \cdot 3^n$ 5. a) $x_n = 6 \cdot 2^n - 2$ b) $x_n = 3n + 4 - 4^n$ c) $x_n = n - 3 + 2(-3)^n$
 d) $x_n = 1 + (\sqrt{2})^n \cos(3n\pi/4) + (\sqrt{2})^n \sin(3n\pi/4)$ 7. $x_n = 3^n - 2^n + (-1)^n + n + 2$ 9. $x_n = \left(\frac{n^2}{8} + \frac{3n}{8} - 1\right)2^n + 1$ 11. $\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$ 13. $\frac{50(2 + (1,06)^n)}{3}$ 15.

$x_n = r^n(10 + 3 \cos(n\pi/2) + 4 \sin(n\pi/2))$ 17. b) $x_n = \left(L - \frac{a}{r-1}\right)r^n + \frac{a}{r-1}$ c)

$a = \frac{Lr^{240}(r-1)}{r^{240}-1}$ d) 515830 19. a) $x_n = (a - 6000000)1.05^n + 200000n + 6000000$ b) $a \geq 6000000$ c) 4604740

21. b) $c_n = (9/10)^n + 1/10$, 8 uker 23. b) $x_n = \frac{400}{19} - \left(\frac{2}{5}\right)^n \left(\frac{400}{19} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1600\sqrt{3}}{57} \sin \frac{n\pi}{3}\right)$

c) $x_n = \frac{400}{19} - \left(\frac{2}{5}\right)^n \left(\frac{400}{19} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1600\sqrt{3}}{57} \sin \frac{n\pi}{3}\right)$. Sykdomprosenten stabiliserer seg på $\frac{400}{19} \approx 21$.

25. a) $b_n = \frac{(5 - 5^{-n})b}{4}$ b) $c_n = b(5/6 - 3 \cdot 5^{-n}/2 + 2 \cdot 10^{-n}/3)$ $b = 120$ 27. a) k^n b) $a_n =$

$(k-1)((k-1)^{n-1} + (-1)^n)$ 29. d) $x_n = C + D(-1)^n + n/2$, $v_n = \frac{C + D(-1)^n + n/2}{n+2}$ e)

$v_k = \frac{k + 1/2 - 1/2(-1)^k}{2(k+2)}$ f)

k	v_k	k	v_k
0	0.000	8	0.400
1	0.333	9	0.455
2	0.250	10	0.417
3	0.400	11	0.462
4	0.333	12	0.429
5	0.429	13	0.467
6	0.375	14	0.438
7	0.444	15	0.471

Fasit til seksjon 4.3

1. a) $8/3$ b) 0 c) ∞ d) $6/5$ e) $1/6$ 3. a) 0 b) 2 c) $1/2$ d) 1 7. a) $x_n = 3^{-n+1}$

9. c) $1/3$ d) $1/4$ 13. For eksempel a) $a_n = 1/n^2$, $b_n = 1/n$ b) $a_n = 1/n$, $b_n = 1/n^2$ c)

$a_n = 1/n$, $b_n = 1/n$ 17. 2 19. Følgen konvergerer for $a \leq 2$. Grenseverdien er 2 når $a = 2$

og 1 ellers. 21. b) For eksempel (i) $x_n = 1/n$ og (ii) $x_n = n$ c) $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Fasit til seksjon 5.1

- 1.a) $D_f = [-1, \infty)$ b) $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ c) $D_f = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (2n\pi, (2n+1)\pi)$
 d) alle x unntatt de som er på formen $\pm\sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ der $k = 0, 1, 2, 3, \dots$
 e) $D_f = [-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ 3. a) $[0, \infty)$ b) $[-1, 1]$ c) $[0, \infty)$ d) $[\frac{1}{2}, 1)$
 9. a) Ingen b) 0 c) 0 d) ingen e) alle
 11. a) For eksempel $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \geq a \\ 0 & \text{hvis } x < a \end{cases}$ 15. f) Det finnes en $b > 0$ slik at $|a| > b$ for alle $a \in A$.

Fasit til seksjon 5.2

7. b) Ja

Fasit til seksjon 5.4

1. a) 7 b) $1/7$ c) $-3/5$ 3. a) $-\frac{7}{2}$ b) -2 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ 9. e) i) 3 ii) 1 iii) $\frac{1}{2}$

Fasit til seksjon 6.1

1. a) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ b) $f'(x) = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} + e^x$
 c) $f'(x) = \frac{-3x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + x \cos x - 4 \sin x}{x^5}$ d) $f'(x) = \frac{2}{x}$ e) $f'(x) = -\sin(e^x) \cdot e^x$
 f) $f'(x) = -\frac{2x \sin(x^2)}{\cos^2(\cos x^2)}$ g) $f'(x) = \cos(\ln x) - \sin(\ln x)$
 h) $f'(x) = \frac{-x^2 \sin \sqrt{x} - 4x^{3/2} \cos \sqrt{x}}{2x^{9/2}}$ i) $f'(x) = \frac{(1-x) \ln(\sin x) - \tan x + x \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos^2 x}}{e^x}$
 3. a) $f'(x) = \left(\frac{2}{x} - 4 \tan x + 1\right) x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x$ b) $f'(x) = \left(\frac{1}{17} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + 2x + \frac{1}{\sin x \cos x}\right) \cdot \sqrt[17]{\sin x} \cdot e^{x^2} \cdot \tan x$ c) $f'(x) = (\ln x + 1)x^x$ d) $f'(x) = \left(-2 \sin x \cdot \ln x + \frac{2}{x} \cos x + \frac{1}{x \ln x}\right) \cdot x^{2 \cos x} \cdot \ln x$
 5. 0.31 m^3 13. Nei 17. $-4e^x \sin x$

Fasit til seksjon 6.2

1. a) Voksende på $[3, \infty)$, avtagende på $(-\infty, 3]$ b) Voksende på $(-\infty, 0]$, avtagende på $[0, \infty)$.

c) Voksende på intervallene: $[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$, $[\sqrt{(2k - \frac{1}{2})\pi}, \sqrt{(2k + \frac{1}{2})\pi}]$, der $k = 1, 2, 3, \dots$

og $[-\sqrt{(2k + \frac{3}{2})\pi}, -\sqrt{(2k + \frac{1}{2})\pi}]$, der $k = 0, 1, 2, \dots$

Avtagende på intervallene: $[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0]$, $[\sqrt{(2k + \frac{1}{2})\pi}, \sqrt{(2k + \frac{3}{2})\pi}]$, der $k = 0, 1, 2, \dots$

og $[-\sqrt{(2k + \frac{1}{2})\pi}, -\sqrt{(2k - \frac{1}{2})\pi}]$, der $k = 1, 2, 3, \dots$

5. Funksjonen er ikke definert på hele intervallet $(-1, 4)$.

Fasit til seksjon 6.3

1. a) 2 b) 1 c) $1/3$ d) 1 e) eksisterer ikke f) $-1/2$ g) $-1/6$ h) 0 i) $1/2$ 3. a) 0 b)

0 c) -1 d) 1 e) e f) $3/2$ g) $1/2$ 5. $1/\sqrt{e}$ 7. $-1/3$ 9. e^2 11. $\ln 3$ 13. 1

15. e 17. $a = 2$ 19. F.eks. $f(x) = e^{(e^x)}$ 21. Nei 23. $g'(0) = 0, g''(0) = -\frac{1}{3}$

Fasit til seksjon 6.4

1. a) Kritiske punkter: $-3, -2, 1, 2$. Maksimumsverdi: $y = 32$ for $x = -2$. Minimumsverdi: $y = 5$ for $x = 1$. b) Kritiske punkter: $-1, -1/2, 1$. Maksimumsverdi: $y = -23/4$ for $x = -1/2$. Minimumsverdi: $y = -53$ for $x = 1$. c) Kritiske punkter: $-\pi, -\pi/4, 3\pi/4, \pi$. Maksimumsverdi: $y = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$ for $x = 3\pi/4$. Minimumsverdi: $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$ for $x = -\pi/4$. d) Kritiske punkter: $-1, 0, 3$. Maksimumsverdi: $y = 9 \cdot e^3$ for $x = 3$. Minimumsverdi: $y = 0$ for $x = 0$. e) Kritiske punkter: $-1/2, 0, 1$. Maksimumsverdi: $y = 4$ for $x = 1$. Minimumsverdi: $y = 0$ for $x = 0$

3. a) Konveks på intervallene $(-\infty, -1]$ og $[1, \infty)$. Konkav på $[-1, 1]$. b) Konveks på hele \mathbb{R} . c)

Konveks på intervallene $[(2k - 1)\pi, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Konkav på intervallene $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Konkav på $(-\infty, 0]$ og $[0, \infty)$ (men ikke på hele \mathbb{R}). e) Konveks på $(-\infty, 0]$. Konkav på $[0, 1]$ og $[1, \infty)$.

5. a) Lokalt maksimum for $x = 0$. Lokalt minimum for $x = 1$. b) Konveks i $(-\infty, -1]$

og $[1, \infty)$. Konkav i $[-1, 1]$ 7. a) Avtagende på $(0, 1/2]$, voksende på $[1/2, \infty)$. Minimumspunkt

$(\frac{1}{2}, 1 - \ln 2)$. b) Konveks på $(0, 1]$, konkav på $[1, \infty)$. c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$. d) To løsninger for $a > 1 - \ln 2$, én løsning for $a = 1 - \ln 2$, ingen løsning for $a < 1 - \ln 2$.

9. a) $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, f er positiv for $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$, f er negativ for $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, f er null for $x = 0$. b) f voksende for $x < -\sqrt{3}$ og for $x > \sqrt{3}$. f avtagende for $-\sqrt{3} < x < -1$, for $-1 < x < 1$ og for $1 < x < \sqrt{3}$. Lokalt maksimum for

$x = -\sqrt{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2}$. Lokalt minimum for $x = \sqrt{3}$, $y = \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2}$. c) Konveks i intervallene $(-\infty, -3]$, $(-1, 0]$, $(1, 3]$. Konkav i intervallene $[-3, -1)$, $[0, 1)$, $[3, \infty)$.

11. a) Nullpunkt: $x = 0$. b) f vokser i $[-1, 1]$. f avtar i $(-\infty, -1]$ og i $[1, \infty)$. Globalt maksimum $y = 1$ for $x = 1$. Globalt minimum $y = -1$ for $x = -1$. c) f er konveks i intervallene $[-\sqrt{3}, 0]$ og $[\sqrt{3}, \infty)$. f er konkav i intervallene $(-\infty, -\sqrt{3}]$ og $[0, \sqrt{3}]$. d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

15. a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ b) $g'(x) = \frac{\tan x - \frac{x}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x}$ f) $f'(0) = 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$, $f'(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

Fasit til seksjon 6.5

1. $x = 0$ og $y = x$ 3. $y = x$ 5. $x = 1$, $y = 2x$ 7. $y = x$ når $x \rightarrow \infty$, og $y = -x$ når $x \rightarrow -\infty$. 9. $y = x$ 11. $y = \frac{x}{2}$ 13. a) Nullpunkter: $x = 0$, $x = 3$. $f(x)$ positiv for $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$. $f(x)$ negativ for $x \in (3, \infty)$ b) f voksende på $[0, 2]$. f avtagende på $(-\infty, 0]$ og $[2, \infty)$. Ingen globale ekstremalpunkter. Lokalt maks: $x = 2$, $y = \sqrt[3]{4}$. Lokalt min: $x = 0$, $y = 0$. c) Konkav i $(-\infty, 0]$ og $[0, 3]$. Konveks i $[3, \infty)$. d) Asymptote $y = -x + 1$.

Fasit til seksjon 7.1

1. 312.5 m^2 3. $x = 3$ 5. $54\pi\sqrt{3}$ 7. $\pi/3$ 9. b) 50, 50, 100 11. $h = 12/\sqrt{5}$,
 $H = \frac{50}{3\pi} - \frac{9}{\sqrt{5}}$ 13. $\frac{\tan v}{4}$ 14. $2r^2$ 15. $\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$ 16. $3 + \sqrt{3}$ 17. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

Fasit til seksjon 7.2

1. $\sqrt{3}/2 \text{ m/s}$ 3. $8\pi \text{ km/min}$ 5. 2.4 m/s 7. $\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m/s}$ 9. $4/3 \text{ cm/min}$
 11. $\frac{19}{180} \text{ cm/min}$. 13. 31.25 m/s 15. a) 7 nautiske mil b) Avtar med $9/14$ nautiske mil i timen 16. $9.6\pi \text{ m/s}$ 17. 15.6 cm/s .

Fasit til seksjon 7.3

1. a) 1.27 b) 0.48 c) 0.57 d) 0.36 3. 0.948 5. 1.4958 7. b) $x_1 = \frac{6-e}{e}$. Verdien er for stor. 9. 1.90 11. a) $d = 2 \cos u$ b) $u = 1.155$, $d = 0.81$ 13. c) 0.948 15. b) $n = 25$

Fasit til seksjon 7.4

1. a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$ c) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$ d) $f^{-1}(x) = x^2$, $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$ e) $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-2}$, $D_{f^{-1}} = [2, \infty)$ f) $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x + 9}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ g) $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{-\ln y}$, $D_{f^{-1}} = (0, 1)$ 3. $g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$ 5. $g'(1) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{8})} = \frac{1}{4}$ 7. $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Fasit til seksjon 7.5

1. a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) 1 f) 0 3. a) 1 b) 1 c) 1 d) 0 5. b) 23.8° og 126.2°

Fasit til seksjon 7.6

1. a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $-\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{3}$ f) $\frac{5\pi}{6}$ g) $\frac{\pi}{4}$ h) $\frac{\pi}{3}$ i) $\frac{\pi}{6}$ 3. a) 2 b) $1/3$ c) -1 d) $-\sqrt{2}$ e) $-\frac{1}{3}$ f) 1 g) 0

5. a) Voksende på $[0, \infty)$, avtagende på $(-\infty, 0]$. b) Konveks på hele \mathbb{R} . c) Asymptoter: $y = \pm \frac{\pi}{2}x - 1$.

7. b) Voksende på $(-1, x_0]$, avtagende på $(-\infty, -1)$ og $[x_0, \infty)$. $\varphi(x_0) = \frac{1}{2(1+x_0^2)(1+x_0)}$

9. a) Nullpunkt: $x = 0$, asymptote: $y = \frac{\pi}{2}$. b) Absolutt minimum $(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2})$. c) f er konkav

på hele D_f . e) $V_g = D_f = [-\frac{1}{2}, \infty)$, $D_g = V_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $g(u) = \frac{\sin u}{1 - \sin u}$, $u \in [-\pi/2, \pi/2)$

11. d) 0.29 13. $\frac{2}{\pi}$ 14. $\sqrt{6}$ m 15. b) $v'(x) = \frac{25(150 - x^2)}{2(x^2 + 30\sqrt{3}x + 900)(x^2 + 5\sqrt{3}x + 25)}$

c) $\sqrt{150}$ meter

Fasit til seksjon 7.7

1. a) $f'(x) = 2x \sinh x^2$ b) $f'(x) = 2 \cosh x \sinh x$ c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cosh \sqrt{x}$ d) $f'(x) = \tanh x + \frac{x}{\cosh^2 x}$ e) $f'(x) = \cos x \cosh x + \sin x \sinh x$ 5. a) 1 b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) 1

Fasit til seksjon 8.2

$$1. \emptyset(\Pi) = \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9}\right) \cdot \frac{1}{5} \approx 0.746, \quad N(\Pi) = \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{5} \approx 0.646$$

$$3. \emptyset(\Pi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{12} + 1 \cdot \frac{\pi}{6} + 1 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \approx 2.39,$$

$$N(\Pi) = 0 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{12} + 0 \cdot \frac{\pi}{6} \approx 1.54.$$

$$5. a) \emptyset(\Pi_n) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad N(\Pi_n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad b) \int_0^1 x \, dx = \int_0^1 x \, dx = 1/2$$

$$c) \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

$$7. a) \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \quad b) \emptyset(\Pi_n) = \frac{a^4}{4} \left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right), \quad N(\Pi_n) = \frac{a^4}{4} \left(\frac{(n-1)^4 + 2(n-1)^3 + (n-1)^2}{n^4}\right) \quad c) \int_0^a x^3 \, dx = \frac{a^4}{4}$$

$$9. \emptyset(\Pi_n) = \frac{\sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6n}\right)} \cdot \frac{\pi}{3n} = \frac{\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{6n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6n}\right)} \quad N(\Pi_n) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \sin \frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{\pi}{6n}\right)}.$$

$$\frac{\pi}{3n} = \frac{\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)}{6n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6n}\right)} \quad d) \int_0^{\pi/3} \sin x \, dx = \frac{1}{2}. \quad 11. \int_0^1 f(x) \, dx = 0$$

$$13. a) \lim_{n \rightarrow \infty} \emptyset(\Pi_n) = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \quad c) \int_a^b x^k \, dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Fasit til seksjon 8.3

$$1. a) 2 \quad b) 8 \quad c) 1 - e^{-1} \quad d) \frac{\pi}{3} \quad e) 1 \quad f) \frac{\pi}{12} \quad g) \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad h) \frac{484}{5}$$

$$3. a) \frac{3}{2} \quad b) \frac{e^8 - e^2}{3} \quad c) \frac{1}{2} \ln 3 \quad d) \frac{\pi}{8} \quad e) \arcsin \frac{1}{3} \quad f) \frac{\cosh 15 - \cosh 10}{5} + 2 \ln 2$$

$$g) 2 + \frac{e^{7\pi/4} - e^{-7\pi/4}}{7}$$

$$5. a) f'(x) = e^{-x^2} \quad b) f'(x) = \frac{\sin x}{x} \quad c) f'(x) = \arctan(x^2) \quad 7. a) 1 \quad b) 0 \quad c) \infty$$

$$11. c) \text{konveks p\aa } (-\infty, 0], \text{ konkav p\aa } [0, \infty). \quad d) D_g = \mathbb{R}, g'(0) = 1$$

$$18. b) f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} \text{ for } x \neq 1. \quad f'(1) = -\frac{1}{2}. \quad c) F'(x) = f(x) \quad d) F''(x) = f'(x)$$

Fasit til seksjon 8.4

1. a) $\ln|x+3|+C$ b) $\frac{7}{2}x^2+2x^{3/2}-\sin x+C$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)+C$ d) $\frac{8}{7}e^{7x}+2x^{1/2}+C$
 e) $4\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+C$
3. a) $\frac{2}{3}(\arcsin x)^{3/2}+C$ b) $-\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+C$ c) $2\arctan\sqrt{x}+C$ d) $-7(1-x^2)^{1/2}-\arcsin x+C$
 e) $\ln(x+\sqrt{x^2-1})-3\sqrt{x^2-1}+C$

Fasit til seksjon 8.5

1. a) $R(\Pi, U) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{11}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{69}{8}$
 b) $R(\Pi, U) = \sin 0 \cdot \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{6} + \sin \pi \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \left(1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 c) $R(\Pi, U) = \arctan 0 \cdot \frac{1}{2} + \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} + \arctan 1 \cdot \frac{1}{2} + \arctan \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{8}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

Fasit til seksjon 8.6

1. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{e}{2}-1$ e) $\frac{\pi}{3}$ f) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$ g) $\frac{1}{3}\ln 2$ h) $\frac{e}{2}-\frac{1}{2}$ 3. $2\sqrt{2}$
5. a) 2π b) $\frac{1023\pi}{5}$ c) $\frac{\pi^2}{4}$ d) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\pi}{2}\ln 7$ f) $\frac{\pi}{2}[e^2-e^{-2}]$ g) $2\pi-\frac{\pi^2}{2}$ h) $\pi[e^4+8-e^{-4}]$
7. a) $\frac{81\pi}{2}$ b) $\frac{124\pi}{5}$ c) $\pi \ln 5$ d) $2\pi(3-\sqrt{5})$ e) 2π f) $\pi(1-e^{-1})$ g) $\frac{\pi^2}{4}$ 9. a) $\frac{2\pi}{15}$ b) $\frac{\pi}{6}$
11. a) $3\sqrt{10}$ b) $\sinh 2 - \sinh 1$ c) $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}$ d) $\frac{31}{6}$ 13. $1.6 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ 15. $\frac{4\pi}{3}(1-a^2)^{3/2}$
17. $\frac{704}{5}\pi$ 19. a) $\frac{\pi}{3}x^2(15-x)$ b) 3.26 21. $\frac{4\pi}{3}[(R^2-a^2)^{3/2} - (R^2-b^2)^{3/2}]$
23. a) $\frac{\pi h^2}{2}$ b) $\frac{2}{\pi} \text{ m/s}$ 25. a) Nullpunkter: $x=0, x=\frac{3}{4}$. f avtar i $[0, \frac{1}{4}]$ og vokser i $[\frac{1}{4}, \infty)$.
 Globalt minimum $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{6})$. Lokalt maksimum $(0, 0)$. b) $\frac{7}{6}$

$$27. \text{ a) } I_p = \frac{2 \cdot 32^{p+3}}{(p+1)(p+2)(p+3)} \quad \text{c) } I_{10/3} = \frac{54 \cdot 32^{\frac{19}{3}}}{13 \cdot 16 \cdot 19} \approx 4.66 \cdot 10^7, \quad c = \frac{1.86}{I_{10/3}} \approx 0.4 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{d) } 29.1 \text{ år} \quad \text{31. } \frac{2025}{8} \pi \text{ gram}$$

Fasit til seksjon 8.7

1. a) Trapesmetoden: 0.34; eksakt verdi: $\frac{1}{3} = 0.333 \dots$ b) Trapesmetoden: 5.265; eksakt verdi: $\frac{16}{3} = 5.333 \dots$ c) Trapesmetoden: 0; eksakt verdi: 0 3. 2.28 5. 0.5333 7. 0.7468
11. Feilestimatet gir $n = 40\,825$. Den minste faktiske verdien er $n = 24\,760$.

Fasit til seksjon 9.1

1. a) $-x \cos x + \sin x + C$ b) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$ c) $-x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C$ d) $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

e) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ f) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ g) $-(x^2+x-2) \cos x + (2x+1) \sin x + C$ h) $\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C$ 3. a) $\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C$ b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C$

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C$

5. $-\frac{2}{x} (\ln x + 1) + C$ 7. $\frac{x^6}{6} \ln x - \frac{x^6}{36} + C$ 9. $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$ 11. $x \arctan x - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ 13. $x \tan x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| + C$

15. $2\pi[(\ln 2)^2 - 2 \ln 2 + 1]$ 17. $V_t = \pi \left(2 - \frac{(\ln t)^2}{t} - \frac{2 \ln t}{t} - \frac{2}{t} \right), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_t = 2\pi.$

19. $I_3 = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + C$ 21. $\int x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C, \quad \int x^5 \cdot e^{-x^2} dx = -e^{-x^2} \left(\frac{x^4}{2} + x^2 + 1 \right) + C$ 23. a) $I_0 = 1, I_1 = \frac{\pi}{2} - 1$ c) $I_3 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 - 3\pi + 6.$

Fasit til seksjon 9.2

1. a) $-2 \cos \sqrt{x} + C$ b) $2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + C$ c) $\frac{2}{3} (\sqrt{x} + 1)^3 - 3(\sqrt{x} + 1)^2 + 6(\sqrt{x} + 1) - 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$ d) $\arcsin(e^x) + C$ e) $2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$ f) $-3x^{2/3} \cos \sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x} + 6 \cos \sqrt[3]{x} + C$ g) $\frac{1}{2} x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$ h) $\frac{1}{2} (\arcsin \sqrt{x})(2x-1) + \frac{1}{2} \sqrt{x} \sqrt{1-x} + C$

3. a) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-4 \ln 2 - 9$ d) $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ 5. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 9} + \frac{9}{2} \operatorname{arsinh} \frac{x}{3} + C$
7. $\frac{4}{3}(1 + \sqrt{x})^{3/2} + C$ 9. $\frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$ 11. $\frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} - (1 + x^2)^{1/2} + C$
13. $-\ln(\sqrt{1 - x^2} + 1) + C$
15. $\frac{\pi}{3} + 1$ 17. $\frac{(ax^2 + b)^{5/2}}{5a^2} - \frac{b}{3a^2}(ax^2 + b)^{3/2} + C$
19. $x(\arcsin x)^3 + 3\sqrt{1 - x^2}(\arcsin x)^2 - 6x \arcsin x - 6\sqrt{1 - x^2} + C$
21. $\frac{1}{a\sqrt{a^2 + 1}} \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \tan x\right) + C$ 23. $\frac{\pi^3}{4} - 2\pi$ 25. a) $I_0 = \frac{\pi}{4}, I_1 = \frac{\ln 2}{2}$
27. c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

Fasit til seksjon 9.3

1. a) $-2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| + C$ b) $4 \ln|x+3| + 3 \ln|x-2| + C,$ c) $\frac{3}{7} \ln|x-1| + \frac{11}{7} \ln|x+6| + C$
d) $-2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-2| + C$ e) $\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$
3. a) $2 \arctan(x+3) + C$ b) $\ln(x^2 + 4x + 8) - 3 \arctan\left(\frac{x}{2} + 1\right) + C$ c) $-4 \ln(x+2) + 6 \ln(x+4) + C$
d) $3 \ln(x^2 + 3x + 3) - 6\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}x}{3} + \sqrt{3}\right) + C$ e) $\frac{3}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x+3) + C$ f) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 6) + C$
5. a) $\frac{x^2}{2} + x - 4 \ln|x+1| + C$ b) $\frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| + C$ c) $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan x + C$
d) $3 \ln|x+2| - 2 \ln|x+1| + C$ e) $2 \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \arctan(x+1) + C$ f) $\ln|x-1| + 2 \ln|x+1| + \frac{1}{(x+1)} + C$ g) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan x - 2 \ln|x+1| + C$
7. $\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C.$ 9. $\frac{1}{3} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} + C.$ 11. $\ln \frac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} - \arctan t + C.$
13. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \ln 2.$
15. $x + \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{2} \arctan 2x + C.$
17. $\frac{1}{12} \ln|x+2| - \frac{1}{24} \ln(x^2 - 2x + 4) + \frac{\sqrt{3}}{12} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$
19. $\frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2} \arctan x + C.$ 21. a) $\frac{1}{2} \ln(u^2 + 2u + 5) + \frac{1}{2} \arctan \frac{u+1}{2} + C$ b) $A = 1/5,$
 $B = -1/5, C = -2/5$
- c) $-\frac{1}{5} \ln|\cos x| + \frac{1}{10} \ln(\cos^2 x + 2 \cos x + 5) + \frac{1}{10} \arctan\left(\frac{\cos x + 1}{2}\right) + C$
23. $\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} + C$ 25. a) $2 - i, -4$ b) $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 5) - \ln|x+4| + 4 \arctan(x-2) + C$

$$27. \frac{1}{13} \left[x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 4e^x + 13) - \frac{2}{3} \arctan \frac{e^x + 2}{3} \right] + C. \quad 29. \ln 3/2.$$

$$31. (x+1) \ln(x^2+2x+10) - 2x + 6 \arctan \frac{x+1}{3} + C. \quad 33. -\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$35. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| - \arctan \sqrt{x} + C. \quad 37. \text{ a) } \frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} + C \quad \text{ b) } \frac{\ln 3}{2} \quad \text{ c) } \frac{\ln 3}{2} \quad 38. \text{ b) } \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-4}.$$

Fasit til seksjon 9.4

$$1. 2\sqrt{x} + 2 \ln|\sqrt{x}-1| + C \quad 3. 2 - 2 \ln \frac{4}{3} \quad 5. \sqrt{2x+1} e^{\sqrt{2x+1}} - e^{\sqrt{2x+1}} + C$$

$$7. \ln x - \ln(\sqrt{x}+1)^2 + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + C \quad 9. \frac{4}{3} \sin^3 x - \frac{4}{5} \sin^5 x + C \quad 11. \frac{16}{7} \sin^{\frac{7}{2}} x - \frac{16}{11} \sin^{\frac{11}{2}} x + C$$

$$13. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin u}{1-\sin u} \right| + C \quad 15. \tan \frac{x}{2} + C \quad 17. \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} + 1} \right|$$

$$19. \text{ a) } -\frac{1}{\tan \theta + 1} + C_1 \quad \text{ b) } -\frac{1}{2} \cot \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + C_2 \quad \text{ c) } \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$21. x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C$$

$$23. \frac{1}{2} (x+1) \sqrt{x^2+2x+3} + \ln(\sqrt{x^2+2x+3} + x + 1) + C$$

$$25. \frac{1}{2} \sqrt{2t^2+8t+9} - \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}(t+2) + \sqrt{2t^2+8t+9}) + C$$

$$27. \text{ a) } I = 2 \arcsin \sqrt{x} + C_1 \quad \text{ b) } I = \arcsin(2x-1) + C_2 \quad 29. \frac{3}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2\sqrt{2}+3}{2+\sqrt{5}} \right).$$

$$31. \text{ c) } I_2 = \frac{u}{2(1+u^2)} + \frac{1}{2} \arctan u + C, \quad I_3 = \frac{u}{4(1+u^2)^2} + \frac{3u}{8(1+u^2)} + \frac{3}{8} \arctan x + C$$

Fasit til seksjon 9.5

$$1. \text{ a) } \frac{\pi}{2} \quad \text{ b) } \frac{\pi}{2} \quad \text{ c) } \text{divergerer} \quad \text{ d) } \text{divergerer} \quad \text{ e) } \frac{1}{3} \ln 4 \quad \text{ f) } \text{divergerer} \quad \text{ g) } \text{divergerer} \quad \text{ h) } \text{divergerer}$$

$$\text{ i) } -\frac{1}{4} \quad 3. \text{ a) } \text{divergerer} \quad \text{ b) } \text{konvergerer} \quad \text{ c) } \text{konvergerer} \quad \text{ d) } \text{konvergerer} \quad \text{ e) } \text{divergerer}$$

$$\text{ f) } \text{konvergerer} \quad \text{ g) } \text{divergerer} \quad \text{ h) } \text{konvergerer} \quad \text{ i) } \text{divergerer}.$$

$$5. p > 1. \quad 7. a = 1 \text{ gir maksimalverdien } \frac{1}{2}. \quad 9. \text{ Divergerer} \quad 11. \frac{1}{2} (\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1).$$

$$30. \frac{\ln 3}{2}$$

Fasit til seksjon 10.1

1. a) Ja b) Ja c) Nei d) Ja e) Ja f) Nei

3. a) $y = x^3 + Cx^2$ b) $y = xe^{x^2} + Ce^{x^2}$ c) $y = \frac{5}{2} + Ce^{-2x}$ d) $y = \frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2x^2} \ln(1 + x^2) + Cx^{-2}$ e) $y = 1 + Ce^{\cos x}$ f) $y = x \tan x + 1 + \frac{C}{\cos x}$ g) $y = -1 + Ce^{-\cot x}$

5. $y = \frac{1}{2x}e^{x^2} + \frac{C}{x}$

7. $y = 1 + \frac{C}{x+1}$ 9. a) $-\ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) + \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$ b) $y = \frac{x+1}{x-1} \left(-\ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) + \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\right)$

11. a) $y = x \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C\right)$ b) $f(x) = x \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$ er den eneste løsningen slik at $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ eksisterer. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$.

13. a) $y = \frac{x+C}{\cos x}$ b) Når $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, må $C = -\frac{\pi}{2} : \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} = -1$. Når $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, må

$C = \frac{\pi}{2} : \lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\cos x} = 1$. c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$ d) $y = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos x} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{C}{\cos x}$

Fasit til seksjon 10.2

1. $y'(t) - 0.02y(t) = 40\,000$, $y(t) = 4\,000\,000e^{0.02t} - 2\,000\,000$ 3. 2311 år

7. a) $V' = -0.1V - 0.8$, $V(x) = 38 \cdot e^{-0.1x} - 8$ b) Tanken er tom etter 15.6 mil. For å komme helt frem må vi starte med 49.4 liter.

9. $10^6 \ln 2$ sekunder. 11. 11.12 kg når $t = 25$. Grensen er 51.5 kg når $t \rightarrow \infty$.

13. a) $y(t) = 22 + Ce^{-kt}$ b) 18° , $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 22$ d) $z(t) = 2(1+t) - \frac{10}{\ln 2} + \left(2 + \frac{10}{\ln 2}\right) 2^{-t/5}$

15. a) $B = -14$, $\alpha = \frac{\ln 2}{2}$ b) 15.05° c) 4.75°

17. b) $U(t) = \frac{Q}{k} + \left(U_0 - \frac{Q}{k}\right) e^{-\frac{k}{c}t}$, $\frac{Q}{k}$ c) $t = 10 \ln 2$ timer ≈ 6 t 55 min med $Q = 7000$ kJ/t. Aldri med $Q = 3500$ kJ/t.

19. $f(x) = 0$ og $f(x) = e^{kx}$ for $k \in \mathbb{R}$.

21. c) $y(t) = 40 + \frac{10}{\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)} \left[\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right] + \left(\frac{60\pi}{\pi^2+9} - 40\right) e^{-t/2}$ d) Minst 53.8 millioner kubikkmeter

22. Kl. 11.12

Fasit til seksjon 10.3

$$1. y = e^{3x} - e^{2x} \quad 3. y = 4 \cos x - 2 \cos^2 x \quad 5. y = \frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2x^2} \ln(1+x^2) + \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$7. y = \frac{\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + 1}{\cos x} \quad 9. y = \frac{1}{x}(e^x + C), y = \frac{1}{x}(e^x - e^a + ab)$$

$$11. a) \frac{x+C}{x \ln x}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x \ln x} & \text{for } x \neq 1 \\ 1 & \text{for } x = 1 \end{cases} \quad c) I = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}e^{2x}) + C, y = \frac{\arctan(\sqrt{3}e^{2x}) + C}{2\sqrt{3}x \ln x}$$

$$13. a) y = \frac{\arcsin x}{2(1+x^2)} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2(1+x^2)} + \frac{C}{1+x^2} \quad b) y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^k. \text{ Punktet } x = \frac{1}{2} \text{ er - et lokalt maksimumspunkt hvis } k < -\frac{3}{2} - \text{ et lokalt minimumspunkt hvis } k > -\frac{3}{2} - \text{ ingen av delene hvis } k = \frac{3}{2}.$$

Fasit til seksjon 10.4

$$1. a) y = Ce^{x^3/3} \quad b) y = \pm \sqrt[4]{\frac{4}{3}x^3 + C} \quad c) y = \frac{1}{\ln|x+1| + C}. y = 0 \text{ er ogs\aa l\os osning} \quad d) y = \pm \sqrt{Cx^2e^{x^2} - 1} \quad e) y = \left(\frac{x^4}{8} + C\right)^2 \quad f) y = \frac{1}{\arctan x + C} \quad 3. T(x) = \frac{T_0}{1 + T_0 a \ln\left(\frac{b+x}{b}\right)}$$

$$5. a) v(t) = \sqrt{mg/c} - \frac{2\sqrt{mg/c}}{1 + e^{2\sqrt{gc}/mt}} \quad b) \sqrt{mg/c} \quad c) c = 1/250 \quad d) k = 1/5$$

$$7. a) p(t) = 2 \cdot 10^6 \left(2 + \frac{3}{1 + 2e^{-0.24t}}\right) \quad b) 10^7 \quad c) 1963$$

$$9. a) N(t) = \frac{10^4}{1 + \frac{3}{2}e^{-t}}, \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 10^4 \quad b) \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 7 \cdot 10^3 \quad c) t = 1.9 \text{ \aa r}$$

$$11. t = 1.19; \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0; y(2) \approx 0.27$$

$$13. a) \text{ Nullpunkt } t = 0. \text{ Maks. punkt } t = \ln 5/0.4. \text{ Vendepunkt } t = \ln 25/0.4. \quad c) f(t) = 10e^{-kt}, g(t) = \frac{10k}{l-k}(e^{-kt} - e^{-lt}) \quad d) 0.9 \text{ enheter} \quad e) 37 \text{ enheter}$$

$$15. a) y = Ce^{\frac{3}{2}e^{-2t}} \quad b) y = \frac{De^{-\frac{k}{2}e^{-kt}}}{De^{-\frac{k}{2}e^{-kt}} - 1} \quad c) \frac{1}{1-C} \quad d) \approx 0.0011$$

$$16. b) \text{ Generell l\os osning } y = \frac{Cx}{x-1}. \text{ Partikul\ae r l\os osning } y = \frac{x}{1-x}. \quad c) \text{ Konvergerer n\aa r } |x_0| < 1$$

$$17. c) x(0) = 0.25, x(10) = 0.9. \text{ Halvparten er hensynsfulle i 1994. } x(t) \rightarrow 1 \text{ n\aa r } t \rightarrow \infty.$$

$$19. a) y = -x \ln(-\ln|x| + C) \quad b) y = \frac{-x}{\ln|x| + C} \quad c) y = \pm x \sqrt{Cx^2 + 1}$$

$$21. \text{ c) } y(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^{-k+1}}{k-1} \right) - \frac{k}{k^2-1} \quad \text{Katten når frem siden } y(0) = \frac{12}{7} < 2.$$

Fasit til seksjon 10.5

$$1. \text{ a) } y = Ce^{2x} + De^{-3x} \quad \text{b) } y = Ce^{-4x} + De^{-x} \quad \text{c) } y = Ce^{-3x} + Dxe^{-3x} \quad \text{d) } y = e^x(C \cos 2x + D \sin 2x) \quad \text{e) } y = e^{-x}(C \cos(\sqrt{6}x) + D \sin(\sqrt{6}x)) \quad \text{f) } y = Ce^{x/2} + Dxe^{x/2}$$

$$3. \text{ a) } y = -2e^{4x} + 4e^x \quad \text{b) } y = 14e^{x/2} \sin \frac{x}{2} \quad \text{c) } y = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{(2+\sqrt{5})(x-1)} + \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{(2-\sqrt{5})(x-1)} \quad \text{d) } y = e^{-2x} \sin x \quad \text{e) } y = 2e^{3x} - 3xe^{3x}$$

$$5. \text{ a) } y'' + 4y' + 4 = 0 \quad \text{b) Generell løsning: } y = Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}. \text{ Spesiell løsning: } y = xe^{-2x}$$

$$7. \text{ d) Anta at de komplekse røttene er } \alpha \pm i\gamma. \text{ Resultatet holder dersom } a - c \text{ ikke er på formen } \frac{n\pi}{\gamma}, \text{ der } n \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \text{ c) } x(t) = x_0 \cos \frac{t}{\sqrt{\rho h}} \quad \text{d) } T = 2\pi\sqrt{\rho h}$$

$$11. \text{ a) } x \text{ modellerer rovdypene.} \quad \text{c) } x(t) = x_0 \cos(\sqrt{bc}t) + \sqrt{\frac{b}{c}} y_0 \sin(\sqrt{bc}t), \\ y(t) = -\sqrt{\frac{c}{b}} x_0 \sin(\sqrt{bc}t) + y_0 \cos(\sqrt{bc}t)$$

Fasit til seksjon 10.6

$$1. \text{ a) } y = Ce^{-x} + De^{2x} \quad \text{b) } y = -\frac{1}{2}e^x \quad \text{c) } y = \frac{5}{6}e^{-x} + \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{e^x}{2}$$

$$3. \text{ a) } y = -\frac{1}{8}e^x \sin 2x \quad \text{b) } y = Ce^{3x} + De^{-x} - \frac{1}{8}e^x \sin 2x \quad \text{5. } y = Ce^{-x} + De^{x/2} + e^x$$

$$7. y = Ce^{(4+\sqrt{10})x} + De^{(4-\sqrt{10})x} + \frac{x^2}{6} + \frac{4}{9}x + \frac{29}{54}$$

$$9. \text{ a) } y = Ce^{-x} + De^{-2x} \quad \text{b) } y = 2x - 3 + \sin x - 3 \cos x \quad \text{c) } y = 10e^{-x} - 4e^{-2x} + 2x - 3 + \sin x - 3 \cos x$$

$$11. \text{ a) } y = e^{-x}(C \cos x + D \sin x) \quad \text{b) } y = -\frac{e^{-x}}{10}(2 \cos x + \sin x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{5}e^{2x}$$

$$13. y = C \cos x + D \sin x - \frac{x}{2} \cos x$$

$$15. \text{ a) } -\cos x \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C \cos x + D \sin x \quad \text{b) } \frac{e^x}{16} + \left(\frac{x}{4} + C \right) e^{-x} + De^{-3x}$$

Fasit til seksjon 10.8

1. a) $y = -x - 1 + e^x$

b)–e)

	Eksakt løsning	Eulers metode	Eulers midtpkt.	Runge- Kutta
$y(0, 2)$	0.02140	0	0.02	0.02140
$y(0, 4)$	0.09182	0.04	0.0884	0.09182
$y(0, 6)$	0.22212	0.128	0.21585	0.22211
$y(0, 8)$	0.42554	0.2736	0.41533	0.42552
$y(1, 0)$	0.71829	0.48832	0.70271	0.71825

3. a) $y = e^x$ $p(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}$ c) $e \approx 2.7145$

7. a) $x(t) = \frac{1}{1 - \ln(1+t)}$ b) $x_1 = 1.25$.

8. a) $x(t) = \ln(t + e)$ b) $x_1 = 1 + h/e$, fornuftig feilestimat $\frac{h^2}{2}e^{-2}$

9. a) $x(t) = e^{t+t^2/2} - 1$

b) Eulers metode: $x(0.25) = 0.25$, Eulersmidtpunktmetode: $x(0.25) = 0.31641$, eksakt svar: $x(0.25) = 0.32478$. Avvikene er hhv. 0.07478 og 0.0084.

10. a) $x_e = 1$, $x_m = 1.0042$.

Fasit til seksjon 11.1

1. $1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$ 3. $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3}{6} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^4}{24} \right)$ 5. $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

7. $x - \frac{x^3}{3}$ 9. $-7 + 2x - 3x^2$ 11. Se eksempel 11.1.5.

Fasit til seksjon 11.2

1. $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ 3. $T_3(x) = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3}$

5. $\sqrt{101} \approx 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} = 10.049875$. Feilen er mindre enn $\frac{1}{1\,600\,000} = 6.25 \cdot 10^{-7}$.

7. $-1/6$

9. 0.7968 11. $T_2(x) = 1 - x + x^2$ 13. $T_3(x) = e \left(x - \frac{x^3}{6} \right)$ 15. a) $1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$ c)

10.0099900

Fasit til seksjon 11.3

$$3. a) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ -1 & \text{for } x < 0. \end{cases} \quad c) \text{ Nei}$$

5. a) Minste verdi 0, største verdi 1. b) Følgen konvergerer punktvis, men ikke uniformt mot 0.

7. $f = 0$. Konvergensten er uniform på $[a, \infty)$, men ikke på $[0, \infty)$ og $[0, b]$.

9. c) Nei

Fasit til seksjon 11.4

$$1. a) f = 0 \quad 2. a) f = 0 \quad b) \int_0^1 f_n(x) dx = 1, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0$$

$$3. f = 0, \quad \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Fasit til seksjon 11.5

1.

n	u_n	v_n	n	u_n	v_n
1	1	0.92214	6	720	710.08
2	2	1.919	7	5040	4980.4
3	6	5.8362	8	40320	39902
4	24	23.506	9	362880	359537
5	120	118.02			

3. c) 187 079

Fasit til seksjon 12.1

$$1. a) \frac{3}{4} \quad b) \frac{49}{3} \quad c) \frac{24}{7} \quad d) \frac{8}{7} \quad 3. a) \frac{1}{1+x} \quad b) \frac{1}{1-x^2} \quad c) \frac{a^2}{1+4a^2} \quad d) \frac{e^{1/2}}{e^{1/2}-1} \quad e) \frac{1}{x}$$

$$f) \frac{1}{y+3\sqrt{y}}$$

$$5. c) 1 \quad 9. 90 \text{ m} \quad 11. c) y_0 = a \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Fasit til seksjon 12.2

1. a) Divergerer b) Konvergerer c) Konvergerer d) Konvergerer e) Divergerer
3. a) Divergerer b) Konvergerer c) Konvergerer d) Divergerer e) Konvergerer f) Divergerer
g) Konvergerer h) Divergerer i) Konvergerer
5. a) Konvergerer b) Divergerer c) Konvergerer d) Konvergerer e) Konvergerer f) Konvergerer g) Divergerer
7. a) Konvergerer b) Divergerer c) Divergerer d) Divergerer e) Konvergerer f) Divergerer
g) Konvergerer
9. Konvergerer

Fasit til seksjon 12.3

1. a) Konvergerer b) Divergerer c) Konvergerer d) Konvergerer e) Divergerer f) Divergerer
g) Konvergerer h) Divergerer i) Konvergerer
3. a) $-\frac{29}{144}$ b) $-0.7318 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq -0.4818$ c) -0.24
5. c) $\frac{1}{2}$ d) Lokale min. $2n\pi$ for $n = 0, 1, 2, \dots$, lokale maks. $(2n + 1)\pi$ for $n = 0, 1, 2, \dots$ Største verdi: $F(\pi) = a_0 = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$, minste verdi $F(0) = 0$.

Fasit til seksjon 12.4

1. a) Betinget konvergent b) Absolutt konvergent c) Betinget konvergent d) Divergent e) Betinget konvergent f) Absolutt konvergent g) Divergent
3. a) $a \in [-1, 1)$ b) Alle a c) Alle a unntatt $a = (n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}$ d) $a \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$
e) Ingen f) $a \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ g) $a \in [-3, 1]$ h) Alle a unntatt $a = \pm 1$.

Fasit til seksjon 12.5

1. a) $x \in (e^{-1}, e)$ b) $x > 0$ c) $x \in [n\pi - \frac{\pi}{6}, n\pi + \frac{\pi}{6}]$ for en $n \in \mathbb{Z}$ d) $x < 0$.

Fasit til seksjon 12.6

1. a) (1, 3) b) (-3, 3) c) (0, 1) d) [-2, 0) e) [-3, 5] f) [-1, 1) g) (-4, 4) h) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

5. $S(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0. \end{cases}$ Ikke kontinuerlig i 0. 7. b) $p > 1$ c) [-1, 1)

Fasit til seksjon 12.7

$$1. a) f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^3 x^n, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n} x^n$$

$$b) f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n+2}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$c) f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+2)^{n-1}}{(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(x+2)^n}{(n+2)},$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+2)^{n+1}}{n(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}(x+2)^n}{(n-1)n^2}$$

$$d) f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-4)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(x-4)^n}{n!},$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x-4)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}(x-4)^n}{n!}$$

Fasit til seksjon 12.8

$$1. a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!}, \quad I = \mathbb{R}$$

$$b) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + \dots, \quad I = \mathbb{R}$$

$$c) -14 + 14(x+1) - 5(x+1)^2 + (x+1)^3, \quad I = \mathbb{R} \quad d) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \quad I = (0, 2)$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad I = (-1, 1] \quad 3. a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n \cdot x^{4n}}{(2n)!} \quad d) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} \quad e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} x^{2n} \quad f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!}$$

$$g) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$5. b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n-1)!} 2^{n-2} x^n, \text{ konvergerer for alle } x. \quad c) -\frac{1}{4e}$$

7. c) $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0$. Konvergensområdet er \mathbb{R} . d) Bare i punktet 0.
9. a) $[-1, 1)$ b) $20! \sin \frac{\pi}{22}$, $35! \sin \frac{\pi}{19}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
11. a) $(-1, 1)$ c) $h(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, $f(x) = \frac{2}{(1-x^2)^2}$ 13. a) $(-1, 1)$ b) $\frac{x}{(1-x)^2}$
15. a) $[-1, 1]$ b) $\frac{\arctan x}{x}$ for $x \neq 0$ og 1 for $x = 0$. c) $\frac{11}{24}$ 17. $(-1, 3)$, $\frac{2(x-1)}{(3-x)^2}$
19. c) 1.317902 21. a) \mathbb{R} b) $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^{n+2}$ c) $f(x) = 4 - (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$
23. Konvergensområde \mathbb{R} . Sum: $S(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ for $x \neq 0$, $S(0) = 1$.
25. a) $[-1, 1]$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = 1 - g(x)$. Taylor-rekken til g : $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ d) $h'(1) = -1$,
 $h''(1) = -\frac{1}{2}$
27. a) $b_n + b_{n-2} = \frac{1}{n-1}$ b) $[-1, 1)$ c) $f(x) + x^2 f(x) = \frac{\pi}{4} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)x + x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$
 $f(x) = \frac{\frac{\pi}{4} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)x + x \ln(1-x)}{1+x^2}$

Fasit til seksjon 12.9

1. a) $y = a_0 + a_1 x + \frac{a_0 + a_1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} x^n$ 3. $y = a_0(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots)$, $|x| < 1$ $y = \frac{a_0}{1+x^2}$
5. a) $R = \infty$ b) $e^{x^2/2}$ 7. a) $\frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{C}{x}$ b) Alle x c) $\frac{\sin x}{x} - \cos x$ 9. a) \mathbb{R} b) $(1+x)e^x$

Fasit til seksjon 12.10

3. $\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} x^n$ $\frac{1}{(1+x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{3} x^n =$
 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^n$
5. a) $D_f = (-1, \infty)$ b) Voksende i $(-1, \sqrt[3]{2})$, avtagende i $[\sqrt[3]{2}, \infty)$, globalt maks. for $x = \sqrt[3]{2}$
 c) $x = -1$ er vertikal asymptote, $y = 0$ er asymptote når $x \rightarrow \infty$. d) $\frac{2\pi}{3} \ln 3$, $\frac{8\pi}{3}$ e) divergerer
 g) $\frac{39}{320}$

Fasit til seksjon 12.11

1. a) $a_n = \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{6} \cdot 4^n$ b) $a_n = \frac{n}{4} - \frac{1}{16} + \frac{17}{16}(-3)^n$ c) $a_n = \binom{\alpha-1}{n-1}$ 3. $\binom{29}{5}$

5. 121

11. a) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$ d) $r = \frac{1}{4}$ 13. b) $f(x) = \frac{x}{6-5x}$ c) 6 kast

15. $\frac{\binom{N-1}{n-1}}{2^N}$ for $N \geq n$, 0 for $N < n$.

Fasit til seksjon 12.12

1. e) $p_{0,20} = p_{20,20} = 0.1762$, $p_{2,20} = p_{18,20} = 0.0927$, $p_{4,20} = p_{16,20} = 0.0736$, $p_{6,20} = p_{14,20} = 0.0655$, $p_{8,20} = p_{12,20} = 0.0617$, $p_{10,20} = 0.0606$

Stikkordregister

A

Abel, Niels Henrik
(1802–29), 79, 162, 334,
537, 541, 544–546, 687,
738, 750, 802

Abel, Niels Henrik
(1802–29) (oppg.), 60,
713, 723

Abels addisjonsteorem,
540, 545

Abels summasjonsformel,
738

Abels summasjonsformel
(oppg.), 724

Abels teorem, 738, 740

absolutt konvergens, 717

addisjonsformler, 544

Agnesi, Maria Gaetana
(1718–99), 335

Akilles og skilpadden, 797

akselerasjon, 348

al-Karaji, Abu Bakr (d.
1019), 75

al-Kashi, Giyath al-Din (d.
1429), 110, 469

al-Khwarizmi, Muhammad
(ca. 780–850), 110

al-Samawal, Ibn Yahya
(1125–80), 75, 110

al-Tusi, Sharaf al-Din (d.
1213), 156

algebraens
fundamentalteorem,
149, 158, 159, 265

algorismer, 110

alternerende rekke, 714

amplityde, 598, 620, 625,
673, 728

analysens
fundamentalteorem,
416, 420, 421

analytisk geometri, 270

antiderivert, 412, 415

arabisk matematikk, 74,
110

arbeid, 449

arccos, 378

arccot, 378

arcosh, 387

arcoth, 387

arcsin, 377

arctan, 378

arcuscosinus, 378

arcuscotangens, 378

arcussinus, 377

arcussinusloven
andre (oppg.), 797
første (oppg.), 796

arcustangens, 378

areal mellom grafer, 439

areal til omdreiningsflate
(oppg.), 457

Argand, Jean Robert
(1768–1822), 161

argument, 126

Aristoteles (382–322 f.
Kr.), 72, 389

aritmetikkens
fundamentalteorem, 28,
38

aritmetikkens
fundamentalteorem
(oppg.), 34

Arkimedes (287–212 f.
Kr.), 395, 467–469, 473

Arkimedes (287–212 f.
Kr.) (oppg.), 401

Arkimedes' prinsipp, 95

arsinh, 386

artanh, 387

Aryabatha I (f. 476), 73,
469

asymptote
skrå, 323

vertikal, 322

avstand mellom
funksjoner, 665

avtagende
følge, 211
funksjon, 292

B

Babylonsk matematikk, 69

Bachet de Méziriac,
Claude-Gaspar
(1581–1638), 75

Barrow, Isaac (1630–77),
330, 469

begrenset
følge, 211
funksjon, 249

begynnelsesbetingelse, 169

Berkeley, George
(1685–1753), 331

Bernoulli, Daniel
(1700–82), 273, 800

Bernoulli, Johann
(1667–1748), 472, 800

Bernoulli, Niklaus
(1695–1726), 800

Bernoullis ulikhet, 37

betinget konvergens, 718

bevis ved motsigelse, 23

Bhaskara II (1114–85), 73

Binet, Jacques
(1786–1856), 226

Binets formel, 226

binomialformelen, 54, 771

binomialkoeffisienter, 43,
70

binomisk rekke, 773, 798

Birkeland, Richard
(1879–1928), 162

Bjerknes, Carl Anton
(1825–1903), 642

- Bolzano, Bernhard (1781–1848), 332, 730
- Bombelli, Raffaello (1526–72?), 116, 117
- Brahe, Tycho (1546–1601), 391
- Brahmagupta I (f. 598), 73, 75
- Brun, Viggo (1885–1978), 80, 477
- buelengde, 447, 448
- Bürgi, Jost (1552–1632), 111
- C**
- © (komplekse tall), 118
- Cantor, Georg (1845–1918), 112, 803
- Cantor, Georg (1845–1918) (oppg.), 100
- Cantors diagonalmetode (oppg.), 100
- Cardano, Gerolamo (1501–76), 81, 116, 157, 158, 270
- Cauchy, Augustin-Louis (1789–1857), 161, 332, 333, 473, 540, 542, 687, 802
- Cauchy-følge, 221, 223
- Cauchy-Kovalevskajas teorem, 637, 640
- Cauchy-produkt, 749
- Cauchys fortetningstest (oppg.), 711
- Cauchys middelverdisetning, 298
- Cavalieri, Bonaventura (1598–1647), 469
- Cayley, Arthur (1821–95), 162
- Cellérier, Charles (1818–1890), 730
- Champollion, Jean François (1790–1832), 276
- Chatelet, Gabrielle Émilie du (1706–49), 636
- Chin Chiu-Shao (1202–61), 74
- Christina av Sverige (1626–89), 271
- Copernicus, Nicholaus (1473–1543), 390
- cosh, 384
- cosinus hyperbolicus, 384
- cot, 373
- cotangens, 373
- cotangens hyperbolicus, 386
- cotangenssetningen (oppg.), 375
- Cotes, Roger (1682–1716), 159
- coth, 386
- Coulombs lov, 533
- Crelle, August Leopold (1780–1855), 540, 541
- Cunha, José Anastácio da (1744–87), 331
- D**
- d'Alembert, Jean-Baptiste le Rond (1717–83), 159, 272, 274
- Darboux' teorem (oppg.), 297
- Darboux, Jean Gaston (1842–1917), 432, 473, 642
- Darboux-integral, 432, 435
- de Moivre, Abraham (1667–1754), 135, 159, 226, 803
- de Moivres formel, 135
- Dedekind, Richard (1831–1916), 112
- definisjonsmengde, 231
- Degen, Carl Ferdinand (1766–1825), 537
- del Ferro, Scipione (1465–1526), 116, 156, 157
- delbrøkkopp spalting, 498, 504
- delfølge, 218
- della Nave, Annibale (ca. 1500–1558), 157
- delsum, 689, 724
- delvis integrasjon, 478
- derivasjon under integraltegnet, 676
- derivasjon, logaritmisk, 287
- deriverbar, 280
- derivert, 280
- Descartes, René (1596–1650), 159, 271, 328, 330
- desimaltall, 110
- differensial, 285
- differensialligning, 550
- annendens homogen, 589
- annendens inhomogen, 606
- eksistens og entydighet, 567, 592, 596, 598
- førsteordens lineær, 550
- partiell, 637
- prosjektiv (oppg.), 587
- separabel, 572
- differensligning
- annendens homogen, 167, 168
- annendens inhomogen, 186
- førsteordens homogen, 167
- førsteordens inhomogen, 186
- Dini, Ulisse (1845–1918), 669
- Dinis teorem, 670
- Diofant (ca. 250 e. Kr.), 73, 75, 76
- diofantisk ligning, 73
- Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune (1805–59), 79, 275, 276, 803–805
- Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune (1805–59) (oppg.), 724
- Dirichlets test (oppg.), 724
- diskontinuerlig, 236

- diskontinuerlig i Eulers forstand, 272
- divergenstest, 692
- divergent
følge, 205
integral, 524
rekke, 690
- divergerer mot uendelig, 209
- Dostojevskij, Fjodor Mikhailovitsj (1821–81), 639
- E**
- egenfrekvens, 622
- egyptisk matematikk, 68
- Eisenstein, Ferdinand Gotthold Max (1823–52), 79
- ekstremalpunkt, 250
- ekstremalverdisetningen, 251
- ekvivalenspil, 22
- ekvivalente, 22
- elliptiske funksjoner, 545
- elliptiske integraler, 544
- en-entydig (= injektiv), 366
- ensidig grense, 258
- epsilon-delta-argument, 232
- ϵ -pølse, 665
- etnomatematikk, 68
- Eudoxos (ca. 400–ca. 350 f. Kr.), 113, 395, 467, 473
- Euklid (ca. 300 f. Kr.), 69, 113
- Euler, Leonhard (1707–83), 77, 134, 159, 271, 544, 546, 636, 660, 798–803
- Euler-ligning (oppg.), 606
- Eulers funksjonsbegrep, 271, 273
- Eulers identitet, 134
- Eulers konstant, 783
- Eulers kontinuitetsbegrep, 271, 273
- Eulers metode, 628
- Eulers midtpunktsmetode, 630
- Eulers produktformel, 799
- F**
- følge, 165
av funksjoner, 662
avtagende, 211
begrenset, 211
divergens av, 205
konvergens av, 205
monoton, 211
voksende, 211
- Fagnano, Giulio Carlo (1682–1766), 544
- fakultet, 42, 533, 681
- fase, 598, 620
- faseform, 598
- Fermat, Pierre de (1601–65), 76, 271, 328, 330, 469
- Fermats formodning, 77
- Fermats prinsipp, 342
- Ferrari, Ludovico (1522–65), 116, 157, 162
- Fibonacci, Leonardo (ca. 1170–ca. 1250), 110, 166, 225, 226
- Fibonacci-tall, 166, 172, 803
- fikspunkt (oppg.), 225
- Fior, Antonio Maria, 157
- forholdstesten, 705, 719
- Fourier, Jean-Baptiste-Joseph de (1768–1830), 79, 274–276, 540, 687, 803
- Frobenius, Georg Ferdinand (1849–1917), 162
- funksjon, 231
Dirichlets definisjon av, 275
Eulers definisjon av, 271
kontinuerlig, 232, 260
moderne definisjon av, 275
- funksjonsfølge, 662
- derivasjon av, 673
- integrasjon av, 672
- G**
- Galilei, Galileo (1564–1642), 391, 392
- Galois, Evariste (1811–32), 162, 538, 541, 543, 545, 802
- Galois-grupper, 543, 642
- gammafunksjon, 534
- Gauss' test (oppg.), 712
- Gauss, Carl Friedrich (1777–1855), 76, 78, 79, 149, 160, 277, 802, 805
- generell løsning, 171
- genererende funksjon, 777, 803
- geometrisk rekke
endelig, 36
uendelig, 691
- Gerbert av Aurillac (Sylvester II) (945–1003), 110
- Germain, Sophie (1776–1831), 79
- Girard, Albert (1595–1632), 76, 149, 158
- globalt maksimum, 310
- globalt minimum, 310
- Goldbach, Christian (1690–1764), 77
- Goldbachs formodning, 77
- gravitasjonsloven, 391, 450
- Green, Ben (1977–), 79
- Gregory, James (1638–75), 469, 746, 798
- Gregorys formel, 746
- grensesammenligningskriteriet for integraler, 531
for rekker, 703
- grenseverdi, 254, 261, 262
- Guldberg, Cato Maximillian (1836–1902), 642
- H**
- høyrekontinuerlig (oppg.), 241

- Hadamard, Jacques
 (1865–1963), 79, 804
 Hamilton, William Rowan
 (1805–65), 161
 Hansteen, Christopher
 (1784–1873), 537, 540
 Hardy, Godfrey Harold
 (1877–1947), 80
 harmonisk rekke, 693
 harmoniske svingninger,
 618
 hastighet, 348
 Hauk Erlendsson (ca.
 1265–1334), 110
 Hauksbok, 110
 Heine, Eduard (1821–81),
 112
 hele tall, 27
 Helfgott, Harald (1977–),
 77
 Hermite, Charles
 (1822–1901), 162, 545
 Herodot (ca. 484–ca. 425 f.
 Kr.), 68
 Hilbert, David
 (1862–1943), 112
 Holmboe, Bernt Michael
 (1795–1850), 539, 541
 Holst, Elling (1849–1915),
 642
 homogen
 differensialligning, 589
 differensligning, 167,
 186
 Hookes lov, 450, 601, 617
 Hudde, Jan (1628–1704),
 330
 Huygens, Christiaan
 (1629–95), 472
 hvis A , så B , 21
 hvis og bare hvis, 22
 Hypatia (ca. 370–415), 72
 hyperbolske funksjoner,
 384, 387
- I**
 Ibn al-Haytham, Abu Ali
 al-Hasan (965–1039),
 75, 469
 ikke-standard analyse, 335
 imaginær del, 117
 imaginært tall, 118
 implikasjons spill, 21
 implisere, 21
 indisk matematikk, 70, 73
 induksjon, 36, 38, 75
 induksjonsprinsippet, 36,
 38
 induskulturen, 70
 infimum (= største nedre
 skranke), 102
 infinitesimaler, 330, 331,
 335
 ingensteds deriverbar
 funksjon, 229, 726, 730
 ingensteds deriverbar
 funksjon (oppg.), 242
 inhomogen
 differensialligning, 589,
 606
 differensligning, 186
 initialbetingelse, 169, 569
 injektiv (= en-entydig),
 366
 inkakulturen, 68
 inkommensurabel, 113
 inkommensurabel (oppg.),
 99
 integral, 405
 øvre-, 404
 Darboux-, 432, 435
 divergens av, 524
 konvergens av, 524, 526,
 527, 529
 Lebesgue-, 473
 nedre-, 405
 Riemann-, 433
 ubestemt, 427
 uegentlig, 523
 integraltesten, 699
 integrerbar, 405
 intervaller, 87, 88
 invers funksjon (= omvendt funksjon), 367
 irrasjonalt tall, 92
 $\sqrt{2}$ er et, 93
 e er et, 659
 eksistens av, 93
 Ishango-benet, 67
- J**
 Jacobi, Carl Gustav Jacob
 (1804–51), 79, 277, 538,
 540, 545
 Jing Run Chen (1933–96),
 77
 Jyesthadevas (ca. 1550),
 798
- K**
 kaos, 227
 karakteristisk ligning
 for differensialligninger,
 590
 for differensligninger,
 170
 Kemp, Christine (Crelly),
 539, 541
 Kepler, Johannes
 (1571–1630), 391, 469
 Kerala-skolen, 798
 Khayyam, Omar
 (1048–1131), 156
 kinesisk matematikk, 70,
 71, 73, 74
 kinesisk restteorem, 74
 kjerneregelen, 283
 Klein, Felix (1849–1925),
 112, 641, 643
 koblete hastigheter, 348
 Kolmogorov, Andrej
 Nikolajevitsj (1903–87),
 473
 kommensurabel, 113
 kommensurabel (oppg.),
 99
 komplekse tall, 117, 119
 geometrisk tolkning,
 123
 multiplikasjon av, 126
 polarform, 125
 regneregler for, 119
 kompletthetsprinsippet,
 102, 107, 211, 222, 247,
 252, 332
 kongruens modulo, 74
 konjugasjon, 120
 konkav funksjon, 314
 kontinuerlig, 232, 237, 260

- kontinuerlig i Eulers
forstand, 272
- kontraksjon, 224
- kontrapositivt bevis, 23
- konveks funksjon, 314
- konvergens
absolutt, 717
av følge, 205, 220
av integral, 524, 526,
527, 529
av rekke, 690
betinget, 718
punktvis, 663
uniform, 666, 725
- konvergensområde, 725
- konvergensradius, 733
- Kossak, Ernst
(1839–1902), 112
- Kovalevskaja, Sofja
Vasiljevna (1850–91),
334, 637, 640
- kritisk punkt, 311
- Kronecker, Leopold
(1823–91), 112, 641
- Kummer, Ernst (1810–93),
112, 641
- kuttaka, 73
- kvadratsummer, 76
- kvaternioner, 161
- L**
- L'Hôpital, Guillaume
François Antoine
(1661–1704), 331
- L'Hôpitals regel for
« ∞/∞ », 301
- L'Hôpitals regel for « $0/0$ »,
299
- Lagrange, Joseph Louis
(1736–1813), 76, 77,
159, 637, 655, 798, 802
- Lagranges restleddsformel,
656
- Lagranges restleddsformel
(oppg.), 661
- Laplace, Pierre Simon de
(1749–1827), 159, 637
- Lebesgue, Henri
(1875–1941), 473
- Lebesgue-integral, 473
- ledd
i følge, 165
i rekke, 690
- Legendre, Adrien-Marie
(1752–1833), 77, 277,
540
- Legendres formodning, 79,
277
- Leibniz' formel, 746
- Leibniz, Gottfried Wilhelm
(1646–1716), 330, 395,
412, 469, 471, 472, 544,
636, 746
- Levi ben Gerson
(1288–1344), 75
- Lie, Marius Sophus
(1842–99), 543, 641,
644
- Lie-algebra, 643
- Lie-gruppe, 643
- ligninger
annengrads-,
komplekse, 143
diofantiske, 73
femtegrads-, 162, 537,
539, 541
fjerdegrads-, 116, 157
løsbare av, 162, 539,
541, 543
tredjegrads-, 116, 156,
158
- Lilavati, 73
- Liouville, Joseph
(1809–82), 543
- Ljunggren, Wilhelm
(1905–73), 80
- logaritmer, 111
- logaritmisk derivasjon, 287
- logistisk vekst, 576
- logistisk vekst (oppg.), 218
- lokalt maksimum, 310
- lokalt minimum, 310
- M**
- MacLaurin, Colin
(1698–1746), 331
- Madhava (ca. 1340–ca.
1425), 746, 798
- maksimumspunkt, 250,
310
- globalt, 310
- lokalt, 310
- maskevidde, 433
- mayakulturen, 71
- Mendelssohn, Moses
(1729–86), 277
- Mendelssohn-Bartholdy,
Felix (1809–47), 277
- mengde, 86
- Meray, Charles
(1835–1911), 112
- Mercator, Nicholas
(1620–87), 798
- Mertens, Franz Carl Joseph
(1840–1927), 750
- middelverdisetningen, 290
- minimumspunkt, 250, 310
- globalt, 310
- lokalt, 310
- minste øvre skranke (=supremum), 101
- Mittag-Leffler, Gösta
(1846–1927), 640
- modulo, 74
- modulus, 126
- Monge, Gaspard
(1746–1818), 640
- monoton følge, 211
- Moskva-papyrusen, 68
- multiplisitet, 150
- N**
- \mathbb{N} (naturlige tall), 27
- nærheten, 254
- Nagell, Trygve
(1895–1988), 80
- Napier, John (1550–1617),
111
- naturlige tall, 27
- nedad begrenset, 102
- nedre skranke, 102
- nedre trappesum, 405
- nedreintegral, 405
- Newton, Isaac
(1642–1727), 54, 330,
391, 395, 412, 469, 471,
472, 544, 636, 798, 802
- Newtons metode, 358
- Nilakantha (ca. 1445–ca.
1545), 746, 798

- Noether, Amalie Emmy (1882–1935), 112
 Noether, Max (1844–1921), 112
n-te rot, 140
- O**
 oddetall, 28
 ombytte, 720
 omdreiningsflate (oppg.), 457
 omdreiningslegeme
 om *x*-aksen, 440, 443
 om *y*-aksen, 443, 447
 omegn, 280
 omvendt funksjon (= invers funksjon), 367
 oppad begrenset, 101
 opphoppningspunkt (oppg.), 223
 Ore, Øystein (1899–1968), 80
 Oresme, Nicole (ca. 1323–82), 693, 798
- P**
 partall, 28
 partikulær løsning, 171, 186
 partisjon, 403
 Pascal, Blaise (1623–62), 54, 81, 82
 Pascals trekant, 54, 70, 74, 81
 periode, 601
 permutasjon av \mathbb{N} , 720
 π , 467, 469
 Platon (427–347 f. Kr.), 72
 Plimpton 322, 69
 Plutark (ca. 45– ca. 125 e. Kr.), 468
 Poisson, Simeon Denis (1781–1840), 543
 polarform, 125
 polarkoordinater, 124
 Polya, George (1887–1985), 795
 polynom, 149
 reelt, 149
 polynomdivisjon, 61, 497
- potensrekke, 732
 derivasjon av, 744
 integrasjon av, 743
 multiplikasjon av, 748
 primtall, 28
 primtallsatsen, 79, 804
 projektiv
 differensialligning (oppg.), 587
 Ptolemeus (ca. 100–178 e. Kr.), 390
 punktvis konvergens, 663
 Pythagoras (ca. 580–ca. 500 f. Kr.), 72
 Pythagoras' læresetning, 69, 71
 pythagoreisk trippel, 69, 73
- Q**
 \mathbb{Q} (rasjonale tall), 92
 quipu, 68
- R**
 \mathbb{R} (reelle tall), 85
 Raabes test (oppg.), 712
 Ramanujan, Srinivasa (1887–1920), 80
 randkrav, 569
 rasjonal funksjon, 497
 i sinus og cosinus, 515
 rasjonale tall, 92
 Rasmusen, Søren (1768–1850), 539
 realdel, 117
 reduksjon av ordenen, 592
 reelle tall, 85
 aksiomer for, 106, 109
 konstruksjon av, 111
 rekke, 689
 alternerende, 714
 av funksjoner, 724
 begrenset, 698
 binomisk, 773
 divergent, 690
 geometrisk, 690
 harmonisk, 693
 konvergent, 690
 positiv, 698
 sum av, 690
- rekurrent, 790
 rekursjonsformel, 481
 resonans, 621, 623
 restledd, 652, 655
 restledd (oppg.), 662
 Rhind-papyrusen, 68, 467
 Riemann, Bernhard Georg Friedrich (1826–66), 79, 432, 473, 545, 721, 804, 805
 Riemann-integral, 433
 Riemann-integrerbar, 433
 Riemann-sum, 432
 Riemanns hypotese, 804
 Roberval, Gilles Personne de (1602–75), 330
 Robinson, Abraham (1918–74), 335
 Rolles teorem, 290
 rottesten, 706, 719
 Ruffini, Paolo (1765–1822), 162
 Runge-Kuttas metode, 630, 632
- S**
 sammenligningskriteriet
 for integraler, 530
 for rekker, 702
 sannsynlighet, 46
 Seidel, Philipp (1821–96), 687
 sekantsetningen (= middelverdisetningen), 290
 Selberg, Atle (1917–2007), 79, 80, 804
 Selberg, Atle (1917–2007) (oppg.), 766
 Selberg, Henrik (1906–93), 79
 Selberg, Sigmund (1910–94), 80
 Selmer, Ernst (1920–2006), 81
 separabel
 differensialligning, 572
 Simpson, Thomas (1710–61), 461
 Simpsons metode, 462

- sinh, 384
 sinus hyperbolicus, 384
 skifte av variabel (= substitusjon), 485, 487, 490
 skjæringssetningen, 243
 Skolem, Thoralf Albert (1887–1963), 80
 Sluse, René François de (1622–85), 330
 Snell, Willebrord van Royen (1591–1626), 341
 Snells brytningslov, 341
 snitt, 87
 Somerville, Mary Fairfax (1780–1872), 637
 største nedre skranke (= infimum), 102
 Stevin, Simon (1548–1620), 110
 Stirling, James (1692–1770), 681
 Stirlings formel, 669, 681, 686
 Stokes, George (1819–1903), 687
 stykkevis monoton, 409
 substitusjon (= skifte av variabel), 485, 487, 490
 sum av rekke, 690
 summetegn, 28
 supremum (= minste øvre skranke), 101
 svingende streng, 272
 svingninger
 dempede, 618
 faseform for, 598
 harmoniske, 618
 kritisk dempning av, 619
 overkritisk dempning av, 619
 resonans av, 621, 623
 udempede, 618
 Sylow, Peter Ludvig Mejdell (1832–1918), 543, 642
- T**
 Tårnene i Hanoi, 194
- Tacoma Bridge, 622
 tallverdi, 88, 126
 tangens hyperbolicus, 386
 tanh, 386
 Tao, Terence (1975–), 79
 Tartaglia, Niccolò (1499–1557), 116, 157
 Tauber, Alfred (1866–1942), 740
 Tauber-teoremer, 740
 Tauber-teoremer (oppg.), 742
 Taylor, Brook (1685–1731), 272, 648, 798
 Taylor-polynom, 648
 Taylor-rekke, 753, 798
 Taylors formel, 654
 tellbar (oppg.), 100
 Thales fra Milet (ca. 625–ca. 545 f. Kr.), 72
 Thomas av Aquinas (1225–74), 389
 Thue, Axel (1863–1922), 80
 Torricelli, Evangelista (1608–47), 578
 Torricellis lov, 578, 581
 transient, 790
 trapesmetoden, 460, 466
 trappesum, 404
 trekantulikheter, 88, 90, 130
 Tsjebysjev, Pavnutij (1821–94), 639
 Tsu Chung-chieh (430–501), 469
- U**
 ubestemt integral, 427
 ubestemt uttrykk, 210, 298, 301, 302
 uegentlig integral, 523
 ukjente koeffisienters metode, 607
 Ulug Beg (1394–1449), 111
 uniform kontinuitet (oppg.), 242
 uniform konvergens, 666, 724
- union, 87
 utvalg, 432
- V**
 Vallée Poussin, Charles de la (1866–1962), 79, 804
 variasjon av parametre, 612
 variasjonsprinsipp, 343
 varmeledning, 274
 vendepunkt, 318
 venstrekontinuerlig (oppg.), 242
 verdimensjon, 231
 Viète, François (1540–1603), 158, 798
 Viètes formel (oppg.), 401
 virrevandring, 788, 794, 795
 rekurrent, 790
 symmetrisk, 788
 transient, 790
 voksende
 følge, 211
 funksjon, 292
 Voltaire, François Marie Arouet de (1694–1778), 636
- W**
 Wallis, John (1616–1703), 799
 Weierstrass' M -test, 725
 Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (1815–97), 111, 332, 334, 335, 545, 639, 641, 687, 725
 Wessel, Caspar (1745–1818), 117, 123, 160
 Wessel, Johan Herman (1742–85), 160
 Wiles, Andrew (1953–), 77
 Wronski, Josef Hoâné de (1778–1853), 613
 Wronski-determinant, 613
 Wronski-determinant (oppg.), 616

X

Xylander (1532–76), 75

Z

\mathbb{Z} (hele tall), 27

Zenon (ca. 450 f. Kr.), 797

zeta-funksjonen, 77, 803

Ø

øvre skranke, 101

øvre trappesum, 404

øvreintegral, 404