UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering
Eksamensdag:	Fredag 6. juni 2014.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner og Formelsamling for STK1100 og STK1110

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La X være en diskret tilfeldig variabel med

$$p_X(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, ...$$

der $0 < p < 1$. Du vil i denne oppgaven få bruk for at

$$\sum_{x=0}^{\infty} a^x = \tfrac{1}{1-a} \text{ og } \sum_{x=0}^{\infty} x a^{x-1} = \tfrac{1}{(1-a)^2}, \quad \text{for } |a| < 1.$$

(a) Hva kalles fordelingen $p_X(x)$?
Utled forventingen til X.

(b) Vis at $F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x$.

(c) For hvilke verdier av x og y er $P(X = x | X > y)$ veldefinert?
Vis at

$$P(X = x | X > y) = (1-p)^{x-y-1}p.$$

Argumenter hvorfor svaret er fornuftig utifra en mer direkte tolkning av begivenheten $(X | X > y)$.

(d) Utled $E[X | X > y]$ og $V(X | X > y)$.

(e) Vis at

$$E(e^{tX}) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}.$$

For hvilke verdier av t er dette gyldig? Vil da den momentgenererende funksjon eksistere?

(Fortsettes på side 2.)

(f) La nå $X_1, ..., X_n$ være uavhengig identisk fordelte variable, alle med samme sannsynlighetsfordeling $p_X(x)$ som definert i starten av oppgaven. Finn den momentgenererende funksjonen til $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(g) Finn forventning og varians til $\overline{X}$. Spesifiser hvilke regler du bruker for å komme frem til disse resultater.

(h) Anta vi er interessert i $\theta = E(\overline{X}^3)$. Beskriv hvordan en kan bruke Monte Carlo integrasjon for å anslå denne verdien. Hva slags egenskaper har dette anslaget?

Oppgave 2

Betrakt funksjonen

$$f_X(x) = \begin{cases} a + x & \text{for } -1 \leq x \leq 0 \\ a - x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Begrunn hvorfor $a = 1$ fører til at $f_X(x)$ er en lovlig sannsynlighetstetthetsfunksjon. Tegn $f_X(x)$ for denne verdien av a.

(b) La X være en tilfeldig variabel med sannsynlighetstetthetsfunksjon $f_X(x)$. Finn forventning til X.

(c) Definer $Y = \mu + bX$. Finn sannsynlighetstetthetsfunksjonen $f_Y(y; \mu)$ til Y.

(d) Finn forventning til Y. Vis også at variansen til Y er gitt på formen $V(Y) = kb^2$ og bestem k.

(Hvis du ikke klarer å bestemme k her, kan du i det etterfølgende bruke k som symbol i utregningene.)

(e) Anta $y_1, ..., y_n$ er et tilfeldig utvalg fra sannsynlighetsfordelingen definert av $f_Y(y; \mu)$. Vi ønsker å estimere μ og b^2.

Finn momentestimatorene til μ og b^2.

(f) Basert på et tilfeldig utvalg av størrelse $n = 30$ ble $\hat{\mu} = 5.23$ og $\hat{b}^2 = 4.32$. Bruk dette til å konstruere et (tilnærmet) 95% konfidensintervall og et (tilnærmet) 99% konfidensintervall for μ.

Gi en fortolkning av disse intervallene.

Du får her oppgitt følgende tabell for standard normal fordelingen:

Persentil	90	95	97.5	99	99.5	99.9	99.5
z_α	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58	3.08	3.27

SLUTT