Kapittel 7: Inferens for forventninger-ukjent standardavvik

- 7.1: Inferens for forventningen i en populasjon
- 7.2: Inferens for å sammenligne to forventninger

7.1 Inferens for forventningen i en populasjon

- t-fordelingen
- Ett-utvalgs t-konfidensintervall
- Ett-utvalgs t-test
- Matchede par t-prosedyrer
- Robusthet

Sweetening colas

En cola-produsent ønsker å teste hvor mye søtheten til en ny cola-drikk påvirkes av lagring. Søthets-tapet som følge av lagring ble bedømt av 10 profesjonelle smakstestere (ved å sammenligne søtheten før og etter lagring):

Smakstester	Søthets-tap
1	2.0
2	0.4
3	0.7
4	2.0
5	−0.4
6	2.2
7	−1.3
8	1.2
9	1.1
10	2.3

Vi ønsker altså å teste om lagring medfører tap i søthet, altså:

H_0: $\mu = 0$ versus H_a: $\mu > 0$

der μ er forventet tap av søthet

Dette ser kjent ut. Men siden dette er en ny cola-oppskrift har vi ikke noe populasjonsdata fra tidligere, og vi kjenner ikke populasjonsparameteren σ.

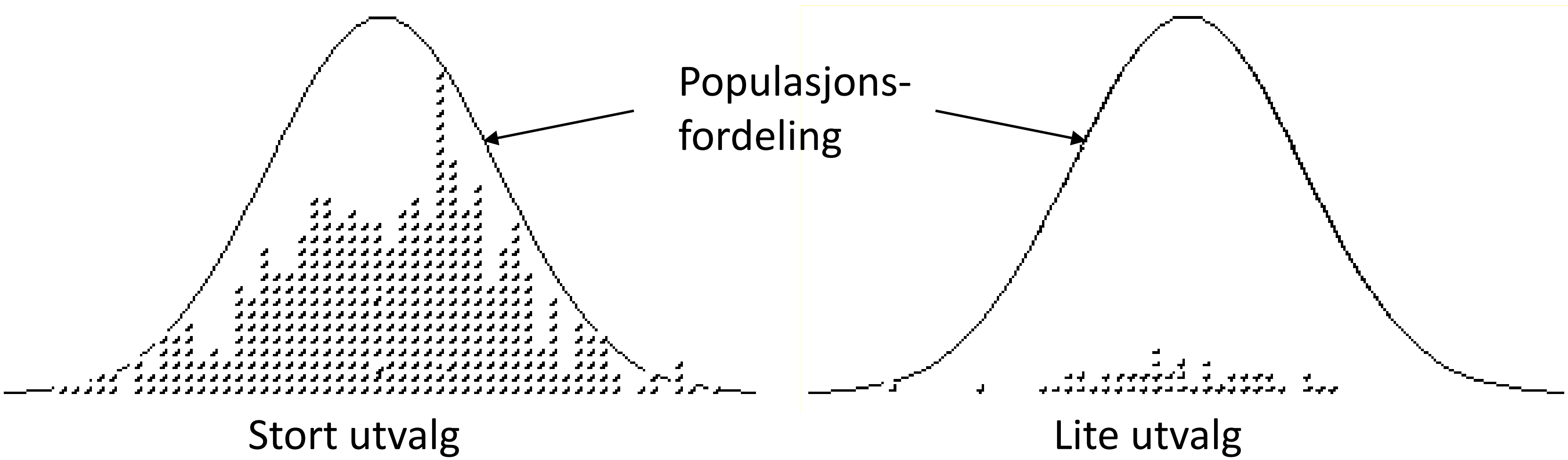
Dette er en veldig vanlig situasjon for relle data.

Når σ er ukjent

Empirisk standardavvik s gir oss et estimat for populasjonens standardavvik σ.

- Når utvalgsstørrelsen er stor, er det sannsynlig at utvalget representerer populasjonen godt. Da er s et godt estimat for σ.

- Men hvis utvalgsstørrelsen er liten, er s et dårlig estimat for σ.



Husk empirisk standardavvik

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2}$$

der n-1 kaltes antall frihetsgrader (degrees of freedom, df)

En populasjon

- Anta $x_1,...,x_n$ uavhengige fra $N(\mu,\sigma)$
- Observator: $\bar{x}$
- σ kjent: $z=(\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$
- $\sigma/\sqrt{n}$: standardavvik for observator $\bar{x}$

- $s/\sqrt{n}$: estimert standardavvik for observator $\bar{x}$
- Kalles *standardfeil*

Standard Error, SE = $s/\sqrt{n}$

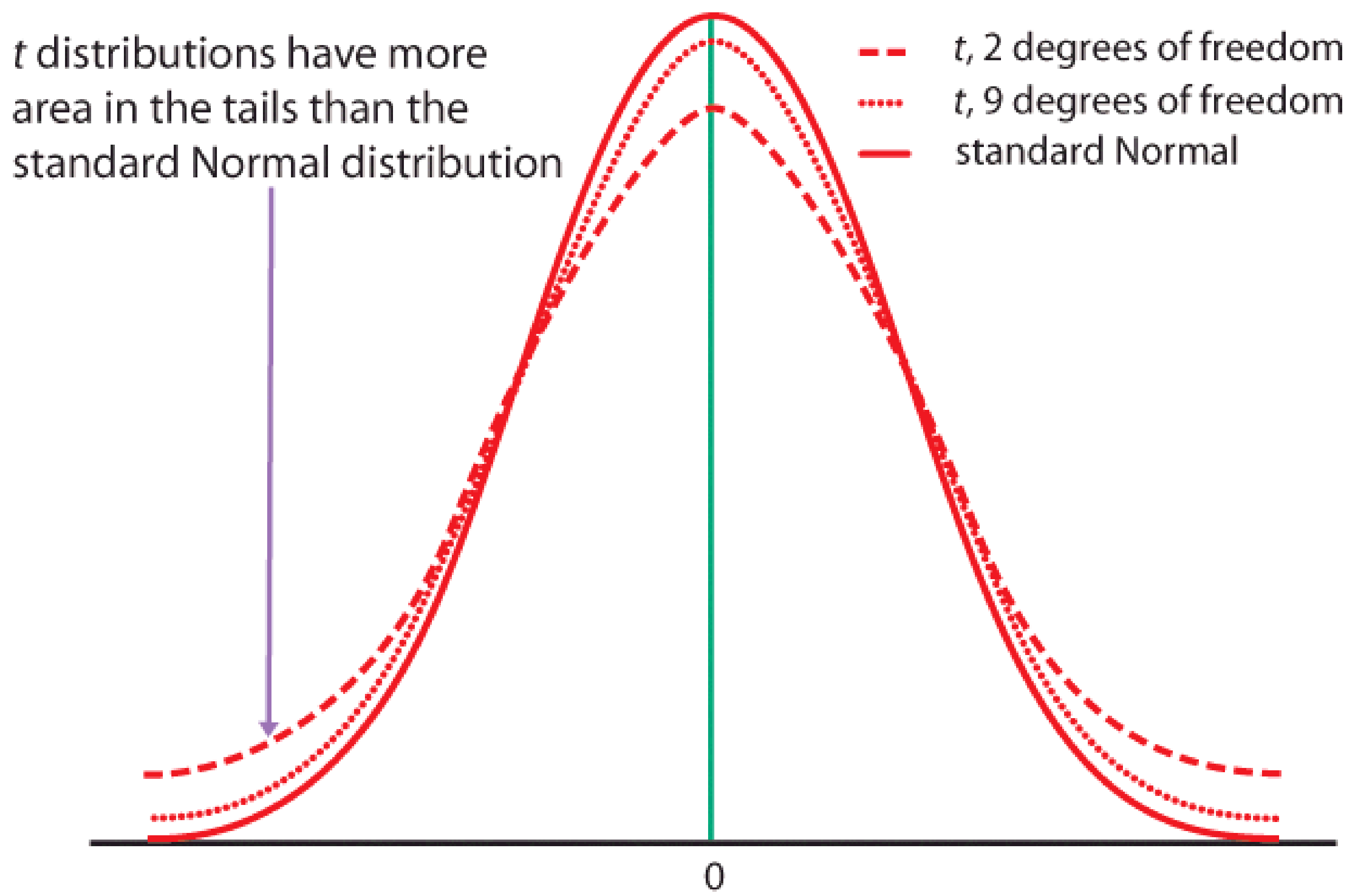
t-fordeling

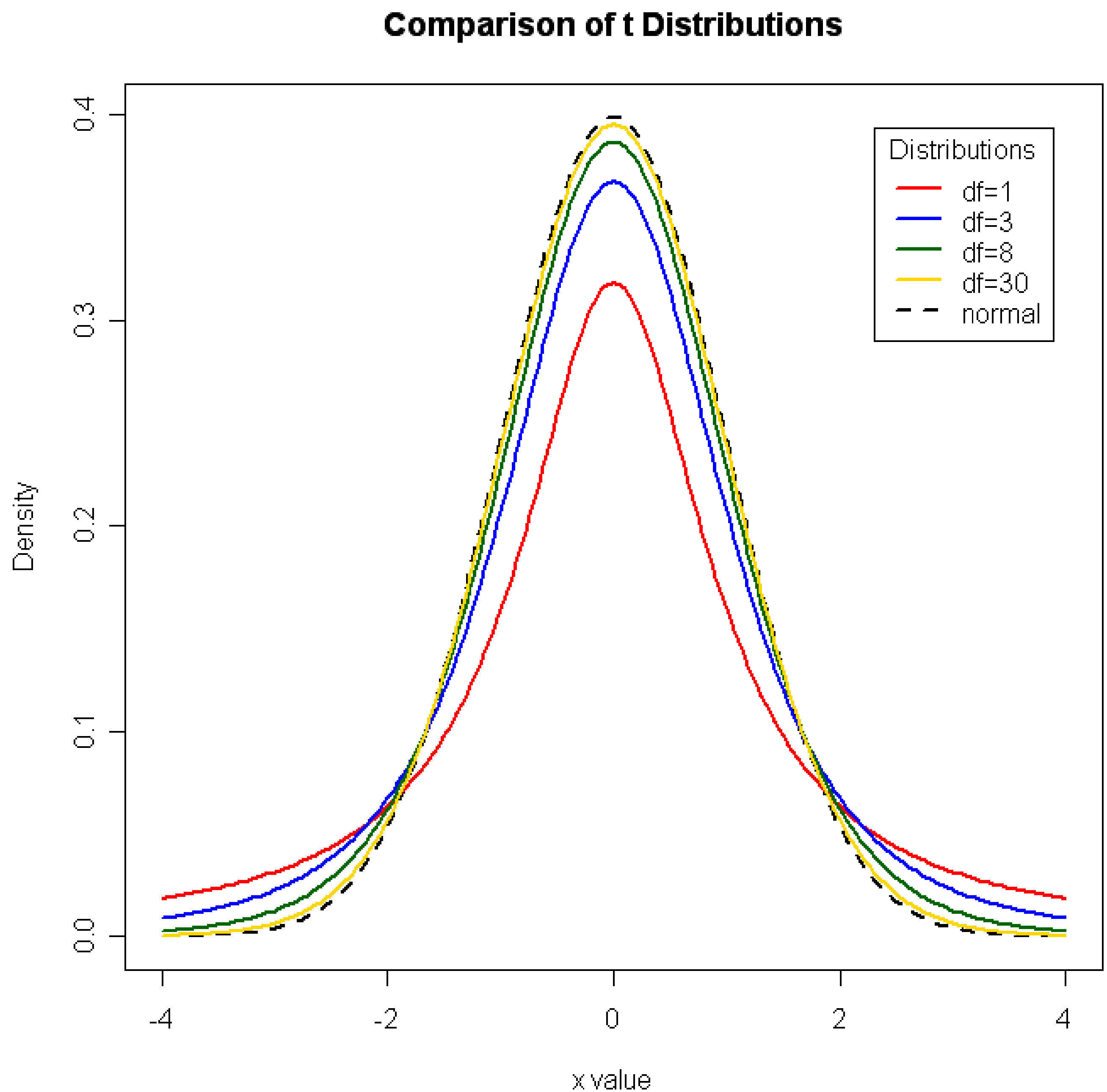
- $z = (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ er N(0,1)
- $t = (\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ er *t-fordelt* med *n-1 frihetsgrader*

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Kalles ett-utvalgs t-observator

- Form som normalfordeling
- Ekstra spredning/usikkerhet pga. ukjent σ
- Nærmer seg N(0,1) når *n* vokser


t distributions have more area in the tails than the standard Normal distribution
t, 2 degrees of freedom
t, 9 degrees of freedom
standard Normal
0

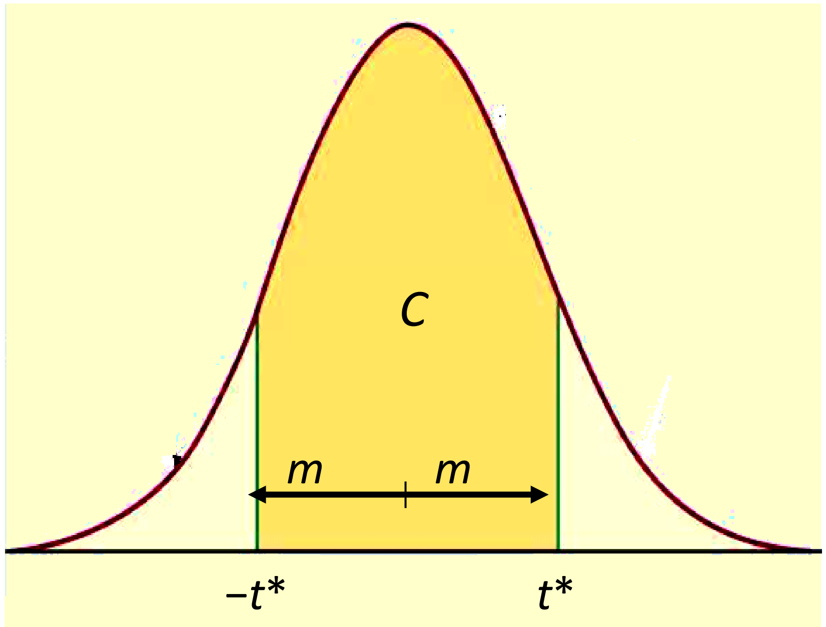


Comparison of t Distributions
Distributions
df=1
df=3
df=8
df=30
normal
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-4
-2
0
2
4
x value

Ett-utvalgs t-konfidensintervall

- σ kjent: $[\bar{x}-z^*\sigma/\sqrt{n},\bar{x}+z^*\sigma/\sqrt{n}]$
- z^* er verdien slik at arealet mellom $-z^*$ og z^* i N(0,1) fordelingen er C

- σ ukjent: $[\bar{x}-t^*s/\sqrt{n},\bar{x}+t^*s/\sqrt{n}]$
- t^* er verdien slik at arealet mellom $-t^*$ og t^* i t(n-1) fordelingen er C



- Feilmarginen er $m = t^* s/\sqrt{n}$
- Eksakt hvis normalfordelte data
- Tilnærmet riktig ellers

•Tabell D

Når σ er ukjent, bruker vi *t*-fordeling med "*n*−1" frihetsgrader (degrees of freedom df).

Tabell D viser *z*-verdier og *t*-verdier knyttet til typiske P-verdier/ konfidensnivåer

Når σ er kjent, bruker vi normalfordeling og den standardiserte z-verdien.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

	Upper tail probability *p*											
df	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.878	3.197	3.611	3.922
19	0.688	0.861	1.066	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	[illegible]	[illegible]	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
z^*	0.674	0.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
	50%	60%	70%	80%	90%	95%	96%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%
	Confidence level *C*											

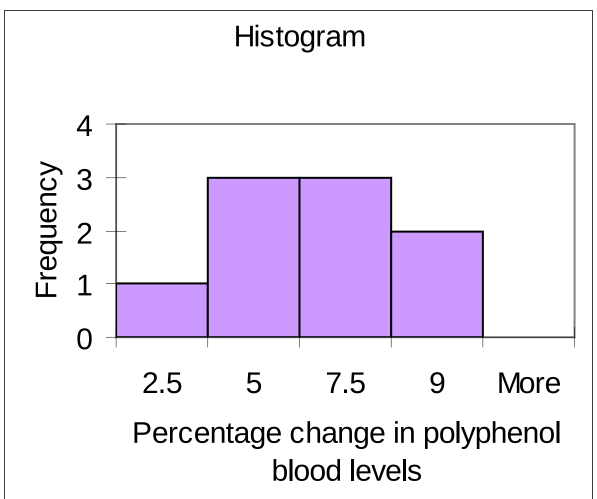
Moderate mengder rødvin

Å drikke rødvin i moderate mengder kan beskytte mot hjerteinfarkt. Polyphenolene i rødvinen virker på kolesterolet, noe som kanskje kan motvirke hjerteinfarkt.

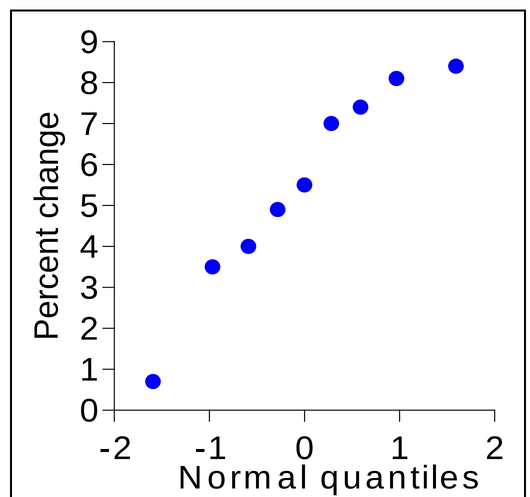
For å undersøke om moderat inntak av rødvin øker forventet nivå av polyphenoler i blodet skulle en gruppe på 9 tilfeldig valgte friske menn drikke en moderat mengde rødvin hver dag i 2 uker. Nivået av polyphenoler i blodet ble målt både før og etter disse 2 ukene, og den prosentvise endringen var som følger:

0.7 3.5 4 4.9 5.5 7 7.4 8.1 8.4

Først: Er dataene tilnærmet normalfordelte?



0	7
1	
2	
3	5
4	09
5	5
6	
7	04
8	14



Det er en lav verdi, men generelt ser det ut til at man kan anta at dataene kan antas å være tilnærmet normalfordelte.

Hva er 95% konfidensintervallet for forventet prosentvis økning av nivå av polyphenoler i blodet?

Utvalgs-gjennomsnitt = 5.5; s = 2.517; df = n − 1 = 8

TABLE D

t distribution critical values

	Upper-tail probability p											
df	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	$\boxed{2.306}$	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041

Utvalgsfordelingen er en t-fordeling med n − 1 frihetsgrader.

For df = 8 og C = 95%: t^* = 2.306.

Feilmarginen m er: $m = t^*s/\sqrt{n} = 2.306 \cdot 2.517/\sqrt{9} \approx 1.93$.

Med 95% sikkerhet kan vi si at forventet prosentvis økning av nivå av polyphenoler i blodet for friske menn som drikker en moderat mengde rødvin hver dag er mellom 3.6% og 7.4%. *Viktig: Konfidensintervallet viser hvor stor endringen er, men ikke om det har en innvirkning på menns helse!*

Ett-utvalgs t-test

Fremgangsmåten for å teste en hypotese er som tidligere:

1. Formuler null- og alternativ-hypoteser (H_0 versus H_a)
2. Velg signifikansnivå α
3. Beregn t-observator og antall frihetsgrader (beregnet ved å anta at parameterverdien gitt av H_0 er sann)
4. Finn ønsket sannsynlighet fra *Tabell D* (sannsynligheten for at et utfall er like ekstremt eller mer ekstremt enn faktisk utfall)
5. Oppgi P-verdi og formuler en konklusjon

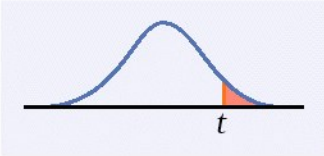
THE ONE-SAMPLE t TEST

Suppose that an SRS of size n is drawn from a population having unknown mean μ. To test the hypothesis H_0: $\mu = \mu_0$ based on an SRS of size n, compute the one-sample t statistic

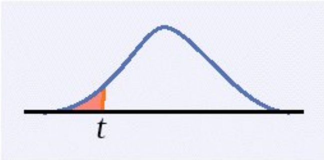
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

In terms of a random variable T having the $t(n-1)$ distribution, the P-value for a test of H_0 against

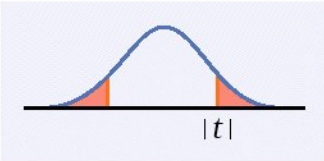
H_a: $\mu > \mu_0$ is $P(T \geq t)$



H_a: $\mu < \mu_0$ is $P(T \leq t)$



H_a: $\mu \neq \mu_0$ is $2P(T \geq |t|)$



These P-values are exact if the population distribution is normal and are approximately correct for large n in other cases.

Definition, pg 454
Introduction to the Practice of Statistics, Fifth Edition

Søthet av cola (*fortsettelse*)

Er det bevis for at lagring medfører søthets-tap for den nye cola-oppskriften på et 0.05 signifikansnivå ($\alpha = 5\%$)?

Taster	Sweetness loss
1	2.0
2	0.4
3	0.7
4	2.0
5	-0.4
6	2.2
7	-1.3
8	1.2
9	1.1
10	2.3
Average	**1.02**
Standard deviation	**1.196**
Degrees of freedom	***n* − 1 = 9**

H_0: $\mu = 0$ versus H_a: $\mu > 0$ (ensidig test)

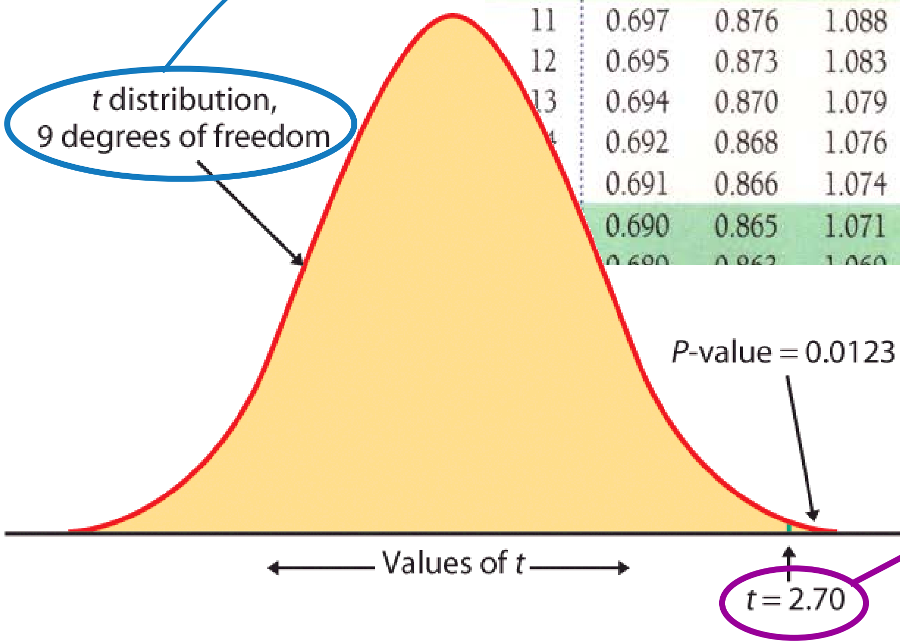
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1.02 - 0}{1.196/\sqrt{10}} = 2.70$$

Antall frihetsgrader: df=10-1=9

•Tabell D

df	Upper tail probability p											
	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
[illegible]	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
[illegible]	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
[illegible]	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015

For df = 9 ser vi bare på denne linjen i tabellen



Den beregnede verdi av t er 2.7. Vi finner de to nærmeste t-verdiene:

2.398 < t = 2.7 < 2.821

så

0.02 > øvre hale p > 0.01

For en en-sidig H_a, er dette P-verdien (mellom 0.01 og 0.02);
for en to-sidig H_a, hadde P-verdien vært det dobbelte (mellom 0.02 og 0.04).

Søthet av cola (*fortsettelse*)

Er det bevis for at lagring medfører søthets-tap for den nye cola-oppskriften på 0.05 signifikansnivå ($\alpha = 5\%$)?

H_0: $\mu = 0$ versus H_a: $\mu > 0$ (ensidig test)

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1.02 - 0}{1.196/\sqrt{10}} = 2.70$$

Taster	**Sweetness loss**
1	2.0
2	0.4
3	0.7
4	2.0
5	-0.4
6	2.2
7	-1.3
8	1.2
9	1.1
10	2.3
Average	**1.02**
Standard deviation	**1.196**
Degrees of freedom	***n* − 1 = 9**

– $2.398 < t = 2.70 < 2.821$ altså $0.02 > p > 0.01$.
  $p < \alpha$ altså er resultatet signifikant.

	Upper tail probability *p*											
df	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781

t-testen har en signifikant p-verdi. Vi forkaster H_0.

Det er et signifikant forventet tap av søthet som følge av lagring.

Søthet av cola (*fortsettelse*)

Session

Minitab

One-Sample T: Loss

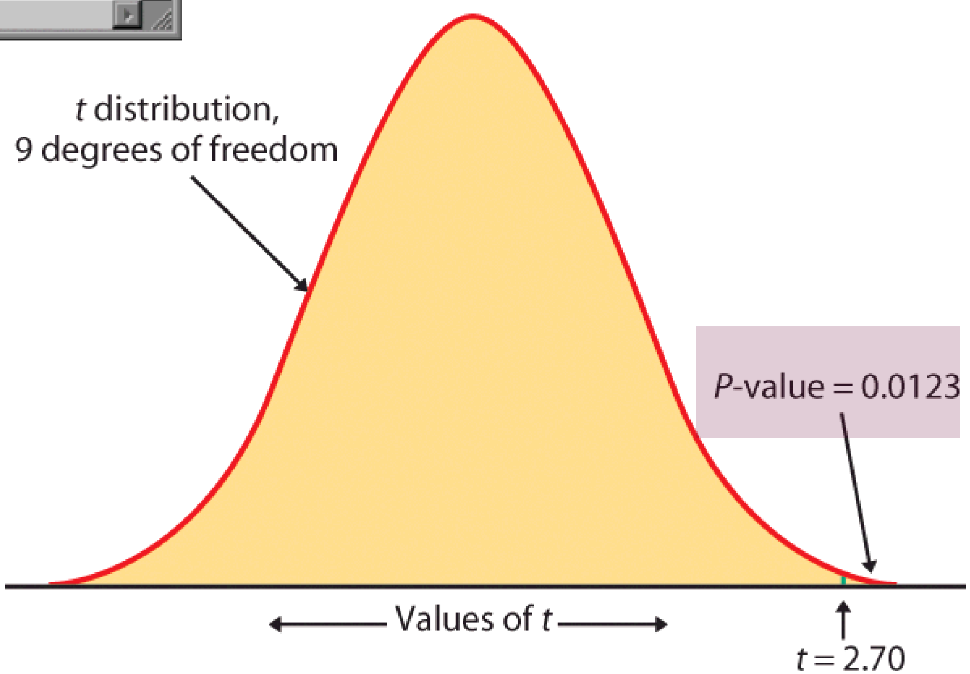
Test of mu = 0 vs mu > 0

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean
Loss	10	1.020	1.196	0.378

Variable	95.0% Lower Bound	T	P
Loss	0.327	2.70	0.012

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{1.02 - 0}{1.196/\sqrt{10}} = 2.70$$

$$df = n - 1 = 9$$



•Parrede (matchede) t-prosedyrer

Noen ganger vil vi sammenligne behandlinger på de samme individene. Dette gir oss observasjoner som ikke er uavhengige – de er parret eller matchede to og to:

- Eks. Før og etter behandling (blodtrykk før og etter behandling med betablokker, søtsmak før og etter lagring)
- Eks. Tvillingstudier, begrenser effekten av genetiske forskjeller ved å se på en variabel i sett av tvillinger
- Eks. Ved å bruke folk som matcher hverandre i alder, kjønn, utdanning i sosiale studier, kan man kansellere ut effekten av slike underliggende lurevariable

I slike situasjoner kan vi bruke par-data til å teste forskjell i forventning mellom de to fordelingene. Vi studerer variabelen $X_{\text{diff}} = (X_1 - X_2)$, og tester

$$H_0\text{: } \mu_{\text{diff}} = 0 \text{ ; } H_a\text{: } \mu_{\text{diff}} > 0 \text{ (eller } <0\text{, eller } \neq 0\text{)}$$

Dette er det samme som å teste i en ett-utvalgs-situasjon . Data for individ nr *i* er da $x_{\text{diff}} = x_{1i} - x_{2i}$

Søthet av cola *(om igjen)*

Søthets-tapet pga lagring ble bedømt av 10 profesjonelle smakstestere (som sammenlignet søtheten **før og etter**):

Smakstester	Søthets-tap
1	2.0
2	0.4
3	0.7
4	2.0
5	−0.4
6	2.2
7	−1.3
8	1.2
9	1.1
10	2.3

Vi ønsker å teste om lagring medfører tap I søthet, atltså:

H_0: $\mu = 0$ versus H_a: $\mu > 0$

Selv om teksten ikke sa det eksplisitt, er dette et pre-/post-test design og variabelen er differamsem i søthet av cola før (X_1) minus etter lagring (X_2).

En parret signifikanstest er altså akkurat det samme som en ett-utvalgs signifikanstest.

•Gir koffeinmangel økt depresjon?

11 individer som er diagnostisert som koffeinavhengige

Blir forhindret fra å innta koffein-holdige mat og drikker

og får i stedet daglige piller. Noen ganger inneholder

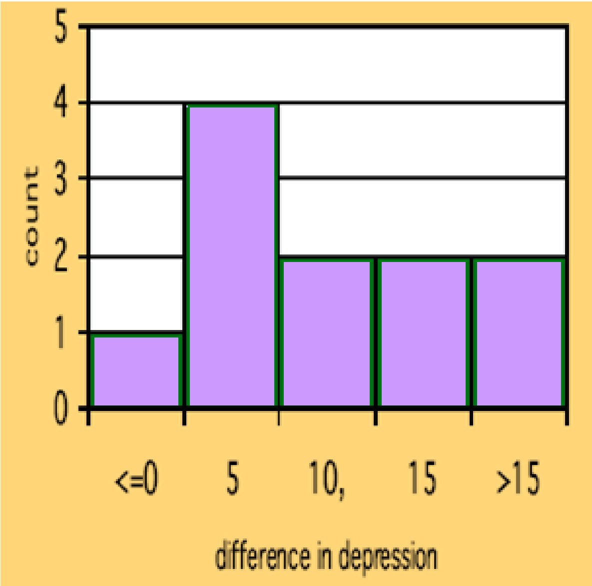
disse pillene koffein og noen ganger inneholder de en

placebo. Depresjonsnivået ble evaluert.

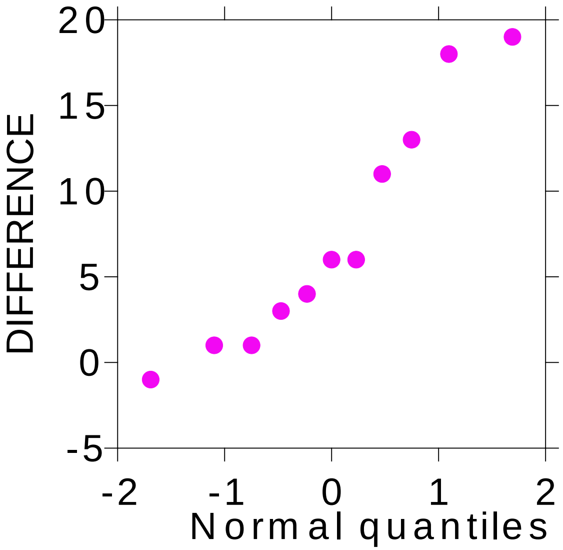
Subject	Depression with Caffeine	Depression with Placebo	Placebo - Cafeine
1	5	16	11
2	5	23	18
3	4	5	1
4	3	7	4
5	8	14	6
6	5	24	19
7	0	6	6
8	0	3	3
9	2	15	13
10	11	12	1
11	1	0	-1

– Det er 2 datapunkter for hvert individ, men vi ser bare på differansen (x_{1i}- x_{2i})

– Utvalgsfordelingen ser ut til å være passende for en *t*-test.



11 "difference" data points.



•Gir koffeinmangel økt depresjon?

For hvert individ i utvalget har vi beregnet foreskjellen i depresjons-nivået (placebo minus koffein).

Det var 11 “differanse”-verdier, altså er df = $n - 1 = 10$.

Vi beregner at $\bar{x} = 7.36$; $s = 6.92$

Subject	Depression with Caffeine	Depression with Placebo	Placebo - Cafeine
1	5	16	11
2	5	23	18
3	4	5	1
4	3	7	4
5	8	14	6
6	5	24	19
7	0	6	6
8	0	3	3
9	2	15	13
10	11	12	1
11	1	0	-1

H_0: $\mu_{\text{diff}} = 0$; H_0: $\mu_{\text{diff}} > 0$

$$t = \frac{\bar{x} - 0}{s/\sqrt{n}} = \frac{7.36}{6.92/\sqrt{11}} = 3.53$$

For df = 10: 3.169 < t = 3.53 < 3.581 ➔ 0.005 > p > 0.0025

Koffeinmangel gir en signifikant økning av depresjon.

•Robusthet

t-prosedyrene er eksakt riktige når populasjonen er eksakt normalfordelt. I praksis vil vi ikke alltid ha eksakt normalfordeling, men t-prosedyrene er **robuste** i forhold til mindre avvik fra normalitet – resultatene blir ikke så gale selv om normalitetsantakelsen ikke holder. Viktige faktorer er:

- **Tilfeldig utvalg.** Utvalget **må** være et SRS fra populasjonen.
- **Uteliggere og skjevhet.** Påvirker gjennomsnittet og derfor også t-prosedyrene. MEN, betydningen av dette avtar med økende antall observasjoner på grunn av sentralgrenseteoremet (CLT).

Spesielt:

- Når $n < 15$, må data være tilnærmet normalfordelte og uten uteliggere
- Når $15 > n > 40$, er det ok med noe skjevhet, men ikke uteliggere
- Når $n > 40$, er t-observatoren ok selv med sterk skjevhet i underliggende fordeling

Table entry for p and C is the critical value t^* with probability p lying to its right and probability C lying between $-t^*$ and t^*.

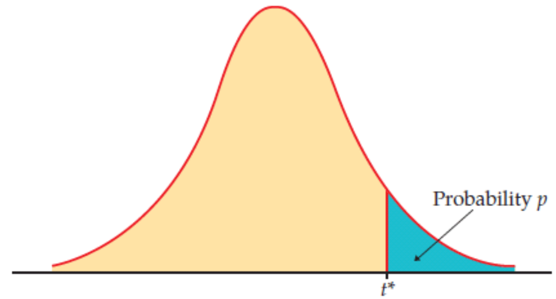


TABLE D

t distribution critical values

	Upper-tail probability p											
df	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
z^*	0.674	0.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
	50%	60%	70%	80%	90%	95%	96%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%
	Confidence level C											