

**Eksamen STK 1000, 4. desember 2013, kort fasit, ved Nils Lid Hjort**

**Oppgave 1**

- (a) Samlet inntekt  $I = X_1 + X_2 + X_3$  blir normalfordelt, med forventning  $2 + 1 + 2 = 5$  og varians  $0.10^2 + 0.20^2 + 0.50^2$ , altså standardavvik  $\sigma = \sqrt{0.30} = 0.5477$ . Da blir også

$$P(I > 5.5) = P((I - 5.0)/\sigma > (5.5 - 5.0)/\sigma) = P(N(0, 1) > 0.9129) = 0.1807.$$

- (b) På grunn av uavhengighet blir svaret  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/8$  (også kalt 0.125).  
(c) Inntekt minus utgift blir  $W = I - 3.0 - Y$ , som er normalfordelt med forventning  $5.0 - 3.0 - 1.0 = 1.0$  og varians  $0.1^2 + 0.2^2 + 0.5^2 + 0.25^2$ , altså standardavvik  $\tau = \sqrt{0.3625} = 0.6021$ . Sannsynligheten for underskudd blir derfor

$$P(W < 0) = P((W - 1)/\tau < (0 - 1)/\tau) = P(N(0, 1) < -1.6609) = 0.0484.$$

**Oppgave 2**

- (a) Her blir  $X$  binomisk fordelt, med  $n = 1000$  forsøk og sannsynlighet  $p = 0.35$ . Forventet verdi er  $np = 350$ . Videre har  $X$  varians  $np(1 - p) = 227.50$ , og er dessuten tilnærmet normalfordelt, altså  $X \approx N(350, 15.083)$ . Intervallet

$$350 \pm 1.96 \cdot 15.083 = 350 \pm 29.56 = [320.4, 379.6],$$

som avrundes til  $[320, 380]$ , vil altså inneholde  $X$  med sannsynlighet tilnærmet 95%.

- (b) Vi finner

$$P(H | H \text{ eller } S) = \frac{P(H)}{P(H) + P(S)} = \frac{0.38}{0.38 + 0.27} = 0.585.$$

- (c) De muligheter som leder til 1-1 etter to spill er  $(H, H), (S, S), (R, R)$ , og ingen andre (der  $(H, H)$  betyr at Hvit vinner i første og Hvit vinner i andre, osv.). Sannsynligheten for 1-1 er dermed

$$P(H)P(H) + P(S)P(S) + P(R)P(R) = 0.38^2 + 0.27^2 + 0.35^2 = 0.340.$$

**Oppgave 3**

- (a) Gjennomsnitt er tilnærmet normalfordelte ved sentralgrenseteoremet. Konfidensintervall for  $\mu_N$ , forventet lengde for norsk ord:

$$4.487 \pm 1.96 \cdot 0.491/\sqrt{162} = 4.487 \pm 0.076 = [4.411, 4.563].$$

Tilsvarende for  $\mu_E$ , forventet lengde for et engelsk ord:

$$4.458 \pm 1.96 \cdot 0.533/\sqrt{162} = 4.458 \pm 0.082 = [4.376, 4.540].$$

Merk at disse intervallene er ganske like, så det er ingen merkbar grunn til å tro  $\mu_E$  og  $\mu_N$  er forskjellige. Intervallene er ganske trange, hvilket skyldes de mange ord (nemlig  $162 \cdot 100 = 16200$ , for hvert språk).

(b) Hypotesen er at  $\mu_N = \mu_E$ . Toutvalgstestobservatoren blir

$$t = \frac{4.487 - 4.458}{\sqrt{0.491^2/162 + 0.533^2/162}} = \frac{0.029}{0.057} = 0.509,$$

som ikke er signifikant for en t-fordeling med antall frihetsgrader 161. Med så mange frihetsgrader er t meget nær en  $N(0, 1)$ -fordeling. p-verdien blir

$$p = P(|t| \geq 0.509) = 2P(t > 0.509) = 0.611.$$

(c) Her tester vi at  $\beta_1 = 0$  mot at  $\beta_1 > 0$ , i den vanlige regresjonsmodellen. Testobservatoren er  $t = b_1/\text{SE}(b_1) = 0.28366/0.08296 = 3.419$ , som er signifikant for stor for en t-fordeling med 160 frihetsgrader. Altså viser data tydelig at  $\beta_1 > 0$ . Grunnene er uklare, men vi har altså den interessante formodning at studenter som har norske bøker med lange ord tenderer også til å foretrekke engelske bøker med lange ord. Tilsvarende er det en viss, liten tendens til at noen foretrekker kortordet prosa, på begge språk. Analysen er en anelse sårbar overfor denne ene iherdige student som har logget (6.24, 6.28) fra sin bokhylle (se figuren), men selv om man relegerer vedkommende beholdes konklusjonen, om signifikant positiv samvariasjon.

(d) I lys av samvariasjonen må variansen til gjennomsnittsdifferansen  $\bar{D} = \bar{y}_N - \bar{y}_E = (1/162) \sum_{i=1}^{162} D_i$  revurderes og beregnes mer nøyaktig enn for nevneren i (b). Her er altså  $D_i = y_{N,i} - y_{E,i}$ . Vi har

$$\text{Var } \bar{D} = \text{Var } \bar{y}_N + \text{Var } \bar{y}_E - 2 \text{sd}(\bar{y}_N) \text{sd}(\bar{y}_E) \rho,$$

pr. generell formel, som her leder til estimert varians

$$\frac{0.491^2}{162} + \frac{0.533^2}{162} - 2 \frac{0.491}{\sqrt{162}} \frac{0.533}{\sqrt{162}} 0.261 = \frac{0.491^2 + 0.533^2 - 2 \cdot 0.491 \cdot 0.533 \cdot 0.261}{162}.$$

Estimert standardavvik blir nå 0.0490, istedetfor 0.0570 under uavhengighet. Man får samme svar (og samme formel) om man arbeider med standardavviket for  $D_i$ -ene. – Testen over er altså blitt lurt, og er dertil blitt svakere enn den egentlig skulle være. Den nye t-observator, av type ett utvalg, blir

$$t_D = \frac{\bar{D}}{s_D/\sqrt{162}} = \frac{0.029}{0.049} = 0.592,$$

noe større og skarpere enn  $0.029/0.057 = 0.509$ , men verdien er fortsatt ikke signifikant (den er en  $t_{161}$  under nullhypotesen). Vi har ingen god nok grunn til å hevde at det er forskjell mellom gjennomsnittslengden for norske ord og engelske ord.

#### Oppgave 4

Man bør la et knippe nye studenter utsettes for dette nye undervisningsopplegget, og så måle deres prestasjoner. De viktigste punktene her er *random sample*, at disse forsøkskaninene er et tilfeldig utvalg av studentene (situasjonen blir statistisk uviss dersom man f.eks. inviterer de ivrigste studentene), og at det er nok av dem, for å få statistisk oppdagelseskraft, for eksempel ved bruk av en t-test for to utvalg. Begge punkter kan diskuteres videre i passende detalj, men en besvarelse som på rimelig vis har med disse to punkter blir positivt vurdert.