UNIVERSITETET I OSLO

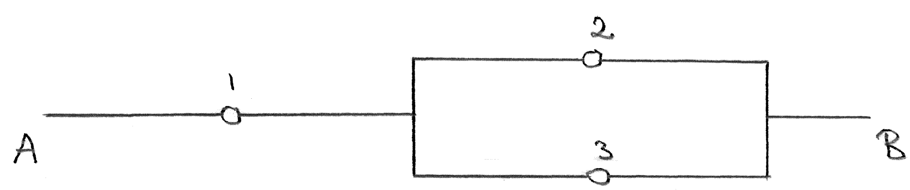
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering.
Eksamensdag:	Tirsdag 7. juni 2005.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner og Formelsamling for STK1100 og STK1110.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

En del av et rørledningsnettverk for transport av gass er fremstilt i følgende figur



Nettverket har komponentene 1, 2 og 3 og funksjonerer hvis det er forbindelse mellom A og B. La for $i = 1, 2, 3$

T_i = Levetiden til i-te komponent, der $P(T_i \leq t) = F_i(t)$.

Sannsynligheten for at komponent i funksjonerer ved tiden t er $1 - F_i(t)$. Anta at T_1, T_2 og T_3 er uavhengige tilfeldige variable. La

T = Levetiden for nettverket, der $P(T \leq t) = F(t)$.

a) Vis at

$$P(T > t) = 1 - F(t) = [1 - F_1(t)][1 - F_2(t)F_3(t)]$$

(Fortsettes side 2.)

b) Anta at $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$, $\lambda_i > 0$ for $i = 1, 2, 3$, dvs. at komponentenes levetider er eksponensielt fordelt. Vis at sannsynlighetstettheten til T, $f(t)$, er gitt ved

$$f(t) = (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + (\lambda_1 + \lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}, \qquad t \geq 0$$

c) Beregn $E(T)$ og $\mathrm{Var}(T)$.

Oppgave 2.

Vi skal studere levetiden, T_1, til komponent 1 i oppgave 1 nærmere. Det viser seg etter mer grundige studier at

$$F_1(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 t)^\alpha}, \qquad t \geq 0,\ \lambda_1 > 0,\ \alpha > 0,$$

dvs. at levetiden er Weibull fordelt.

a) Vis at sannsynlighetstettheten til T_1, $f_1(t)$, er gitt ved

$$f_1(t) = \alpha\, \lambda_1^\alpha t^{\alpha-1} e^{-(\lambda_1 t)^\alpha}, \qquad t \geq 0$$

b) Vis at

$$E(T_1) = \Gamma\big((1/\alpha) + 1\big)/\lambda_1$$

c) Finn medianen i fordelingen til T_1.

d) Anta vi vet at komponent 1 har overlevd tiden t. Hva er sannsynligheten, $P(T_1 > t + u \mid T_1 > t)$, for at den også overlever tiden $t + u$? Sammenlign denne sannsynligheten med $P(T_1 > u)$ for $\alpha = 1$ og $\alpha = 2$. Kommenter sammenligningene.

Oppgave 3.

Anta at de tilfeldige variable X og Y har simultan sannsynlighetstetthet

$$f(x, y) = 6(x^2 - y^2), \qquad 0 \leq y \leq x \leq 1$$

a) Vis at de marginale sannsynlighetstetthetene til X og Y er gitt ved

$$f_X(x) = 4x^3, \qquad 0 \leq x \leq 1$$
$$f_Y(y) = 2 - 6y^2 + 4y^3, \qquad 0 \leq y \leq 1$$

Er X og Y uavhengige? Begrunn svaret.

b) Finn den betingete sannsynlighetstetthet, $f_{Y|X}(y|x)$, for Y gitt $X = x$. Hva er $E(Y|X = x)$?

c) Finn korrelasjonen, $\rho(X, Y)$, mellom X og Y.

SLUTT