UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering.
Eksamensdag:	Fredag 5. juni 2009.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner og Formelsamling for STK1100 og STK1110.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

De tilfeldige variablene X og Y har simultan sannsynlighetstetthet

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k\,(x+y) & \text{for } 0 < x \le y \le 2 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der k er en konstant.

a) Vis at $k = 1/4$.

b) Vis at de marginale sannsynlighetstetthetene til X og Y er gitt ved

$$f_X(x) = \begin{cases} (2 + 2x - 3x^2/2)/4 & \text{for } 0 < x \le 2 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3\,y^2/8 & \text{for } 0 < y \le 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Er X og Y uavhengige? Begrunn svaret.

c) Finn $E(X)$ og $\mathrm{V}(X)$.

d) Finn den betingete sannsynlighetstettheten, $f_{Y|X}(y|x)$, for Y gitt $X = x$. Finn $E(Y|X=x)$.

e) Finn sannsynlighetstettheten til $U = X/Y$.

(Fortsettes på side 2.)

f) La $V = Y + X$ og $W = Y - X$. Forklar hvorfor $W < V \leq 4 - W$, $0 \leq W < 2$.

g) Den simultane sannsynlighetstettheten, $g_{VW}(v, w)$, til V og W som er funksjoner av X og Y, kan finnes ved bruke den generelle formelen

$$g_{VW}(v, w) = f_{XY}(\nu_1(v, w), \nu_2(v, w))|det(M)|.$$

Her er $X = \nu_1(V, W), Y = \nu_2(V, W)$ og

$$det(M) = \frac{\partial \nu_1(v, w)}{\partial v}\frac{\partial \nu_2(v, w)}{\partial w} - \frac{\partial \nu_1(v, w)}{\partial w}\frac{\partial \nu_2(v, w)}{\partial v}.$$

Bruk denne formelen til å beregne $g_{VW}(v, w)$ for $V = Y + X$ og $W = Y - X$. Sjekk at

$$\int\int g_{VW}(v, w) dv dw = 1.$$

h) Finn Corr (X,Y). Dette punktet kan løses uavhengig av d), e), f), g).

Oppgave 2

En tilfeldig variabel X sies å være standard betafordelt med parametere $\alpha > 0$ og $\beta > 0$ hvis den har sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

a) Anta $k = 1, \ldots$. Vis at

$$E(X^k) = \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha+k-1}(1 - x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha + \beta + k)\Gamma(\alpha)}.$$

b) Beregn enkle uttrykk for $E(X)$ og $V(X)$.

SLUTT