Siste økt med stokastiske variabler, sannsynlighet, og regneregler for forventning og varians (og standardavvik) 2/10 Ch 4

Endelig pensum til midtveiseksamen: Til og med Ch 4 (÷ Ch. 2.4) + Sentralgrenseteoremet i Ch 5.

Regneregler for variansen

Vi bruker disse for å finne variansen til forskjellige stokastiske variabler, og tar $\sqrt{\ }$ til slutt for å finne standardavviket.

Hvis X er en stokastisk variabel, og a og b er faste tall (skalarer):

$$Var(a) = Var(b) = 0$$

$$Var(X) = \sigma_X^2$$

$$Var(b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$$

$$Var(a + bX) = Var(a) + Var(b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$$

Eks: La X = vekten til en appelsin $\sigma_X = 38g \rightarrow \sigma_X^2 = 1444$

a = vekten til stor gjenbrukspose = 130g (fast)

Variasjonen, variansen til (120 appelsiner i gjenbrukspose):

$Var(130 + 120 \cdot X) = 120^2 \cdot Var(X) = 120^2 \cdot 1444 = 20793600$

$\sigma_{130+120X} = \sqrt{20793600} = \underline{4560}$

Hvis X og Y er uavhengige stokastiske variabler:

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

$$\sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

Eks: X = vekten til en appelsin
Y = vekten til en annen appelsin $\Big\}$ og $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1444$

$\sigma_X = \sigma_Y = 38\,g$

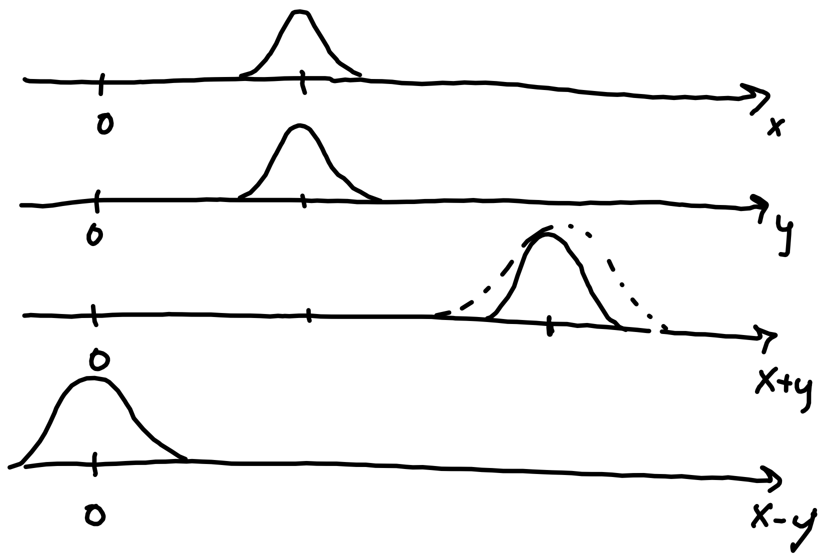
Da vil

$$\sigma_{X+Y}^2 = Var(X+Y) \overset{uavh}{=} Var(X) + Var(Y) = 1444 + 1444 = 2888$$

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{2888} = 54$$

$$\sigma_{X-Y}^2 = Var(X-Y) \overset{uavh}{=} Var(X) + Var(Y)$$

$$\sigma_{X-Y} = \sqrt{2888} = 54$$



Hvis X og Y er to avhengige stokastiske variabler med korrelasjon ρ

$\downarrow$ et tall mellom -1 og 1

Hvis uavh: $\rho = 0$

$$\sigma^2_{X+Y} = Var(X+Y)$$
$$= Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot \rho \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

$$\sigma^2_{X-Y} = Var(X-Y)$$
$$= Var(X) + Var(Y) - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

Eks: La X = temperaturen kl 23 16. mai, Y = temperaturen kl 23 17. mai; $\rho = 0.6$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1.6$

$$\sigma^2_{X+Y} = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot \rho \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y$$
$$= 1.6^2 + 1.6^2 + 2 \cdot 0.6 \cdot 1.6 \cdot 1.6 = 8.192$$

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{8.192} = 2.9$$

$$\sigma^2_{X-Y} = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y = 2.048$$

$$\sigma_{X-Y} = \sqrt{2.048} = 1.43$$

Forventning og varians (og standardavvik) til et gjennomsnitt

Notasjon: La X være en stokastisk variabel med forventning $E(X) = \mu_X = \mu$ og standardavvik σ_X

Hvis vi har n uavhengige X-er : $X_1, X_2, \dots, X_n$ med samme μ_X og samme σ_X, så vil gjennomsnittet av disse n X_i-ene : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ også være en stokastisk variabel.

Hva er $E(\bar{X})$? og $\sigma_{\bar{X}}$?

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_X$$

$$= \frac{1}{n}\left(\underset{i=1}{\mu_X} + \underset{i=2}{\mu_X} + \underset{i=3}{\mu_X} + \underset{i=4}{\mu_X} + \dots + \underset{i=n}{\mu_X}\right) = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \cdot \mu_X = \mu_X$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{Var(\bar{X})} =$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{Var(\bar{X})} =$$

Fordi X_i-ener er uavh

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot Var \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{v/uavh}}{=}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma_x^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \left(\underset{i=1}{\sigma_x^2} + \underset{i=2}{\sigma_x^2} + \underset{i=3}{\sigma_x^2} + \ldots + \underset{i=n}{\sigma_x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n} \cdot \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{Var(\bar{X})} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Legg til at hvis n er stor, $n \to \infty$, så vi $\bar{X} \overset{\text{tiln}}{\sim} N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)$

↳ Sentralgrenseteoremet

Lag z-score av dette:

$$\bar{X} \overset{\text{tiln}}{\sim} N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_x}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{\text{tiln}}{\sim} N(0,1)$$

BAYES TEOREM

Betinget sannsynlighet:

$P(B \mid A)$ "Sannsynligheten for at begivenhet B inntreffer, når vi vet at ("gitt") begivenhet A har skjedd"

Eks: A: Du treffer en bekjent

B: Du får en klem av den neste du treffer

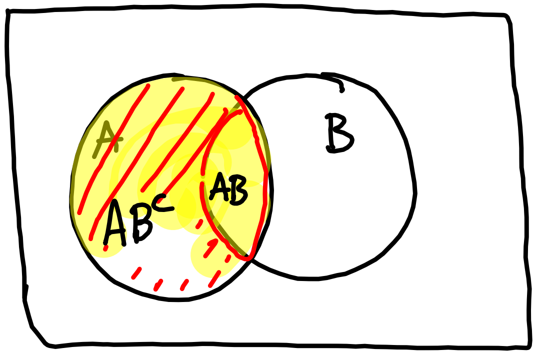
$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \text{ og } B)}{P(A)}$$

Uavhengighet: $P(B \mid A) = P(B)$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}$$

$$P(A \text{ og } B^c) + P(A \text{ og } B)$$



$P(B|A) = P(AB)/P(A) \rightarrow P(AB) = P(B|A)\cdot P(A)$

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow P(AB) = P(A|B)\cdot P(B)$

4.5

$$= \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A|B)\cdot P(B) + P(A|B^c)\cdot P(B^c)}$$