Sannsynlighet, tilfeldighet og Stokastiske/tilfeldige/random variabler
Forelesning 25/9
Boka: Ch 4

Midtveisquiz Fredag 29/9 kl 16.05 i RF-kjelleren. Servering

Fra sist: Sannsynlighetsbegrepet: Abstrakt, knyttet til ∞

Utvalget: det vi ser
endelig, n

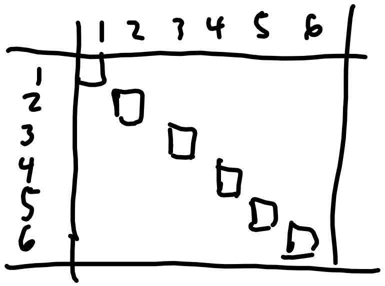
Populasjon: Ukjent, det vi ønsker å vite noe om
∞

$$P(\text{hendelse}) = \frac{\text{Hvor mange ganger det skjer hendelsen}}{\text{Hvor mange ganger det kunne ha skjedd}}$$ ← Andel: Tall mellom 0 og 1

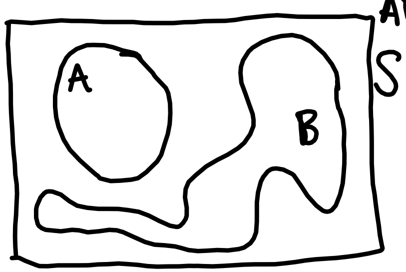
Eks terningkast: 1, 2, 3, 4, 5, 6   Rettferdig terning:

$P(6\text{-er}) = \frac{1}{6}$

Eks To terninger, ønsker at det skal gå fortere. I stedet for 1 terning & 6-er
2 terning & par

P(to like) =  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Sannsynlighetsmodell :



Alt

S = Sample space
utfallsrom

Venn-diagram
Viser hvor mye A og B har til felles

$P(S) = 1$

$0 \le P(A) \le 1$

$P(A) = 1 - P(A^c)$

Hvis A og B er disjunkte
(ikke har noe felles)

$P(A \text{ eller } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

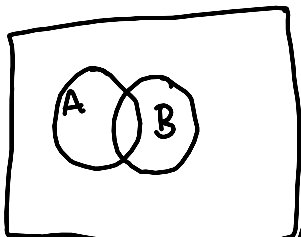
"Enten A eller B eller begge"

Uavhengighet i statistisk forstand : $P(AB) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

"Både A og B"

hvis A og B uavhengige

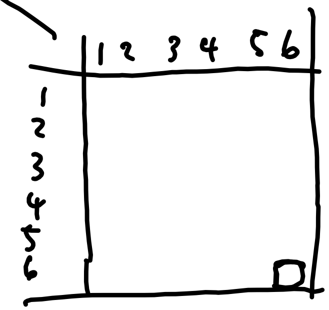
Eks : To terningkast :



S = Alle mulige resultater av de to kastene

A = første kast gir 6-er

B = Andre kast gir 6-er



$P(2 \text{ 6-ere}) = \frac{1}{36}$

$P(\text{første kast gir 6-er}) = \frac{1}{6}$

$P(\text{Andre kast gir 6-er}) = \frac{1}{6}$

$P(2 \text{ 6-ere}) = P(\text{første 6-er og andre 6-er}) \overset{\text{uavh}}{=} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Stokastisk variabel X

Er en variabel som har et sett med verdier (x) som den kan ha,
og en sannsynlighetsfordeling som forteller hvor sannsynlige de ulike verdiene er.

Variabelen skrives med stor bokstav X, verdiene med små bokstaver, x.

forkortes sh i notatene

Det finnes diskrete sannsynlighetsfordelinger, og kontinuerlige sh-fordelinger.

Teorien/rammeverket er tilpasset observasjonene vi gjør, så når det finnes kategoriske/diskrete og kontinuerlige observasjoner, finnes det tilsvarende sh. fordelinger.

Eks: X er kjønn på baby, og kodes 0 eller 1

Vi lager en tabell med verdiene til X, og den tilhørende sh. fordelingen:

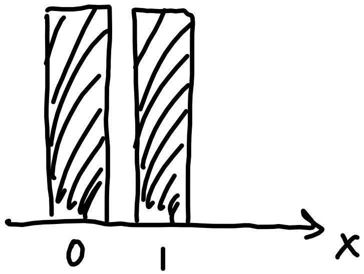
Verdiene til X	0	1
$P(X=x)$	Hva skal stå her?	

↳ "Sannsynligheten for at X har verdien x

Noen ganger finner vi sannsynlighetsfordelingen ved å gjøre veldig mange observasjoner (evt eksperimenter). For eksempel: i følge ssb.no ble det født 118 142 barn i 2014-2015, og ~~[illegible]~~ 60739 var gutter. Finn sh. ford.

$P(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{gutt}}}{X=0}) \approx \frac{60739}{118142} = 0.514$ $\quad P(X=1) = 1 - 0.514 = 0.486$

Verdiene til X	0	1	Totalt
$P(X=x)$	0.514	0.486	1



Andre ganger kan vi bruke teori / sh. regning til å finne ut hva sh.ford. er

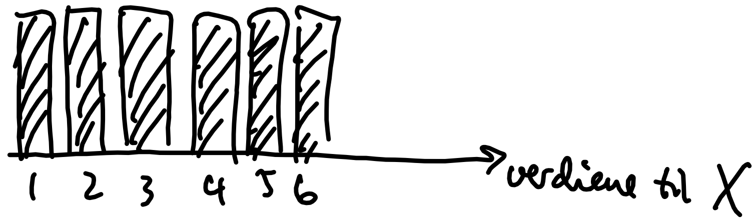
Eks: La X = # øyne på terningen i et terningkast

Verdiene til X	1	2	3	4	5	6	Totalt
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Her bruker vi $\frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}}$ - regelen for å komme frem til tallene

se boka s. 244

Lager en skisse av fordelingen:



Eks: La X = # kast der terningen gir en 6-er, på 3 kast

Verdiene til X	0	1	2	3	Totalt
$P(X=x)$	0.579	0.347	0.069	0.005	1

$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$

ikke 6-er tre ganger på rad, uavhengige kast.
Multiplikasjonsregelen s. 245
Bruker også at
$P(6\text{-er}) = 1 - P(\text{ikke } 6)$

$\underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}}$

tre måter å få én 6-er på tre kast

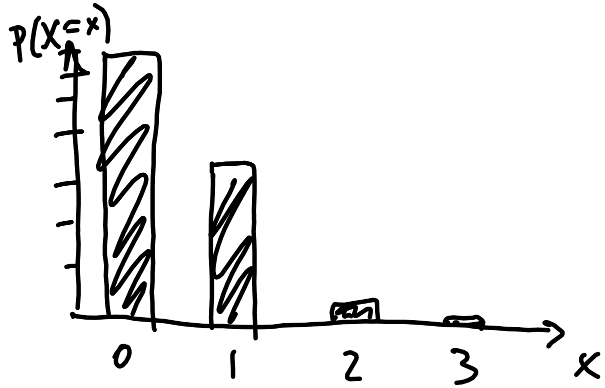
$\underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}$

tre måter å få to 6-ere på

$\underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}$

3 6-ere på rad

Skisse av fordelingen:



Denne siste fordelingen er et eksempel på en fordeling som kan generaliseres, slik at vi får en formel for $P(X=x)$

BINOMISK FORDELING

Gjør n uavhengige forsøk/observasjoner
der hvert forsøk/observasjon har 2 mulige utfall (ofte kalt "suksess" eller "fiasko")
og der $P(\text{suksess}) = p$ er lik i hvert forsøk.

Er en meningsmåling en slik situasjon? Uavh ~~forsøk~~ obs? Ja
2 mulige utfall? ok $P(\text{suksess}) = p$ er lik? ok

La X = # suksesser.

Da er $P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

Eks: La X = # kast der vi får 6-er på 3 kast (som over)

Da er $X \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{6})$

p = Suksess-sannsynligheten

n = # forsøk

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-1} = \frac{3!}{(3-1)!\,1!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \underline{0.347}$$

Eks: Rik mann ønsker gutt som arving. Får 10 barn med kone 1.

La X = # gutter på 10 fødsler

Verdiene til X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x)$											

R> dbinom($\underline{0:10}$, 10, 0.514)

$\underline{0:10}$ ↓ vektor med verdiene til X

10 ↓ n

0.514 ↓ p