Løsningsforslag til oppgave 19 og 20 på midtveiseksamen

Det er totalt 20 oppgaver. Dersom man tipper helt tilfeldig svaret på en oppgave er det sannsynlighet 1/4=0.25 for å få 1 poeng og sannsynlighet 3/4=0.75 for å få 0 poeng på den oppgaven. La den tilfeldige variabelen R_i være antall poeng på oppgave nr i for $i = 1, \ldots, 20$. R_i-ene er uavhengige av hverandre. La den tilfeldige variabelen X være totalt antall poeng på eksamen. Da er

$$X = R_1 + R_2 + \cdots + R_{20} = \sum_{i=1}^{20} R_i$$

Sannsynlighetsfordelingen til R_i er

Verdi av R_i	0	1
Sannsynlighet	0.75	0.25

Da er (side 257 i læreboken)

$$\mu_{R_i} = 0 \cdot 0.75 + 1 \cdot 0.25 = 0.25,\ i = 1, \ldots, 20$$

og (side 265 i læreboken)

$$\sigma^2_{R_i} = (0 - 0.25)^2 \cdot 0.75 + (1 - 0.25)^2 \cdot 0.25 = 0.1875,\ i = 1, \ldots, 20$$

Addisjonsregelen (regel 2 side 263 i læreboken) for forventninger til tilfeldige variable gir oss at

$$\begin{aligned}
&\mu_{R_1+R_2} = \mu_{R_1} + \mu_{R_2} = 2 \cdot \mu_{R_i} \\
&\mu_{R_1+R_2+R_3} = \mu_{R_1+R_2} + \mu_{R_3} = \mu_{R_1} + \mu_{R_2} + \mu_{R_3} = 3 \cdot \mu_{R_i} \\
&\mu_{R_1+R_2+R_3+R_4} = \mu_{R_1+R_2+R_3} + \mu_{R_4} = \mu_{R_1} + \mu_{R_2} + \mu_{R_3} + \mu_{R_4} = 4 \cdot \mu_{R_i} \\
&\text{osv...} \\
&\mu_X = \mu_{R_1+R_2+\cdots+R_{20}} = 20 \cdot \mu_{R_i} = 20 \cdot 0.25 = 5 \text{ (svaret på oppgave 19)}
\end{aligned}$$

Addisjonsregelen (regel 2 side 267 i læreboken) for varianser til uavhengige tilfeldige variable gir oss at

$$\begin{aligned}
&\sigma^2_{R_1+R_2} = \sigma^2_{R_1} + \sigma^2_{R_2} = 2 \cdot \sigma^2_{R_i} \\
&\sigma^2_{R_1+R_2+R_3} = \sigma^2_{R_1+R_2} + \sigma^2_{R_3} = \sigma^2_{R_1} + \sigma^2_{R_2} + \sigma^2_{R_3} = 3 \cdot \sigma^2_{R_i} \\
&\sigma^2_{R_1+R_2+R_3+R_4} = \sigma^2_{R_1+R_2+R_3} + \sigma^2_{R_4} = \sigma^2_{R_1} + \sigma^2_{R_2} + \sigma^2_{R_3} + \sigma^2_{R_4} = 4 \cdot \sigma^2_{R_i} \\
&\text{osv...} \\
&\sigma^2_X = \sigma^2_{R_1+R_2+\cdots+R_{20}} = 20 \cdot \sigma^2_{R_i} = 20 \cdot 0.1875 = 3.75
\end{aligned}$$

Dermed blir $\sigma_X = \sqrt{3.75} = 1.94$ (svaret på oppgave 20).