UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering.
Eksamensdag:	Mandag 10. juni 2013.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner og Formelsamling for STK1100 og STK1110.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige tilfeldige variable med momentgenererende funksjoner $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), ..., M_{X_n}(t)$. La videre:

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n,$$

der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er konstanter.

a) Vis at:
$$M_Y(t) = M_{X_1}(a_1t)M_{X_2}(a_2t)\ldots M_{X_n}(a_nt).$$

b) Anta $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Da er $M_X(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2)$. La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige tilfeldige variable der $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i = 1, \ldots, n$. Vis at:
$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$$
$$\sim N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2).$$

Oppgave 2

La X være en Bernoulli tilfeldig variabel med punktsannsynlighet:

$$p(x) = \begin{cases} 1-p & x = 0 \\ p & x = 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \tag{1}$$

(Fortsettes på side 2.)

a) Vis at $M_X(t) = 1 - p + \exp(t)p$.

b) Vis at $EX = p,\ V(X) = p(1-p)$.

c) La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige tilfeldige variable der $X_i \sim Bernoulli(p)$ $i = 1, \ldots, n$. Vis at:

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim Binomisk(n, p).$$

d) La $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ være uavhengige tilfeldige variable der $Y_i \sim Binomisk(n_i, p)$ $i = 1, \ldots, m$. Vis at:

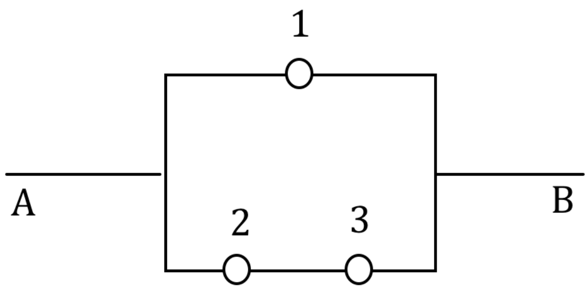
$$V = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m \sim Binomisk(n_1 + n_2 + \ldots + n_m, p).$$

e) Basert på V foreslå en forventningsrett estimator for p. Begrunn svaret. Hva er estimatorens varians?

f) Anta at $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = 100$ og at $v = 20$ er den observerte verdien av V. Finn et tilnærmet 95% konfidensintervall for p. Bruk at for $Z \sim N(0,1)$ er $P(Z \leq -1.96) = 0.025$.

Oppgave 3

En del av et rørledningsnettverk for transport av gass er fremstilt i følgende figur:



Nettverket har komponentene $1, 2, 3$ og funksjonerer hvis det er forbindelse mellom A og B. La for $i = 1, 2, 3$:

$$T_i = \text{Levetiden til komponent } i,$$

der $P(T_i \leq t) = F_i(t)$. Anta at T_1, T_2, T_3 er uavhengige tilfeldige variable. La:

$$T = \text{Levetiden til nettverket},$$

der $P(T \leq t) = F(t)$.

a) Vis at:

$$F(t) = F_1(t)[1 - (1 - F_2(t))(1 - F_3(t))].$$

(Fortsettes på side 3.)

b) Anta at $F_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t),\ t \geq 0, \lambda_i > 0$ for $i = 1, 2, 3$, dvs. at komponentenes levetider er eksponensielt fordelt. Vis at:

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda_1 t) - \exp(-(\lambda_2 + \lambda_3)t) + \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t).$$

c) Vis at sannsynlighetstettheten til $T, f(t)$, er gitt ved:

$$f(t) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) + (\lambda_2 + \lambda_3) \exp(-(\lambda_2 + \lambda_3)t)$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t).$$

d) Beregn ET og $V(T)$.

SLUTT