

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering.
Eksamensdag:	Torsdag 8. juni 2006.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på	3 sider.
Vedlegg:	Standardnormalfordelingstabell.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner og Formelsamling for STK1100 og STK1110.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La X være en positiv stokastisk variabel. Anta at $Y = \log X$ er $N(\mu, \sigma^2)$ -fordelt, dvs. at X er lognormalt fordelt med parametere μ og σ^2 . Her står "log" for naturlig logaritme.

- a) Vis at den kumulative fordelingen til X er gitt ved

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right),$$

der $\Phi(z)$ er den kumulative standardnormalfordelingen.

- b) Det årlige forbruket av alkohol blant norske menn i tjuårene som ikke er avholdende, er lognormalt fordelt med parametere $\mu = 1.3$ og $\sigma^2 = 0.8$ når forbruket måles i liter ren alkohol. Hvor stor andel av denne gruppen drikker minst 10 liter ren alkohol i løpet av ett år?
- c) Bestem sannsynlighetstettheten til X .
- d) Vis at medianen i fordelingen til X er gitt ved $x_{0.50} = e^\mu$.

(Fortsettes side 2.)

- e) Vis at $E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$, og bestem $\text{Var}(X)$.
 (Vink: Husk at hvis $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, så er $M_Y(t) = E(e^{tY}) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$.)
- f) Bestem $x_{0.50}$ og $E(X)$ når $\mu = 1.3$ og $\sigma^2 = 0.8$. Hvilken av de to verdiene egner seg etter din mening best til å beskrive alkoholforbruket for en "typisk" ikke-avholdende norsk mann i tjueårene? Begrunn svaret ditt.

Oppgave 2.

De stokastiske variablene X og Y har simultan sannsynlighetstetthet

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k e^{-(x+y)} & \text{for } 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

der k er en konstant.

- Vis at $k = 2$.
- Bestem $P(2X \leq Y)$.
- Bestem den marginale sannsynlighetstettheten til X .

Oppgave 3.

Cystisk fibrose er en sjelden, arvelig sykdom som skyldes et recessivt gen. Sykdommen arter seg ved at det produseres et tykt slim i kroppen, blant annet i lungene, som gradvis blir ødelagt. Personer som lider av cystisk fibrose dør ofte i ung alder.

For at en person skal lide av cystisk fibrose må personen arve et bestemt recessivt gen a fra både mor og far. Personen vil ikke lide av sykdommen hvis hun/han arver det dominante genet A fra minst én av foreldrene.

Det betyr at:

- En person som arver det recessive genet a fra begge foreldrene, får genotypen aa . Personen vil lide av cystisk fibrose.
- En person som arver det recessive genet a fra den ene av foreldrene og det dominante genet A fra den andre, får genotypen Aa . Personen vil være frisk, men han/hun er bærer av genet for cystisk fibrose og kan bringe det videre til sine barn.

(Fortsettes side 3.)

- En person som arver det dominante gen A fra begge foreldrene, får genotypen AA . Personen er frisk, og han/hun er ikke bærer av sykdomsgenet.

Vi ser først på et ektepar der både kvinnen og mannen er bærere av gen for cystisk fibrose, dvs. de har begge genotypen Aa . Et barn de får sammen, arver fra mor det recessive gen a med sannsynlighet $1/2$ og det dominante gen A med sannsynlighet $1/2$. Det samme gjelder for arven fra far. Videre er arven fra de to foreldrene uavhengig.

- a) Forklar at sannsynligheten er $1/4$ for at barnet får genotypen aa og dermed vil lide av cystisk fibrose. Forklar også at sannsynligheten er $1/2$ for at barnet får genotypen Aa og dermed vil være en frisk bærer av sykdomsgenet.

I den voksne befolkningen er 5% friske bærere av gen for cystisk fibrose (har genotypen Aa), mens 95% er friske ikke-bærere av sykdomsgenet (har genotypen AA). Vi vil regne med at ingen voksne lider av cystisk fibrose.

Vi ser nå på et tilfeldig valgt ektepar der hverken kvinnen eller mannen lider av cystisk fibrose. Likevel kan en eller begge av dem være bærere av gen for cystisk fibrose. Vi antar at det er uavhengighet mellom kvinnen og mannen med hensyn til om de er bærere av sykdomsgenet.

- b) Forklar at sannsynligheten er 0.0025 for at både mannen og kvinnen er bærere av gen for cystisk fibrose. Forklar også at sannsynligheten er 0.095 for at nøyaktig én av dem er bærer av sykdomsgenet.
- c) Hva er sannsynligheten for at et barn ekteparet får sammen, vil lide av cystisk fibrose? Hva er sannsynligheten for at barnet vil være en frisk bærer av sykdomsgenet?
- d) Anta at du får vite at ekteparet har fått tre barn som alle er friske (dvs. hvert av barna har enten genotypen Aa eller genotypen AA). Hva er da (den betingede) sannsynligheten for at hverken kvinnen eller mannen er bærere av sykdomsgenet?

SLUTT