Fasit og løsninger til midtveiseksamen i STK1100 18. mars 2004

1) På en tippekupong er det gitt 12 fotballkamper. For hver kamp skal en tippe om det blir hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B). En tipperekke består av ett tips for hver av de 12 kampene. Hvor mange forskjellige rekker kan en tippe?

☐ 177147 ☐ 1728 ☐ 479001600 ☐ 220 ☒ 531441

Løsning: Antall mulige tipperekker er $3^{12} = 531441$.

2) Oslostudentenes idrettslag skal være med på en stafett der det er åtte etapper. Treneren har bestemt hvilke åtte løpere som skal være med på stafettlaget, men hun har enda ikke bestemt hvilken rekkefølge de skal løpe i. Hvor mange slike rekkefølger er det?

☐ 5230 ☐ 36 ☒ 40320 ☐ 20160 ☐ 256

Løsning: Antall rekkefølger de kan løpe i er $8! = 40320$.

3) I et IT-firma er det ansatt 15 programmerere. Firmaet har fire jobber som skal gjøres. Til jobb nummer 1 trengs det seks programmerere, til jobb nummer 2 trengs det fire programmerere, til jobb nummer 3 trengs det tre programmerere, og til jobb nummer 4 trengs det to programmerere. På hvor mange måter kan firmaet fordele programmererne på jobbene?

☐ $3.26 \cdot 10^{11}$ ☐ 1365 ☐ 2160 ☒ 6306300 ☐ 144

Løsning: Antall måter programmererne kan fordeles på jobbene på er $\frac{15!}{6!\,4!\,3!\,2!} = 6306300$.

4) I en eske er det sju blå kuler, fem røde kuler, og tre hvite kuler. Du trekker tilfeldig to kuler. Hva er sannsynligheten for at de to kulene har samme farge?

☒ 32.4% ☐ 28.6% ☐ 20.0% ☐ 36.7% ☐ 9.5 %

Løsning:
$P(\text{samme farge}) = P(\text{to blå}) + P(\text{to røde}) + P(\text{to hvite}) = \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = 0.324$

5) I en eske er det tre pengestykker. Ett av dem er normalt, ett av dem har krone på begge sider, og ett av dem har mynt på begge sider. Du trekker tilfeldig et pengestykke og kaster det to ganger. Da er sannsynligheten for at du får krone i begge kastene lik:

☐ $\frac{2}{12}$ ☒ $\frac{5}{12}$ ☐ $\frac{4}{12}$ ☐ $\frac{6}{12}$ ☐ $\frac{3}{12}$

Løsning: Vi innfører begivenhetene $N=$"kaster med normalt pengestykke", $K=$"kaster med pengestykke med krone på begge sider", $M=$"kaster med pengestykke med mynt på begge sider" og $B=$ "får krone i begge kastene". Setningen om total sannsynlighet gir da:
$P(B) = P(B\,|\,N) \cdot P(N) + P(B\,|\,K) \cdot P(K) + P(B\,|\,M) \cdot P(M) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

6) I en eske er det tre pengestykker. Ett av dem er normalt, ett av dem har krone på begge sider, og ett av dem har mynt på begge sider. Du trekker tilfeldig et pengestykke og kaster det to ganger. Tenk deg at du fikk krone i begge kastene. Da er sannsynligheten for at du har kastet med det normale pengestykket lik:

☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{6}$ ☒ $\frac{1}{5}$

Løsning: Vi innfører de samme begivenhetene som i oppgave 5 og bruker det resultatet vi fant der. Da får vi (jf. Bayes setning):

$$P(N \mid B) = \frac{P(B \mid N) \cdot P(N)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}$$

7) Ved å teste for et bestemt hormon i en urinprøve kan en avgjøre om en kvinne er gravid. En graviditetstest er ikke 100% sikker. For en graviditetstest har en at:

- hvis en kvinne er gravid, er det 99.0% sannsynlig at testen vil vise det
- hvis en kvinne ikke er gravid, er det 0.5% sannsynlig at testen likevel vil indikere at kvinnen er gravid

Vi antar at 25% av de kvinnene som tar en graviditetstest, er gravide.

En kvinne tar en graviditetstest, og testen indikerer at hun er gravid. Da er sannsynligheten for at hun virkelig er gravid lik:

☐ 0.743 ☐ 0.248 ☐ 0.995 ☒ 0.985 ☐ 0.868

Løsning: Vi innfører begivenhetene G="kvinnen er gravid" og T="testen indikerer at kvinnen er gravid". Av opplysningene i oppgaven har vi at $P(T \mid G) = 0.99$, $P(T \mid G^c) = 0.005$ og $P(G) = 0.25$.
Bayes setning gir da:

$$P(G \mid T) = \frac{P(T \mid G) \cdot P(G)}{P(T \mid G) \cdot P(G) + P(T \mid G^c) \cdot P(G^c)} = \frac{0.99 \cdot 0.25}{0.99 \cdot 0.25 + 0.005 \cdot 0.75} = 0.985$$

8) Fra offentlig statistikk har vi at sannsynligheten er:

- 3.0% for at en 75 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 3.4% for at en 76 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 3.9% for at en 77 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 4.5% for at en 78 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 5.0% for at en 79 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år

Hva er sannsynligheten for at en 75 år gammel kvinne vil dø før hun blir 80 år gammel (dvs. at hun ikke vil oppleve sin 80-årsdag)?

☒ 18.3% ☐ 80.2 % ☐ 81.7% ☐ 19.8% ☐ 45.6%

Løsning: Produktsetningen gir at sannsynligheten for at kvinnen vil bli minst 80 år er:

$$(1 - 0.030) \cdot (1 - 0.034) \cdot (1 - 0.039) \cdot (1 - 0.045) \cdot (1 - 0.050) = 0.817$$

Sannsynligheten for at hun ikke vil bli minst 80 år er derfor lik $1 - 0.817 = 0.183$.

9) Fra offentlig statistikk har vi at sannsynligheten er:

- 3.0% for at en 75 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 3.4% for at en 76 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 3.9% for at en 77 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år

- 4.5% for at en 78 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 5.0% for at en 79 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år
- 5.7% for at en 80 år gammel kvinne vil dø i løpet av ett år

Hva er sannsynligheten for at en 75 år gammel kvinne vil bli nøyaktig 80 år gammel (dvs. at hun vil oppleve sin 80-årsdag, men ikke sin 81-årsdag)?

☐ 0.057 ☐ 0.255 ☒ 0.047 ☐ 0.010 ☐ 0.045

Løsning: Produktsetningen og resultatet i oppgave 8 gir at:
P(kvinnen blir 80 år) $=$ P(kvinnen blir minst 80 år)$\cdot$$P$(kvinnen blir ikke 81 år | kvinnen blir minst 80 år)
$= 0.817 \cdot 0.057 = 0.047$

10) Et lite teknisk system inneholder to komponenter, som fungerer uavhengig av hverandre. Sannsynligheten for at den første komponenten fungerer er 95%, mens sannsynligheten for at den andre komponenten fungerer er 90%. Systemet fungerer hvis minst én av komponentene fungerer. (Vi sier at komponentene er koblet i parallell.) Hva er sannsynligheten for at systemet fungerer?

☐ 97.5% ☐ 99.0% ☐ 95.0% ☒ 99.5% ☐ 85.5%

Løsning: Vi innfører begivenhetene A="første komponent fungerer" og B="andre komponent fungerer".
Av opplysningene i oppgaven har vi at $P(A) = 0.95$ og $P(B) = 0.90$.
Addisjonssetningen og det at A og B er uavhengige begivenheter gir nå at:
$P(\text{systemet fungerer}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$
$= 0.95 + 0.90 - 0.95 \cdot 0.90 = 0.995$

11) Fra offisiell statistikk vet vi at 1% av fødslene i Norge er tvillingfødsler. Hvor mange fødsler må det være ved en fødestue i løpet av ett år for at det skal være omtrent 95% sannsynlig at det blir født minst ett tvillingpar?

☒ 300 ☐ 150 ☐ 100 ☐ 20 ☐ 90

Løsning: Hvis det er n fødsler, er sannsynligheten for minst én tvillingfødsel lik $1 - (1 - 0.01)^n$. Vi bestemmer derfor n av ligningen $1 - 0.99^n = 0.95$. Det gir $n = 298.1$, dvs vi må ha 300 fødsler i løpet av ett år for at sannsynligheten for minst én tvillingfødsel skal være omtrent 95%.

12) Den kumulative fordelingen til den stokastiske variabelen X er gitt ved

x	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	0	0.45	0.70	0.85	0.95	1.00

Da er $E(X)$ lik:

☐ 1.00 ☒ 2.05 ☐ 2.35 ☐ 2.50 ☐ 3.00

Løsning: Av den kumulative fordelingen finner vi at X har punktsannsynlighet:

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0.45	0.25	0.15	0.10	0.05

Forventningsverdien blir:

$E(X) = \sum_{k=1}^{5} k \cdot P(X = k) = 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.15 + 4 \cdot 0.10 + 5 \cdot 0.05 = 2.05$

13) Den kumulative fordelingen til den stokastiske variabelen X er gitt ved

x	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	0	0.45	0.70	0.85	0.95	1.00

Da er Var(X) lik:

☐ 1.20 ☐ 5.65 ☐ 4.20 ☒ 1.45 ☐ 2.65

Løsning: Vi fant punktsannsynligheten til X i oppgave 12. Vi finner nå:

$E(X^2) = \sum_{k=1}^{5} k^2 \cdot P(X = k) = 1^2 \cdot 0.45 + 2^2 \cdot 0.25 + 3^2 \cdot 0.15 + 4^2 \cdot 0.10 + 5^2 \cdot 0.05 = 5.65$

Dermed er Var$(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 5.65 - 2.05^2 = 1.45$

14) Per er med i en spørrekonkurranse på TV. Han blir stilt 10 spørsmål. For hvert spørsmål kan han velge mellom tre svaralternativ der ett av dem er riktig. Hvis Per svarer riktig på minst 8 spørsmål vinner han 10 000 kroner. Sannsynligheten for at Per vinner 10 000 kroner dersom han bare gjetter er lik:

☐ 1.0 % ☐ 1.7% ☒ 0.3% ☐ 4.7% ☐ 0.8%

Løsning: La X være antall riktige svar Per får. Da er X binomisk fordelt med $n = 10$ og $p = 1/3$.

$P(\text{Per vinner 10 000 kroner}) = P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$= \binom{10}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0.00305 + 0.00033 + 0.00002 = 0.0034 \approx 0.003$

15) Du kaster en terning gjentatte ganger. Sannsynligheten for at du vil få den første sekseren i det femte kastet er lik:

☐ 0.036 ☐ 0.138 ☐ 0.401 ☒ 0.080 ☐ 0.598

Løsning:
$P(\text{første sekser i femte kast}) = P(\text{ingen sekser i fire kast}) \cdot P(\text{sekser i femte kast}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = 0.080$

16) SMS meldinger blir mottatt ved en basestasjon i henhold til en Poisson prosess med $\lambda = 20$ per minutt. Hva er sannsynligheten for at det blir mottatt minst tre SMS meldinger i løpet av 15 sekunder?

☐ 14.0% ☒ 87.5% ☐ 99.9% ☐ 25.0% ☐ 74.2 %

Løsning: La X være antall SMS meldinger som blir mottatt i løpet av 15 sekunder.
Da er X Poisson fordelt med forventningsverdi $\lambda \cdot \frac{15}{60} = 20 \cdot 0.25 = 5$. Dermed er:

$P(\text{minst 3 SMS-meldinger}) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - e^{-5} - 5 \cdot e^{-5} - \frac{5^2}{2!}e^{-5} = 1 - 0.0067 - 0.0337 - 0.0842 = 0.8754 \approx 0.875$

17) Den stokastiske variabelen X har sannsynlighetstettheten

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{16}(1 - x^2)^2 & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er $P(0 < X < 0.5)$ lik:

☐ 0.430 ☐ 0.250 ☐ 0.527 ☐ 0.412 ☒ 0.396

Løsning: Vi har at:

$$\begin{aligned} P(0 < X < 0.5) &= \int_0^{0.5} f_X(x)dx = \int_0^{0.5} \frac{15}{16}(1-x^2)^2 dx = \frac{15}{16}\int_0^{0.5}(1-2x^2+x^4)dx \\ &= \frac{15}{16}\cdot\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^{0.5} = \frac{15}{16}\cdot 0.4229 = 0.396 \end{aligned}$$

18) Den stokastiske variabelen X har sannsynlighetstettheten

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{16}(1-x^2)^2 & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er $\text{Var}(X)$ lik:

☒ $\frac{1}{7}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{15}{16}$ ☐ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{3}{32}$

Løsning: Sannsynlighetstettheten til X er symmetrisk om 0. Da er $E(X) = 0$ (jf. oppgave 4.7.12 i Rice). Vi får dermed at

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2) - 0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-1}^{1}\frac{15}{16}x^2(1-x^2)^2dx = \frac{15}{16}\int_{-1}^{1}(x^2 - 2x^4 + x^6)dx \\ &= \frac{15}{16}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7\right]_{-1}^{1} = \frac{15}{16}\cdot\frac{16}{105} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

19) Den stokastiske variabelen X har kumulativ fordeling

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x^2} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er medianen i fordelingen lik:

☒ 0.589 ☐ 0.347 ☐ 0.173 ☐ 1.000 ☐ 0.443

Løsning: Vi finner medianen av ligningen $F_X(x_{0.50}) = \frac{1}{2}$. Det gir:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2x_{0.50}^2} &= \frac{1}{2} \\ e^{-2x_{0.50}^2} &= \frac{1}{2} \\ -2x_{0.50}^2 &= -\log(2) \\ x_{0.50} &= \sqrt{\frac{\log(2)}{2}} = 0.589 \end{aligned}$$

20) Vekten til en nyfødt gutt er normalfordelt med forventningsverdi 3.60 kg og standardavvik 0.50 kg. Sannsynligheten for at en nyfødt gutt vil veie minst fire kg er lik:

☐ 30.9% ☐ 5.5% ☐ 34.5% ☐ 78.8% ☒ 21.2 %

Løsning: La X være vekten til en nyfødt gutt.
Vi har $X \sim N(3.60, 0.50^2)$ og $Z = (X - 3.60)/0.50 \sim N(0,1)$.

$$P(\text{nyfødt gutt vil veie minst 4 kg}) = P(X \geq 4.00) = P\left(\frac{X - 3.60}{0.50} \geq \frac{4.00 - 3.60}{0.50}\right)$$

$$= P(Z \geq 0.80) = 1 - P(Z \leq 0.80) = 1 - 0.7881 \approx 0.212$$

21) Vitalkapasiteten er et mål for en persons lungefunksjon. Den måles ved at en først puster inn så dypt en kan, og så puster ut så mye luft en klarer. Den mengde luft som pustes ut blir målt i et apparat og kalles vitalkapasiteten. For friske 12 år gamle gutter er vitalkapasiteten normalfordelt med forventningsverdi 3.0 liter og standardavvik 0.4 liter.

Når en lege undersøker vitalkapasiteten til en pasient, er hun interessert i om den er vesentlig lavere enn normalt. I så fall kan det være tegn på lungesykdom som må undersøkes nærmere. Vanligvis bestemmes en nedre grenseverdi slik slik at 97.5% av den friske befolkningen ligger over grensen. For tolv år gamle gutter er denne grenseverdien lik:

☐ 2.34 liter ☒ 2.22 liter ☐ 2.60 liter ☐ 1.04 liter ☐ 2.10 liter

Løsning: La X være vitalkapasiteten til en 12 år gammel gutt.
Vi har $X \sim N(3.0, 0.4^2)$ og $Z = (X - 3.0)/0.4 \sim N(0,1)$. Grensverdien g er gitt ved:

$$0.975 = P(X \geq g) = P\left(\frac{X - 3.0}{0.4} \geq \frac{g - 3.0}{0.4}\right) = P\left(Z \geq \frac{g - 3.0}{0.4}\right)$$

Nå har vi at $P(Z \geq -1.96) = P(Z \leq 1.96) = 0.975$.

Vi bestemmer derfor g ved $\frac{g-3.0}{0.4} = -1.96$, og får grenseverdien $g = 3.0 - 1.96 \cdot 0.4 = 2.216 \approx 2.22$

22) Den stokastiske variabelen X har sannsynlighetstettheten

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er sannsynlighetstettheten til $Y = e^X$ lik (for $1 \leq y \leq e$):

☐ e^{2y} ☐ $(\log y)^2$ ☐ $2e^y$ ☒ $2\log y/y$ ☐ $2\log y$

Løsning: Den kumulative fordelingen til Y er (for $1 \leq y \leq e$):

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = F_X(\log y)$$

Vi deriverer og får sannsynlighetstettheten til Y (for $1 \leq y \leq e$):

$$f_Y(y) = F_Y^{'}(y) = F_X^{'}(\log y)\frac{d}{dy}\log y = f_X(\log y)/y = 2\log y/y$$

23) Den stokastiske variabelen X har sannsynlighetstettheten

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{16}(1 - x^2)^2 & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er sannsynlighetstettheten til $Y = X^2$ lik (for $0 \leq y \leq 1$):

☐ $\frac{15}{16}(1-y)^2$ ☐ $\frac{45}{16}(1-y^4)^2y^3$ ☐ $\frac{45}{32}(1-y^4)^2y^3$ ☐ $\frac{15}{32}(1-y)^2/\sqrt{y}$ ☒ $\frac{15}{16}(1-y)^2/\sqrt{y}$

Løsning: Den kumulative fordelingen til Y er (for $0 \leq y \leq 1$):

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

Vi deriverer og får sannsynlighetstettheten til Y (for $0 \leq y \leq 1$):

$$f_Y(y) = F_Y^{'}(y) = f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y})\frac{-1}{2\sqrt{y}} = \frac{15}{16}(1-y)^2\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{15}{16}(1-y)^2\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{15}{16}(1-y)^2/\sqrt{y}$$

24) Den stokastiske variabelen X er uniformt fordelt på intervallet $[-1, 1]$. Da er $E(e^X)$ lik:

☐ 1.00 ☒ 1.18 ☐ 1.23 ☐ 1.35 ☐ 1.54

Løsning:
Sannsynlighetstettheten til X er $f_X(x) = 0.50$ for $-1 \leq x \leq 1$ og $f_X(x) = 0$ ellers. Dermed er:

$$E(e^X) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} e^x\, 0.50\, dx = 0.50\, [e^x]_{-1}^{1} = 0.50(e - e^{-1}) = 1.175 \approx 1.18$$

25) Den stokastiske variabelen X er gamma-fordelt med formparameter $\alpha = 2$ og skalaparameter $\lambda = 3$. Da er $E(1/\sqrt{X})$ lik:

☐ 0.94 ☐ 1.75 ☒ 1.53 ☐ 0.67 ☐ 1.22

Løsning: For $x \geq 0$ er sannsynlighetstettheten til X gitt ved $f_X(x) = \frac{3^2}{\Gamma(2)}x^{2-1}e^{3x} = 9xe^{-3x}$
Dermed er:

$$E(\frac{1}{\sqrt{X}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, 9xe^{-3x}dx$$

$$= 9\int_0^{\infty} x^{3/2-1}e^{-3x}dx = \frac{9}{3^{3/2}}\int_0^{\infty} u^{3/2-1}e^{-u}du \qquad \text{(substituerer } u = 3x\text{)}$$

$$= \sqrt{3}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 1.53499 \approx 1.53$$