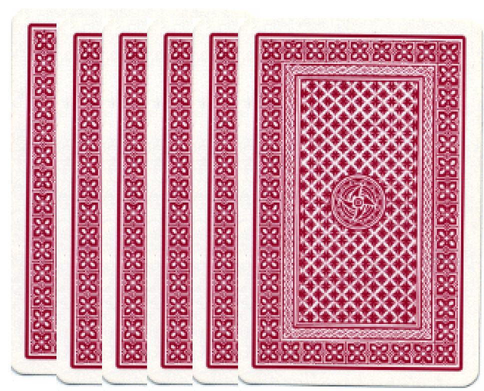
Betinget sannsynlighet, total sannsynlighet og Bayes setning

Kapittel 4.5

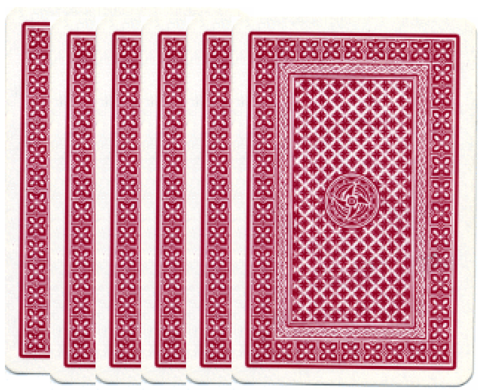
På bakgrunn av materiale fra Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

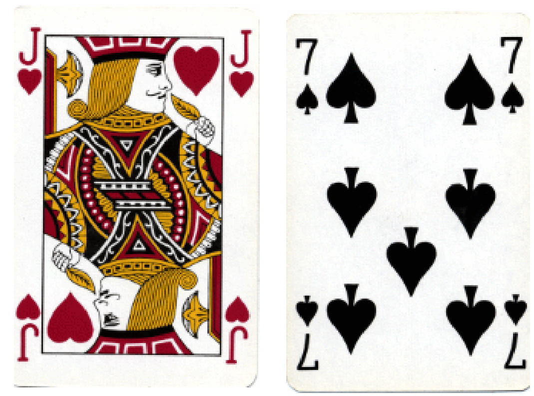
Vi vil først ved hjelp av et eksempel se intuitivt på hva betinget sannsynlighet betyr:

Vi legger fire røde kort og to svarte kort i en bunke



Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til





Ser på begivenhetene:

A = "første kort rødt" B = "andre kort svart"

Vi har at $P(A)$ =

Hvis A har inntruffet er sannsynligheten for B lik

Dette er den *betingede sannsynligheten* for B gitt A

Vi skriver $P(B \mid A)$ =

Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til

Vi har også A^c = "første kort svart"

Hvis A ikke har inntruffet, dvs hvis A^c *h*ar inntruffet (første kort er svart), er sannsynligheten for B lik

Dette er den *betingede sannsynligheten* for B gitt A^c

Vi skriver $P(B \mid A^c)$ =

I eksemplet er det *intuitivt* klart hva betinget sannsynlighet er

Det er ikke alltid like enkelt:

- Hva er den betingede sannsynligheten for at begge kortene er røde gitt at minst ett av dem er rødt?
- Hva er den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?

Vi trenger en definisjon av betinget sannsynlighet!

Vi vil bruke et eksempel til å motivere definisjonen

Norske barn delt inn etter kjønn og fargeblindhet (i prosent):

	Normal	Fargeblind	Totalt
Gutt	**47.3**	**4.1**	**51.4**
Jente	**48.3**	**0.3**	**48.6**
Totalt	**95.6**	**4.4**	**100**

Registrerer kjønn og fargesyn for tilfeldig valgt barn.

Begivenheter: F = "fargeblind" og G = "gutt"

Vi har $P(G) = 0.514$ og $P(F \cap G) = 0.041$

"Opplagt" at $$P(F \mid G) = \frac{0.041}{0.514} = \frac{P(F \cap G)}{P(G)}$$

Eksemplet motiverer *definisjonen*:

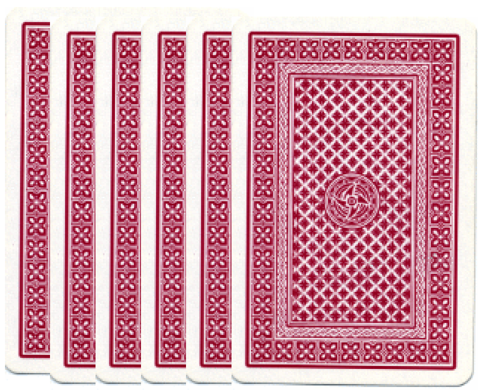
$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

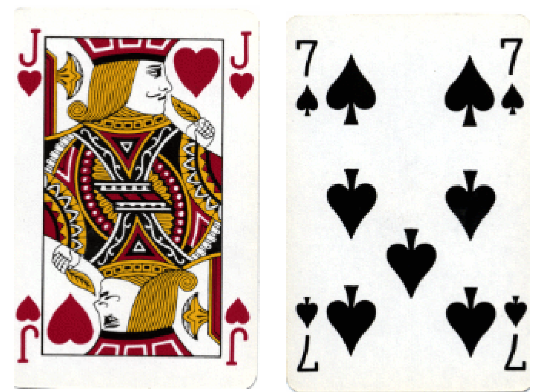
Ved å bytte om "rollene" til *A* og *B*

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Vi ser igjen på korteksemplet:

Trekker tilfeldig ett kort og så ett kort til





A = "første kort rødt" B = "andre kort svart"

Vil bestemme $P(B \mid A)$ ut fra definisjonen
(det gir en "sjekk" på at definisjonen er rimelig)

Vi kan trekke to kort på $6 \cdot 5 = 30$ måter

Vi kan trekke først et rødt og så et svart kort på $4 \cdot 2 = 8$ måter

Vi kan trekke det første kort rødt på $4 \cdot 5 = 20$ måter

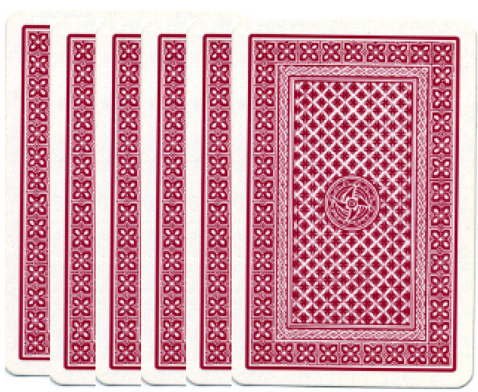
Det gir

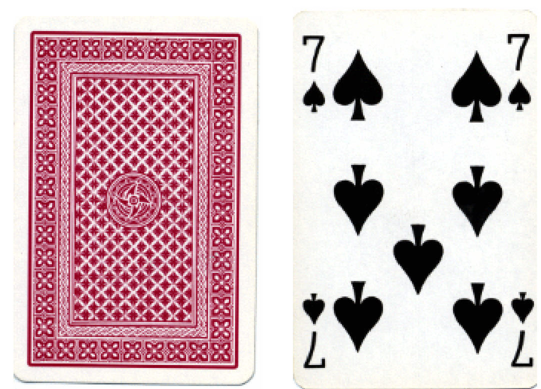
Dermed er

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

(selvfølgelig!)

Men hva er den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart? (Jf. det andre spørsmålet ovenfor)





A = "første kort rødt" B = "andre kort svart"

Vil bestemme $P(A \mid B)$

Vi har funnet at $P(A \cap B) = \frac{8}{30}$

Vi kan få et svart kort andre gang på to måter:

- først rødt, så svart kort, dvs $A \cap B$
- to svarte kort, dvs $A^c \cap B$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

dvs lik sannsynligheten for at første kort er svart!

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Hva betyr det egentlig at den betingede sannsynligheten er 4/5 = 80% for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?

Husk at *sannsynlighet er relativ frekvens i det lange løp*

- At $P(A) = 2/3$ betyr at det første kortet vil være rødt ca 2/3 av gangene i det lange løp

- At $P(A \mid B) = 4/5$ betyr at *hvis vi bare teller med de gangene der det andre kortet er svart,* så vil det første kortet være rødt ca 4/5 *av disse gangene* i det lange løp

Produktsetningen

Definisjon av betinget sannsynlighet:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Denne gir *produktsetningen:*

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)}$$

Tilsvarende:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Produktsetningen og uavhengighet

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)}$$

Husk: To hendelser er uavhengige hvis kunnskap om at den ene inntreffer ikke påvirker sannsynligheten for at den andre inntreffer, dvs hvis A og B er uavhengige er $P(A|B) = P(A)$

Dermed gir produktregelen $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (som vi lærte tidligere for uavhengige hendelser)

Ovenfor fant vi P($A \cap B$) i korteksemplet som "antall gunstige delt på antall mulige utfall"

Vi kan også finne denne sannsynligheten ved produktsetningen

Vi har og

Dermed gir produktsetningen:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Produktsetningen for tre begivenheter:

$$P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A \cap B) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

$$= P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

Produktsetningen gjelder på tilsvarende måte for fire og flere begivenheter

Etter offentlig statistikk er sannsynligheten

- 95% for at 65 år gammel kvinne skal bli minst 70 år
- 91% for at 70 år gammel kvinne skal bli minst 75 år
- 85% for at 75 år gammel kvinne skal bli minst 80 år

Hva er sannsynligheten for at 65 år gammel kvinne skal bli minst 80 år?

Tar for oss 65 år gammel kvinne:

A = "kvinnen blir minst 70 år"

B = "kvinnen blir minst 75 år"

C = "kvinnen blir minst 80 år"

Opplysningene gir:

- P(A)=
- P(B | A) =
- P(C | A ∩B) =

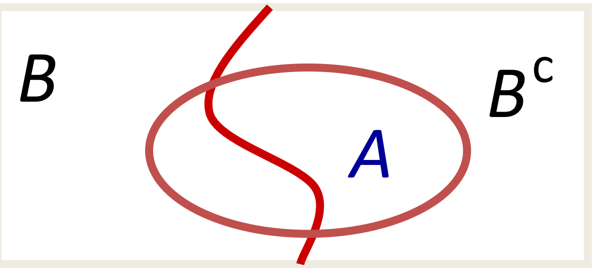
Hvis kvinnen blir minst 80 år, blir hun også minst 70 år og minst 75 år

Derfor er $A \cap B \cap C = C$

$$P(\text{minst 80 år}) = P(C) = P(A \cap B \cap C)$$

Total sannsynlighet

Vi kan skrive en begivenhet *A* som en disjunkt union av
$A \cap B$ og $A \cap B^c$



Dette og produktsetningen gir setningen om *total sannsynlighet*

$$\boxed{\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid B^c) \cdot P(B^c) \end{aligned}}$$

En bedrift produserer varer på to maskiner

Maskin I produserer 35% av varene
Maskin II produserer 65% av varene

3% av varene fra maskin I er defekte
1% av varene fra maskin II er defekte

En vare velges tilfeldig fra lageret

Hva er sannsynligheten for at varen er defekt?

A = "varen er defekt"

B = "varen kommer fra maskin I "

B^c = "varen kommer fra maskin II "

Setningen om total sannsynlighet gir:

$$P(A)$$

Bayes setning

Definisjon av betinget sannsynlighet:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Bruker produktsetningen for telleren og total sannsynlighet for nevneren og får *Bayes setning*

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid B^c) \cdot P(B^c)}}$$

Mer generell versjon i boken s. 285:

BAYES'S RULE

Suppose that $A_1, A_2, \ldots, A_k$ are disjoint events whose probabilities are not 0 and add to exactly 1. That is, any outcome is in exactly one of these events. Then if C is any other event whose probability is not 0 or 1,

$$P(A_i \mid C) = \frac{P(C \mid A_i)P(A_i)}{P(C \mid A_1)P(A_1) + P(C \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(A_k)P(C \mid A_k)}$$

Definition, pg 322a
Introduction to the Practice of Statistics, Fifth Edition

Se på eksempelet med produksjon av varer.

Hvis varen er defekt, hva er da sannsynligheten for at den kommer fra den første maskinen?

A = "varen er defekt"
B = "varen kommer fra maskin I"

$$P(B) = 0.35 \qquad P(B') = 0.65$$

$$P(A \mid B) = 0.03 \qquad P(A \mid B') = 0.01$$

Bayes setning gir:

P(B|A)=

En kvinne tar en mamografiundersøkelse

Se på begivenhetene:

S = "kvinnen har brystkreft"
M = "mammogrammet viser tegn på kreft"

Fra erfaringer med mammografi har vi

$$P(M \mid S) = 0.95 \qquad P(M \mid S^c) = 0.035$$

Vi antar at $P(S) = 0.007$

Anta at mammogrammet viser tegn på kreft

Hva er da sannsynligheten for at kvinnen virkelig har kreft?

Bayes setning gir:

$$P(S \mid M)$$

Selv om mammogrammet viser tegn på kreft, er det bare 16% sannsynlig at hun virkelig har det