# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering. |
| Eksamensdag: | Tirsdag 7. juni 2011. |
| Tid for eksamen: | 14.30 – 17.30. |
| Oppgavesettet er på 2 sider. | |
| Vedlegg: | Standardnormalfordelingstabell. |
| Tillatte hjelpemidler: | Godkjent kalkulator og Formelsamling for STK1100/STK1110. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

## Oppgave 1.

Anta at $X$ og $Y$ er to diskrete stokastiske variable med simultane punktsannsynligheter $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$ gitt i tabellen under.

| $p(x,y)$ | | $y$ = 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 0.20 | 0.20 | 0.20 |
| | 2 | 0.25 | 0.10 | 0.05 |

(a) Finn forventning og varians for $Y$.

Finn også $P(X < Y)$.

(b) Beregn den betingede forventningen $E[Y|X = 2]$.

Er $X$ og $Y$ avhengige? Begrunn svaret.

(c) Finn også $E[Y|X = 1]$ og sjekk at loven om dobbeltforventning

$$E[Y] = E[E[Y|X]]$$

holder for dette spesialtilfellet.

(Fortsettes side 2.)

# Oppgave 2.

La $X$ være en kontinuerlig stokastisk variabel med tetthet $f(x)$ og momentgenererende funksjon $M(t) = \mathrm{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$.

(a) Forklar hvorfor (i) $M(0) = 1$, (ii) $M'(0) = \mathrm{E}[X]$ og (iii) $M''(0) = \mathrm{E}[X^2]$.

(b) La $R(t) = \ln(M(t))$. Vis at $R'(0) = \mathrm{E}[X]$ og $R''(0) = \mathrm{V}[X]$.

(c) Anta at $f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x}$ for $x > 0$ og $f(x) = 0$ ellers, dvs. $X$ er gammafordelt med parametre $\alpha$ og $\beta$. Vis at den momentgenererende funksjonen til $X$ er lik

$$M(t) = \frac{\beta^\alpha}{(\beta - t)^\alpha}.$$

Vis dessuten at for gammafordelte variable er $\mathrm{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta}$ og $\mathrm{V}[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

(d) Anta at $X_1$ og $X_2$ er uavhengige og gammafordelte slik at $X_1$ har parametre $\alpha_1$ og $\beta$, mens $X_2$ har parametre $\alpha_2$ og $\beta$ (altså samme $\beta$, men muligens ulike $\alpha$-parametre). Vis at $X_1+X_2$ er gammafordelt med parametre $\alpha_1 + \alpha_2$ og $\beta$.

# Oppgave 3.

La $X$ = antall dødsulykker (dvs. ulykker med en eller flere omkomne) i trafikken i løpet av ett år. Vi skal anta at $X$ er Poissonfordelt med forventning $\lambda$.

(a) Forklar hvorfor $\hat{\lambda} = X$ er en rimelig estimator for $\lambda$. Hva er variansen til $\hat{\lambda} = X$? Angi tilnærmet fordeling for $\hat{\lambda} = X$ når $\lambda$ er tilstrekkelig stor ($> 10$).

(b) I 2009 var det i Norge $X = 186$ trafikkulykker der en eller flere personer omkom. Angi på denne bakgrunn et tilnærmet 95% konfidensintervall for $\lambda$.

(c) Anta at antall dødsulykker i Norge i hvert av årene 2000-2004 var uavhengige og Poissonfordelte med forventning $\mu$. I løpet av disse $n = 5$ årene var det totalt 1294 ulykker der en eller flere personer omkom. Dermed var gjennomsnittlig antall dødsulykker per år lik $\hat{\mu} = 258.8$.

Finn et tilnærmet 95% konfidensintervall for $\mu$. Sammenhold med resultatet i punkt (b).

SLUTT