UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering.

Eksamensdag: Tirsdag 12. juni 2018.

Tid for eksamen: 9.00 – 13.00.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.
Formelsamling for STK1100 og STK1110.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Tvillingpar kan være enten eneggede eller toeggede. Sannsynligheten for at det ved en tvillingfødsel blir født eneggede tvillinger er i Nord-Europa omtrent 30%, og vi vil benytte denne sannsynligheten for enegget tvillingfødsel i denne oppgaven.

De to tvillingene i et enegget tvillingpar har alltid samme kjønn. Vi antar at sannsynligheten for to jenter ved enegget tvillingfødsel er 48.6%. Vi antar videre at ved en fødsel av toeggede tvillinger er kjønnet til den ene tvillingen uavhengig av kjønnet til den andre, og at sannsynligheten for at en bestemt av tvillingene er jente er 48.6%.

a) Hva er sannsynligheten for to jenter ved toegget tvillingfødsel?

b) Hva er sannsynligheten for at begge tvillingene i et tvillingpar er jenter? Hva er sannsynligheten for at én er jente og én er gutt?

c) Begge tvillingene i et tvillingpar er jenter. Hva er sannsynligheten for at de er eneggede?

d) De to tvillingene i et tvillingpar har samme kjønn. Hva er sannsynligheten for at de er toeggede?

Oppgave 2

Vi minner om at hvis en stokastisk variabel W er gammafordelt med formparameter α og skalaparameter β, som vi skriver $W \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, så er sannsynlighetstettheten til W gitt ved

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} w^{\alpha-1} e^{-w/\beta} & \text{hvis} \quad w > 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Her er $\Gamma(\alpha)$ gammafunksjonen. Vi minner også om at $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ og $\Gamma(1) = 1$.

(Fortsettes på side 2.)

Anta at $W \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$.

a) Vis at den momentgenererende funksjonen til W er

$$M_W(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \quad \text{for } t < 1/\beta.$$

b) Bruk den momentgenererende funksjonen til å bestemme forventning og varians til W.

Anta så at Z er standardnormalfordelt, og sett $Y = Z^2$.

c) Vis at for $y > 0$ er den kumulative fordelingen til Y gitt ved

$$F_Y(y) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}),$$

der $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ er den kumulative standardnormalfordelingen.

d) Bruk resultatet i punkt c til å bestemme sannsynlighetstettheten til Y, og vis at $Y \sim \text{Gamma}(1/2, 2)$.

Oppgave 3

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige normalfordelte variabler med kjent forventning μ_0 og ukjent varians σ^2. En estimator for σ^2 er

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2.$$

a) Vis at $n\widehat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \text{Gamma}(n/2, 2)$. (*Vink:* Bruk resultatet i oppgave 2d, og husk at en sum av uavhengige gammafordelte variabler som alle har samme skalaparameter, selv er gammafordelt.)

b) Vis at $\widehat{\sigma}^2$ er en forventningsrett estimator for σ^2 og bestem $V(\widehat{\sigma}^2)$. Er $\widehat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma}^2}$ en forventningsrett estimator for σ?

c) Utled et 95% konfidensinterval for σ. Intervallet skal uttrykkes ved hjelp av n, $\widehat{\sigma}$, a og b. Her er a og b henholdsvis 2.5% og 97.5% persentilene for gammafordelingen med formparameter $n/2$ og skalaparameter 2.

Seks voltmetere ble testet med en spenning på nøyaktig 50 volt og ga følgende resultat:

50.4	49.3	50.5	49.0	49.7	50.1

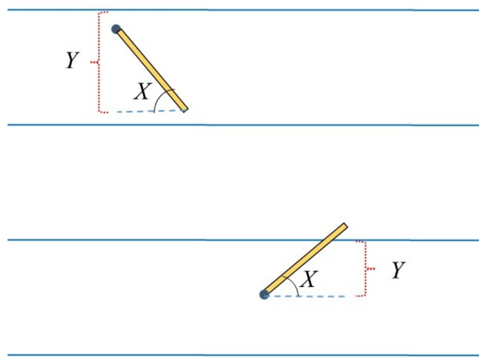
Vi antar at målingene er uavhengige og normalfordelte med forventning 50 volt og ukjent standardavvik σ.

d) Gi et estimat for standardavviket. Bestem også et 95% konfidensintervall for σ. Det opplyses at 2.5% og 97.5% persentilene i gammafordelingen med formparameter 3 og skalaparameter 2 er henholdsvis 1.24 og 14.45.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4

På et ark er det tegnet flere parallelle linjer. Avstanden mellom linjene er $d = 4.8\,\text{cm}$, som er lik lengden av en fyrstikk. En fyrstikk kastes tilfeldig på arket. La X være vinkelen fyrstikken danner med de parallelle linjene (i radianer), og la Y være avstanden fra den nederste enden av fyrstikken til linja ovenfor (i cm). Figuren nedenfor viser to mulige utfall av forsøket og definisjonene av X og Y. (På figuren krysser den nederste fyrstikken en av de parallelle linjene, mens den øverste ikke gjør det.)



Vi får en modell for et tilfeldig fyrstikkast ved å anta at X og Y har simultan tetthet

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2/(\pi d) & \text{for } 0 < x < \pi/2 \text{ og } 0 < y < d \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Bestem de marginale sannsynlighetstetthetene til X og Y. Er X og Y uavhengige?

b) Forklar at fyrstikken vil krysse en av de parallelle linjene så sant $d \sin X > Y$, og vis at $\mathrm{P}(d \sin X > Y) = 2/\pi$. (*Vink:* Husk at sinus til en vinkel i en rettvinklet trekant er forholdet mellom motstående katet og hypotenusen. Husk også at $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$.)

Kommentar: Problemstillingen i punkt b ble første gang presentert av den franske greven og naturforskeren Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707-1788). I hans framstilling kastes det med en nål i stedet for en fyrstikk, og problemet har derfor fått navnet Buffons nålproblem.

SLUTT