STK1000 H-2016 Løsningsforslag

Alle deloppgaver teller likt i vurderingen av besvarelsen.

Oppgave 1

I et tilfeldig utvalg på 1000 normalvektige personer, og 1000 overvektige personer, måles konsentrasjonen av 200 ulike proteiner i blodet. For omtrent halvparten av disse proteinene ser verdiene ut til å være relativt normalfordelte (i begge gruppene). For resten av proteinene ser verdiene ut til å være skjevfordelte (i begge gruppene), og for 14 av proteinene er fordelingen ekstremt skjev. Verdiene til de 14 sistnevnte proteinene er knapt målbare for majoriteten av de 2000 personene i studien, mens et fåtall personer i hver gruppe har ekstremt høye verdier.

a) Hvilke oppsummeringstall (deskriptiv statistikk) ville du brukt for å beskrive konsentrasjonen av disse proteinene i blod?

De normalfordelte: $\bar{x}$ og sd for hver gruppe.
De skjevfordelte og de ekstremt skjevfordelte: Median og kvartiler for hver gruppe.

Begrunn svaret.

$\bar{x}$ og sd gir gode oppsummeringer av data som er tilnærmet normalfordelte (rimelig symmetriske og med lette haler), jfr regelen for $\bar{x} \pm 2 \cdot sd$ og $\bar{x} \pm 3 \cdot sd$

Median og kvartiler er robuste tall og egner seg for å beskrive data som ikke er symmetriske om midten.

b) Sett opp nullhypotese og alternativ hypotese for å undersøke om det er forskjell i konsentrasjonen av proteiner i blodet til deltakerne i de to gruppene.

Hvilke(n) hypotesetest(er) vil du bruke for å sammenligne gruppene?

Begrunn svaret.

Gjelder alle:	Alternativ formulering for de normalfordelte:	Alternativ formulering for de skjevfordelte (fordi n er stor og CLT trolig slår inn)	Alternativ formulering for de ekstremt skjevfordelte
H0: Gruppene er like	$\mu_0 = \mu_1$ Eller $\mu_0 - \mu_1 = 0$	$\mu_0 = \mu_1$ Eller $\mu_0 - \mu_1 = 0$	$Rangsum_0 = Rangsum_1$
H1: Gruppene er ikke like	$\mu_0 \neq \mu_1$ Eller $\mu_0 - \mu_1 \neq 0$	$\mu_0 \neq \mu_1$ Eller $\mu_0 - \mu_1 \neq 0$	$Rangsum_0 \neq Rangsum_1$
	Der μ_0 er forventningsverdien i den normalvektige gruppa (gruppe 0) og μ_1 er forventningsverdien i den overvektige gruppa (gruppe 1)		Der Rangsummene er summen av rangeringene til verdiene i de to gruppene.
	To-utvalgs t-test		Wilcoxon rank sum test

Fordi n er stor, antas det at man kan bruke to-utvalgs t-test både for de normalfordelte dataene og de skjevfordelte dataene, unntatt de 14 ekstremt skjeve.

Disse er trolig for skjeve til at CLT (Sentralgrenseteoremet) har slått inn nok ved denne utvalgsstørrelsen. Wilcoxon rank sum test er tryggest her.

c) Forskerne som planla denne studien ønsket å bruke et signifikansnivå på 5%, altså α=0.05. Hva betyr dette?

Signifikansnivået er den (subjektivt vurdert) maksimalt akseptable sannsynligheten for Type I-feil. P(Type I-feil) = P(Forkaste H_0 | H_0) = 0.05

Anta at H_0 er sann for alle de 200 proteinene. Hvor mange signifikante gruppeforskjeller kan man allikevel forvente å finne? (Dersom man gjør 200 uavhengige hypotesetester, hver med signifikansnivå 5%?)

Med 200 tester og P(Type I-feil) = P(Forkaste H_0 | H_0) = 0.05 i hver test:
Forventer 200*0.05=10 signifikante tester.

Anta så at man gjør en studie der man ikke gjør tester for alle de 200 proteinene, men velger tre av dem, som antas å være uavhengige. Hvis signifikansnivået er 5% i hver test, hva er den totale sannsynligheten for type 1-feil i denne studien?

Ved tre tester:
P(Type I-feil) = P(Forkaste H_0 | H_0) = P(Minst én H_0 forkastes | Alle 3 H_0 er sanne) =
= 1 – P(Alle H_0 beholdes | H_0) = $1-0.95^3 = 0.1426$:

Oppgave 2

I en test av meterstokker/tommestokker som Forbrukerrådet gjorde i 2016, ble 21 meterstokker vurdert etter hvor nøyaktige de var. Med hjelp fra Justervesenet ble meterstokkene festet i en kalibrert rigg, og så ble

punktet der meterstokken viste 99 cm sammenlignet med fasit ved hjelp av laserinferometer. Forbrukerrådet ønsket å teste om nøyaktigheten på meterstokkene hadde en sammenheng med prisen.

De to utskriftene under viser en korrelasjonsanalyse og en regresjonsanalyse for sammenhengen mellom pris (i kr), y, og nøyaktighet (i mm), x.

OBS: Det ble oppdaget tidlig på eksamen (av en student) at x og y var ombyttet. Dette ble det gjort oppmerksom på i alle eksamensrommene (ca halvveis), og faglærer gikk rundt etterpå. Riktig oppgavetekst er De to utskriftene under viser en korrelasjonsanalyse og en regresjonsanalyse for sammenhengen mellom pris (i kr), x, og nøyaktighet (i mm), y.

a) Formulér regresjonsmodellen som er utgangspunktet for regresjonsanalysen.

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, $\quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$

Ta så utgangspunkt i de to analysene i utskriftene over, og formulér de tilhørende to sett med hypoteser (altså nullhypotese og alternativ hypotese), for to ulike parametere, som begge kan brukes når man vil teste om det er en sammenheng mellom pris og nøyaktighet.

Korrelasjonsanalyse for om det er en sammenheng mellom pris og nøyaktighet:
Korrelasjonen i «populasjonen» (den sanne korrelasjonen) er ρ.

H_0: Ingen sammenheng mellom pris og nøyaktighet, $\rho = 0$
H_1: Det er en sammenheng mellom pris og nøyaktighet, $\rho \neq 0$

(Alternativt ensidige hypoteser, der nøyaktigheten øker med prisen)

Regresjonsanalyse for pris og nøyaktighet: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$

H_0: Ingen sammenheng mellom pris og nøyaktighet, $\beta_1 = 0$
H_1: Det er en sammenheng mellom pris og nøyaktighet, $\beta_1 \neq 0$

(Alternativt ensidige hypoteser, der nøyaktigheten øker med prisen)

Begrunn hvorfor du velger ensidig eller tosidige hypoteser.

Jeg har valgt tosidige hypoteser fordi det er mest konservativt, og jeg ikke vet noe om verken produksjon av meterstokker, deres nøyaktighet, eller prismodeller som blir brukt.

(Alternativt Jeg har valgt ensidige hypoteser fordi det er grunn til å undersøke om nøyaktigheten øker med pris.)

Hvilke(n) konklusjon(er) trekker du?

Både korrelasjonsanalysen basert på Pearson's r, og regresjonsanalysen gir en p-verdi for (H_0: $\hat{\beta}_1 = 0$) på 0.397, som vil gi konklusjonen «Behold H_0» på alle signifikansnivåer under 0.397. Vi beholder derfor H_0, og konkluderer med at det er ingen signifikant sammenheng mellom nøyaktighet og pris.

```
        Pearson's product-moment correlation  p-value = 0.3969

Coefficients:             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
               pris       0.001752   0.002021   0.867    0.397
```

Oppgave 3

I en studie av 200 friske gravide kvinner ble deltakerne rekruttert etter hvert som de søkte fødeplass på et gitt sykehus. Forskerne ønsket å finne ut om det var en sammenheng mellom mors blodsukkernivå (målt i mmol/l) og barnets fødselsvekt (målt i gram). På inklusjonstidspunktet var kvinnene gravide i tredje måned, og fastende blodsukker ble målt. Det måles om morgenen før frokost. Følgende regresjonsanalyse ble gjort:

a) Hva er effektmålet her,

Effektmål: Et tall som oppsummerer effekten av (variasjon i) blodsukker på (variasjon i) fødselsvekt. I en regresjonsanalyse er det regresjonskoeffisienten som viser stigningstallet til regresjonslinja (β_1 i regresjonsligningen $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$).

og hvordan tolkes det?

β_1 er stigningstallet til regresjonslinja. Det viser hvor mange enheters forskjell i fødselsvekt (y) som forventes når blodsukkeret (x) øker med en enhet.

Gi et estimat for sammenhengen mellom mors blodsukkernivå og barnets fødselsvekt,

Fra utskriften: $\hat{\beta}_1 = 172$

og beregn et 95% konfidensintervall for det samme.

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S.E.(\hat{\beta}_1)} \sim T_{n-2} \leftarrow T_{200-2} = T_{198}$$

$$P\left(-t_{198,0.025} < \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S.E.(\hat{\beta}_1)} < t_{198,0.025}\right) = 0.95$$

95% KI for β_1:

$$\hat{\beta}_1 \pm \begin{matrix} 1.984 \leftarrow t_{100} \\ 1.962 \leftarrow t_{1000} \end{matrix} \cdot S.E.(\hat{\beta}_1) \rightarrow \begin{matrix} [9,335] \text{ eller} \\ [11,333] \end{matrix}$$

Evt også med $z = 1.96$, hvis det begrunnes.

Bakgrunnen for studien […mye om de fysiologske prosessene i dette…] påvirker kroppens evne til å regulere blodsukkeret.

b) Hva menes med en konfunderende variabel (confounder eller lurking variable)?

En konfunderende variabel er en variabel som både påvirker responsvariabelen og forklaringsvariabelen i en regresjonsanalyse (common cause), og dermed også påvirker sammenhengen (estimatet for effektmålet) mellom de to variablene. Vi må ha ekspertkunnskap om problemet for å avgjøre om en variabel er en konfounder.

Kan mors body mass index (bmi), altså (vekt i kg)/(høyde i m)^2, sies å være en konfunderende variabel for sammenhengen mellom mors blodsukkernivå og barnets fødselsvekt?

Ja.

Begrunn svaret.

Her har vi nok opplysninger i oppgaveteksten til å kunne anta at bmi kan påvirke (det målte) blodsukkeret, altså forklaringsvariabelen, og at bmi også kan fødselsvekta (responsvariabelen) gjennom andre mekanismer enn blodsukkeret. I så fall vil estimatet for sammenhengen mellom blodsukker og fødselsvekt være biased/feilaktig, hvis vi ikke tar hensyn til bmi i analysen.

c) Bruk følgende utskrift til å gi et nytt estimat

Fra utskriften: $\hat{\beta}_1 = 94$

og et nytt 95% konfidensintervall for sammenhengen mellom mors blodsukkernivå og barnets fødselsvekt.

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S.E.(\hat{\beta}_1)} \sim T_{n-3} = T_{197}$$

95% KI for β_1 : $93.8 \pm \begin{matrix} 1.984 \\ 1.962 \end{matrix} \cdot 87.4 \rightarrow$ [-80, 267] eller [-78, 265]

Er det en sammenheng mellom mors blodsukkernivå og barnets fødselsvekt?

Nei, det er ikke en signifikant sammenheng mellom mors blodsukkernivå og barnets fødselsvekt.

Begrunn svaret

Begrunnelse 1: Dette tilsvarer en hypotesetest for
H_0: Ingen sammenheng mellom mors blodsukkernivå og barnets fødselsvekt, $\beta_1 = 0$, mot
H_1: Det er en sammenheng mellom mors blodsukkernivå og barnets fødselsvekt, $\beta_1 \neq 0$
i en regresjonsmodell med tre parametere, $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$, der x_{1i} er blodsukker og x_{2i} er bmi, som vist i den siste utskriften i oppgaven. Der ser vi at p-verdien er 0.28, hvilket betyr at H0 beholdes på nivå 0.05.

Begrunnelse 2: 95% KI for β_1 fra c) inneholder H_0-verdien β_1=0, og det forteller oss det samme som hypotesetesten, nemlig at vi beholder H_0 (på nivå 0.05).

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 2964.105    336.907   8.798 7.03e-16 ***
blodsukker    93.763     87.426   1.072   0.2848
bmi           19.883      8.397   2.368   0.0189 *
```

Den signifikante sammenhengen mellom mors blodsukkernivå og barnets fødselsvekt som vi så i oppgave a) forsvinner altså når vi korrigerer for den konfunderende variabelen bmi, og det er derfor grunn til å tro at sammenhengen mellom mors blodsukkernivå og barnets fødselsvekt ikke var reell, men skyldtes konfundering.

Oppgave 4

I en studie av øretermometere fant man ut at sammenhengen mellom den sanne kroppstemperaturen (sentraltemperaturen) y_i, og målingene fra øretermometeret x_i (kalt `ear` i utskriften), kunne uttrykkes ved regresjonsligningen

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim N(0,\sigma)$$

Gjennomsnitt og standardavvik (i ºC) var $\bar{x} = 37.11$, $sd_x = 0.83$, og $\bar{y} = 37.89$, $sd_y = 0.92$.

Utskriften viser en regresjonsanalyse som ble gjort på målinger av 237 intensivpasienter, der det var mulig å gjøre en nøyaktig måling av sentraltemperaturen:

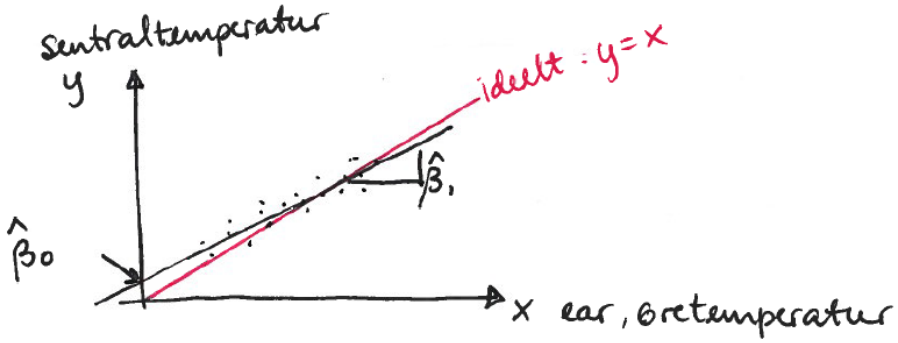
```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  3.74544    1.51257   2.476    0.014 *
ear          0.92017    0.04075  22.580   <2e-16 ***

Residual standard error: 0.5172 on 235 degrees of freedom
```

a) Gi estimater for parameterne β_0 og β_1

Fra utskriften ser vi at estimatet for $\hat{\beta}_0 = 3.7$, og $\hat{\beta}_1 = 0.92$.

og tolkning av estimatene for parameterne β_0 og β_1,

$\hat{\beta}_0$ viser hvor regresjonsligninga skjærer y-aksen. Hvis øretermometer og sentraltemperaturen viste det samme (som de ideelt sett burde gjøre), ville denne vært 0. At $\hat{\beta}_0$ >0, viser at sentraltemperaturen er litt høyere enn øretemperaturen.
Tilsvarende viser $\hat{\beta}_1$ stigningstallet til regresjonslinja. Igjen, hvis øretermometer og sentraltemperaturen viste det samme (som de ideelt sett burde gjøre), ville denne vært 1.



og sett opp hypotesene i de hypotesetestene som reflekteres i de to første p-verdiene i utskriften.

H₀: $\beta_0 = 0$, mot
H₁: $\beta_0 \neq 0$ (p-verdi 0.014)
og
H₀: $\beta_1 = 0$, mot
H₁: $\beta_1 \neq 0$ (p-verdi <0.001)

b) Lag et 95% prediksjonsintervall for sentraltemperaturen når øretemperaturen viser 38 °C.

Prediksjonsintervall :

$$\hat{y} \pm t_{n-2,\,0.025} \cdot S.E.(\hat{y})$$

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^* = 3.75 + 0.92 \cdot 38 = 38.71$$

$$S.E.(\hat{y}) = S \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = (n-1) \cdot (sd_x)^2$$

$$0.5172 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{237} + \frac{(38 - 37.11)^2}{236 \cdot 0.83^2}} = 0.5195$$

t_{237} → 1.984 hvis $n = 100$

t_{237} → 1.962 $n = 1000$

Prediksjonsintervall:

$$38.71 \pm \begin{matrix} 1.984 \\ 1.962 \end{matrix} \cdot 0.5195$$

→ [37.7, 39.7]

→ [37.7, 39.7]

c) Differansene mellom målingene av sentraltemperaturen og øretemperaturen hadde et gjennomsnitt på 0.78 ºC og et standardavvik på 0.52 ºC. Beregn et 95% konfidensintervall for forventet forskjell på de to målemetodene,

$\overline{diff} = 0.78$

$sd_{diff} = 0.52$

95 % KI for δ = differansen på de to metodene

$$\frac{\overline{diff} - \delta}{sd_{diff}/\sqrt{n}} \sim T_{237-1} \rightarrow 0.78 \pm \begin{matrix} 1.984 \\ 1.962 \end{matrix} \cdot 0.0338 \rightarrow [0.71, 0.85] \rightarrow [0.71, 0.85]$$

og kommentér svaret.

Både regresjonsanalysen tidligere i oppgaven og konfidensintervallet viser at det er en statistisk signifikant forskjell på øretemperaturen og sentraltemperaturen, mer spesifikt at sentraltemperaturen (den riktige temperaturen) er høyere enn det øretemperaturen viser. Det er derfor grunn til å være forsiktig med å bruke øretemperatur, spesielt hvis man har med kritisk syke pasienter å gjøre, eller pasienter som ikke tåler å ha høy feber.