STK1000: Løsningsforslag Uke 39

H2023

Oppgave 4.46

a) Tid er kontinuerlig.

b) Her snakker vi om et antall, som er diskret.

c) Inntekt har en minste enhet (kroner eller øre) og er derfor diskret. Men når vi har veldig fin oppløsning på en diskret variabel er det ofte praktisk å anse den som kontinuerlig (tenk hvor mange mulige inntekter det finnes mellom 0 og 1 million! 0, 0.01, 0.02, ..., 999999.98, 999999.99, 1000000).

Oppgave 4.51

a) $P(X \geq 0.40) = 1 - 0.40 = 0.60$.

b) $P(X = 0.40) = 0$.

c) $P(0.40 < X < 1.40) = P(X < 1.40) - P(X < 0.40) = P(X < 1) - P(x < 0.40) = 1 - 0.40 = 0.60$.

d) $P(0.22 < X < 0.25 \cup 0.42 \leq X \leq 0.45) = P(0.22 < X < 0.25) + P(0.42 \leq X \leq 0.45) = 0.03 + 0.03 = 0.06$.

e) $P(X < 0.5 \cup X > 0.8) = P(X < 0.5) + P(X > 0.8) = 0.5 + 0.2 = 0.7$. Alternativt kan man bruke løsningsmetoden $P(X < 0.5 \cup X > 0.8) = 1 - P(0.5 \leq X \leq 0.8) = 1 - (P(X \leq 0.8) - P(X \leq 0.5)) = 0.7$.

Oppgave 4.54

For å regne ut $P(7.1 \leq \bar{x} \leq 8.1)$, må vi først standardisere (slik vi gjorde noen øvinger tidligere). $P(7.1 \leq \bar{x} \leq 8.1) = P\left(\frac{7.1-8}{0.1342} \leq \frac{\bar{x}-8}{0.1342} \leq \frac{8.1-8}{0.1342}\right) = P(-6.7 \leq Z \leq 0.77) \approx 0.77$.

Ut fra teksten i oppgaven (den delen om ± 0.1 fra μ), skulle vi nok egentlig regne ut $P(7.9 \leq \bar{x} \leq 8.1)$: $P(7.9 \leq \bar{x} \leq 8.1) = P\left(\frac{7.9-8}{0.1342} \leq \frac{\bar{x}-8}{0.1342} \leq \frac{8.1-8}{0.1342}\right) = P(-0.77 \leq Z \leq 0.77) \approx 0.54$. Ettersom sannsynligheten er litt over 0.5 vil vi oftere enn ikke, estimere et gjennomsnitt $\bar{x}$ som er innenfor ± 0.1 fra μ.

Oppgave 4.58

Fra formelen side 237 har vi at $\mu = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 + 5 \cdot 0.1 = 1.8$.

Oppgave 4.63

Fra side 237 i boka har vi at $\mu = -2 \cdot 0.1 - 1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.3 =$ -0.1. Fra side 245 i boka har vi at variansen er $\sigma^2 = (-2 - (-0.1))^2 \cdot 0.1 + (-1 - (-0.1))^2 \cdot 0.2 + (0 - (-0.1))^2 \cdot 0.4 + (1 - (-0.1))^2 \cdot 0.3 = 0.89$. Dette gir oss et standardavvik på $\sigma = 0.94$.

Oppgave 4.65

Null korrelasjon mellom X og Y (uavhengige, dvs korrelasjonskoeffisient $\rho = 0$)

a) $\sigma_Z^2 = 8^2\sigma_X^2 = 64 \cdot 3^2 = 576$, og $\sigma_Z = 24$.

b) $\sigma_Z^2 = 11^2\sigma_X^2 = 1089$, og $\sigma_Z = 33$.

c) $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, og $\sigma_Z \approx 3.606$.

d) $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, og $\sigma_Z \approx 3.606$.

e) $\sigma_Z^2 = 2^2\sigma_X^2 + 2^2\sigma_Y^2 = 52$, og $\sigma_Z \approx 7.211$.

Oppgave 4.67

Samvariasjon mellom X og Y: korrelasjonskoeffisient $\rho = 0.4$

a) $\sigma_Z^2 = 8^2\sigma_X^2 = 64 \cdot 3^2 = 576$, og $\sigma_Z = 24$.

b) $\sigma_Z^2 = 11^2\sigma_X^2 = 1089$, og $\sigma_Z = 33$.

c) $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 3^2 + 2^2 + 2 \cdot 0.4 \cdot 3 \cdot 2 = 17.8$, og $\sigma_Z \approx 4.22$.

d) $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 0.4 \cdot 3 \cdot 2 = 8.2$, og $\sigma_Z \approx 2.86$.

e) $\sigma_Z^2 = 2^2\sigma_X^2 + 2^2\sigma_Y^2 - 2\rho\sigma_{2X}\sigma_{2Y} = 2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0.4 \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) = 32.8$, og $\sigma_Z \approx 5.73$.

Oppgave 4.73

Vi har altså $\rho = 1$. Variansen til $X + Y$ er $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y = \sigma_X^2 + 2\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2 = (\sigma_X + \sigma_Y)^2$. Dette gir standardavviket til summen av X og Y verdi $\sigma_{X+Y} = \sigma_X + \sigma_Y$.

Oppgave 4.76

Hvis man selger kun 5 forsikringer vil man mest sannsynlig ikke få noen krav, men hvis man er riktig uheldig og får selv ett enkelt krav vil det bli veldig dyrt for selskapet (mye dyrere enn det man har fått inn gjennom slaget av 5 forsikringer).

Hvis man i stedet selger tusenvis av forsikringer vil det gjennomsnittlige kravet fra kundene være veldig nær det sanne gjennomsnittet på \$300. Man har derfor kontroll på risikoen til selskapet, og kan jevnt tjene penger til å dekke øvrige driftsutgifter etc ettersom prisen for forsikringene vil (mest sannsynlig) dekke forsikringskravene.

Oppgave 4.77

For forsikringskrav $X_1, X_2, \dots, X_5$ er vi interessert i gjennomsnittet $\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i$. Fra regnereglene om forventningsverdi vet vi at $\mu_{\bar{x}} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \mu = \mu = \$300$. Fra regnereglene om varians har vi $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{5^2}\sum_{i=1}^{5} \sigma^2 = \frac{1}{5}\sigma^2 = \frac{400^2}{5} = 32000$. Vi har derfor $\sigma_{\bar{x}} \approx 178.9$.

Vi gjentar samme beregninger med 20 i stedet for 5 forsikringer og får $\mu_{\bar{x}} = 300$ og $\sigma_{\bar{x}} \approx 89.4$. Merk at $\mu_{\bar{x}}$ ikke påvirkes av antall forsikringer mens $\sigma_{\bar{x}}$ blir mindre jo flere forsikringer vi har. Forsikre deg om at du forstår hvordan dette er relatert til konklusjonen i oppgave 4.76.

Oppgave 4.90

La A betegne nok søvn og B nok trening. Vi har da $P(A) = 0.46$, $P(B) = 0.40$ og $P(A \cap B) = 0.27$.

a) $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0.46 - 0.27 = 0.19$.

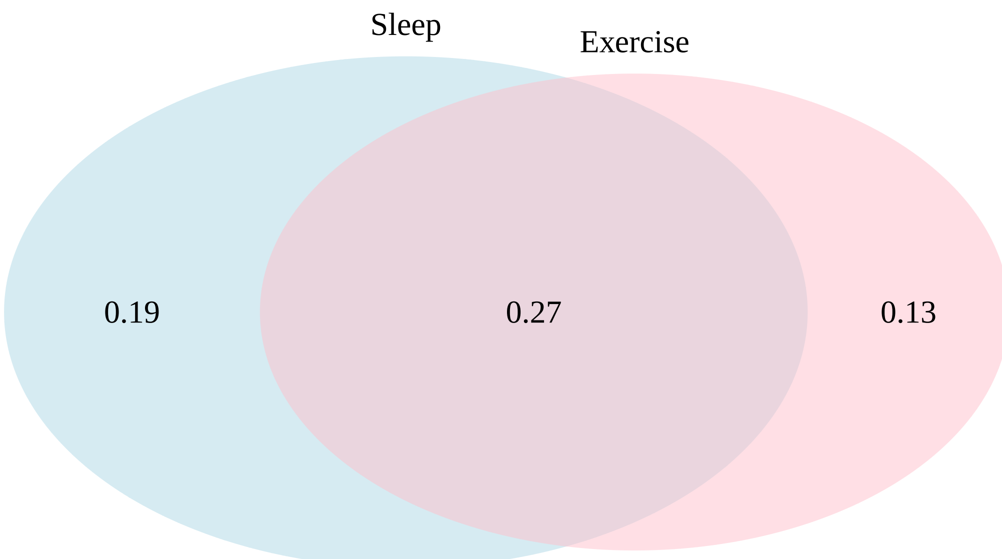
b) $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.40 - 0.27 = 0.13$.

c) $P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - (0.46 + 0.40 - 0.27) = 0.41$.

d) Her vil svarene variere etter hvordan man har løst oppgavene. I a) har vi brukt en variasjon av komplimentregelen (*compliment rule*) og regelen for total sannsynlighet, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$. Denne refereres ofte til som **loven om total sannsynlighet** (*law of total probability*), og kan være nyttig å lære seg. I b) har vi brukt det samme regel som i a) (bare bytt om A og B). I c) har vi brukt addisjonsregelen og komplimentregelen ved at $P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C) = P(C^C) = 1 - P(C) = 1 - P(A \cup B)$. Dette er lettest å se med et venn-diagram (se neste oppgave)!

Oppgave 4.91

Følgende figur viser et Venn-diagram av sannsynlighetene. En skisse kan med fordel også inkludere området rundt $(A^C \cap B^C)$ med areal 0.41.



Oppgave 4.94

a) Her bruker vi Bayes for å fylle inn tabellen. For eksempel har vi at

$$P(\text{Mann} \cap \text{Fire år}) = P(\text{Fire år}) \cdot P(\text{Mann} \mid \text{Fire år}) = 0.59 \cdot 0.44 = 0.2596.$$

Videre vet vi at $P(\text{To år}) = 1 - P(\text{Fire år}) = 0.41$, $P(\text{Mann} \mid \text{To år}) = 0.40$, og $P(\text{Kvinne} \mid \text{x år}) = P(\text{Mann}^C \mid \text{x år}) = 1 - P(\text{Mann} \mid \text{x år})$. Vi har da alle verktøyene til regne ut de resterende feltene.

	Men	Kvinner	Totalt
Fire år	0.2596	0.3304	0.59
To år	0.1640	0.2460	0.41

	Men	Kvinner	Totalt
Totalt	0.4236	0.5764	1

b) Vi bruker Bayes for å gjøre regnestykket om til å bare inneholde tall vi kan lese av fra tabellen vi har laget i a).

$$P(\text{Fire år} \mid \text{Kvinne}) = \frac{P(\text{Fire år} \cap \text{Kvinne})}{P(\text{Kvinne})} = \frac{0.3304}{0.5764} \approx 0.57.$$

Oppgave 4.97

Vi må skrive om uttrykket så det bare inneholder sannsynligheter vi kjenner. Med addisjonsregelen har vi at

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.138 + 0.261 - 0.082 = 0.317.$$

Oppgave 4.98

Vi kan bruke Bayes her

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.082}{0.261} = 0.3142.$$

Vi vet at $P(A) = 0.138 \neq P(A \mid B)$. Da kan ikke A og B være uavhengige.

Oppgave 5.6

a) Høy bias og høy variabilitet.

b) Lav bias og lav variabilitet.

c) Lav bias og høy variabilitet.

d) Høy bias og lav variabilitet.

Midtveiseksamen Høsten 2008

5) $P(X < 10) = P(Z < \frac{10-15}{5}) = P(Z < -1) = 0.1587$ som gir c).

Midtveiseksamen Høsten 2011

9) B).

10) C).

17) $P(X < 1 \cup X > 1.8) = P(X < 1) + P(X > 1.8) = \frac{1+0.2}{2} = 0.6.$ Altså D)

Midtveiseksamen Høsten 2012

11) $P(X < 5) = \frac{4}{9} = 0.44$, som gir C)

12) Vi krever at arealet skal være 1, som vil si at den ene halvdelen må være 0.5. Vi vet da at $\frac{0.5 \cdot h}{2} = 0.5$, som gir $h = 2$ (husk at arealet av en rettvinklet trekant er halve arealet ev tilsvarende firkant med sider gitt de to katetene). Dette gir A).

14) D).

15) $P(A \cup D) = P(D)$, som gir C).