UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering.
Eksamensdag:	Torsdag 7. juni 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Standardnormalfordelingstabell.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner og Formelsamling for STK1100 og STK1110.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Økokrim etterforsker et håndverkerfirma for å ta seg urimelig høyt betalt. Innfør følgende tilfeldige variabel knyttet til en tilfeldig regning fra firmaet:

$X =$ Forholdet mellom korrekt beløp og beløpet på regningen.

Ut fra noen stikkprøver har Økokrims statistiske konsulent kommet frem til at X er uniformt $[0, \theta]$ fordelt, der θ er en ukjent parameter. Sannsynlighetstettheten til X er da gitt ved:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{1}$$

a) Finn den kumulative fordelingsfunksjonen $F_X(x)$ til X.

b) Vis at $EX = \theta/2$ og $\operatorname{Var} X = \theta^2/12$.

c) Anta $X_1, \ldots, X_n$ er n uavhengige tilfeldige variable, svarende til n regninger fra håndverkerfirmaet, hver med sannsynlighetstetthet gitt ved (1). La $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Finn $E\bar{X}$ og $\operatorname{Var} \bar{X}$.

(Fortsettes side 2.)

d) Anta du har gitt de observerte verdiene $x_1, \dots, x_n$ av $X_1, \dots, X_n$. Hvordan vil du bruke dem til å anslå θ? Begrunn svaret.

e) Anta $n = 48$ i resten av denne oppgaven. Bruk sentralgrenseteoremet til å bestemme en tilnærmet verdi for sannsynligheten $P(\bar{X} \leq 0,75)$ uttrykt ved θ.

f) Anta at $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,6$. Bruk det til å anslå sannsynligheten i e). Fortolk svaret.

Oppgave 2.

Anta at de tilfeldige variable X og Y har simultan sannsynlighetstetthet

$$f(x, y) = k(x - y^2), \qquad 0 \leq y \leq x \leq 1,$$

der k er en konstant.

a) Vis at $k = 4$.

b) Vis at de marginale sannsynlighetstetthetene er gitt ved:

$$f_X(x) = \tfrac{4}{3}x^2(3 - x), \qquad 0 \leq x \leq 1$$
$$f_Y(y) = 2(1 - 3y^2 + 2y^3), \qquad 0 \leq y \leq 1$$

Er X og Y uavhengige? Begrunn svaret.

c) Finn den betingete sannsynlighetstetthet, $f_{Y|X}$, for Y gitt $X = x$. Hva er $E(Y|X = x)$?

d) Finn korrelasjonen, $\rho(X, Y)$ mellom X og Y.

SLUTT