Løsningsforslag til eksamen i

STK1100 6. juni 2008

Oppgave 1

a) Vi har at

$$P(T \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-1^2} = 1 - e^{-1} = 0.632$$

Videere er

$$\begin{aligned} P(1 \leq T \leq 2) &= F(2) - F(1) = 1 - e^{-2^2} - (1 - e^{-1^2}) \\ &= e^{-1} - e^{-4} = 0.350 \end{aligned}$$

b) Median betjeningstid $t_{0.50}$ er gitt ved at $F(t_{0.50}) = 1/2$. Det gir

$$\begin{aligned} 1 - e^{-t_{0.50}^2} &= 1/2 \\ e^{-t_{0.50}^2} &= 1/2 \\ -t_{0.50}^2 &= -\log 2 \\ t_{0.50} &= \sqrt{\log 2} \end{aligned}$$

Median betjeningstid er $\sqrt{\log 2} = 0.833$ minutter, dvs. $60 \cdot 0.833 = 50$ sekunder.

c) For $u > 0$ er den kumulative fordelingen til U gitt ved

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) = P(T^2 \leq u) = P(T \leq \sqrt{u}) \\ &= F(\sqrt{u}) = 1 - e^{-(\sqrt{u})^2} = 1 - e^{-u} \end{aligned}$$

For $u \leq 0$ er $F_U(u) = 0$. Sannsynlighetstettheten til U er derfor gitt ved

$$f_U(u) = F'_U(u) = \begin{cases} e^{-u} & \text{for } u > 0 \\ 0 & \text{for } u \leq 0 \end{cases}$$

U er eksponentialt fordelt med parameter $\lambda = 1$.

Oppgave 2

a) Vi har at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^y kxy\,dxdy = k\int_0^1 y\left(\int_0^y x\,dx\right)dy$$

$$= k\int_0^1 y \cdot \frac{y^2}{2}\,dy = \frac{k}{2}\int_0^1 y^3\,dy = \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{k}{8}$$

Vi skal ha $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dxdy = 1$. Derfor er $k = 8$.

b) For $0 < y < 1$ er den marginale sannsynlighetstettheten til Y gitt ved

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^y 8xy\,dx \\ &= 8y\int_0^y x\,dx = 8y\cdot\frac{y^2}{2} = 4y^3 \end{aligned}$$

Ellers er den marginale tettheten lik null. Vi har altså at

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4\,y^3 & \text{for } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

c) Vi har at

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y\,f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y\cdot 4y^3\,dy \\ &= 4\int_0^1 y^4\,dy = 4\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.80 \end{aligned}$$

Videre er

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2\,f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^2\cdot 4y^3\,dy \\ &= 4\int_0^1 y^5\,dy = 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{6} \end{aligned}$$

slik at

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{4}{6} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0.0267$$

d) For $0 < x < 1$ er den marginale sannsynlighetstettheten til X gitt ved

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_x^1 8xy\,dy \\ &= 8x\int_x^1 y\,dy = 8x\cdot\frac{1}{2}(1-x^2) = 4x(1-x^2) \end{aligned}$$

Ellers er den marginale tettheten lik null. Vi har altså at

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2) & \text{for } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi ser at $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$. Derfor er X og Y ikke uavhangige.

e) For $0 < v < 1$ er den kumulative fordelingen til $V = X/Y$ gitt ved

$$\begin{aligned}
F_V(v) &= P(V \leq v) = P(X/Y \leq v) = P(X \leq vY) \\
&= \int_0^1 \int_0^{vy} 8xy\, dx dy = 8 \int_0^1 y \left(\int_0^{vy} x\, dx \right) dy = 8 \int_0^1 y \cdot \frac{v^2 y^2}{2}\, dy \\
&= 4v^2 \int_0^1 y^3\, dy = 4v^2 \cdot \frac{1}{4} = v^2
\end{aligned}$$

For $v \leq 0$ er $F_V(v) = 0$, og for $v > 1$ er $F_V(v) = 1$. Sannsynlighetstettheten til V er derfor gitt ved

$$f_V(v) = F_V'(v) = \begin{cases} 2v & \text{for } 0 < v < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Oppgave 3

a) Se Rice (nederst side 44 og øverst på side 45, samt side 46) for begrunnelse for Poisson fordelingen. (En "event" svarer her til forekomsten av en parasitt.)

Vi har at $E(X) = \lambda v$. Forventet antall parasittet per liter er dermed lik $E(X/v) = \lambda$. Det begrunner at λ kan fortolkes som tettheten av parasitten per liter.

b) For $\lambda = 0.20$ og $v = 0.50$ har vi at

$$P(X = 0) = e^{-0.20 \cdot 0.50} = 0.905$$

Sannsynligheten er 90.5% for at vannprøven inneholder ingen parasitter. Videre er

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\
&= 1 - e^{-0.20 \cdot 0.50} - 0.20 \cdot 0.50 \cdot e^{-0.20 \cdot 0.50} \\
&= 1 - 0.905 - 0.090 = 0.005
\end{aligned}$$

Sannsynligheten er 0.5% for at vannprøven inneholder minst to parasitter.

c) Antall prøver N som ikke inneholder parasitter er binomisk fordelt med $p = e^{-0.20 \cdot 0.50} = e^{-0.10}$ og $n = 10$. Vi har at

$$\begin{aligned}
P(N \geq 8) &= P(N = 8) + P(N = 9) + P(N = 10) \\
&= \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} p^k (1 - p)^{10-k} \\
&= 0.183 + 0.387 + 0.368 = 0.938
\end{aligned}$$

Sannsynligheten er 93.8% for at vannkvaliteten vil bli godkjent.

d) La X_i være antall parasitter i prøve nummer i; $i = 1, 2, \ldots, 10$. Da er X_i-ene uavhengige og hver av dem er Poisson fordelt med parameter $\lambda v = 0.20 \cdot 0.50 = 0.10$. Da er antall parasitter i den samlede prøven $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$ Poisson fordelt med parameter $10\lambda v = 1$. Nå er

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= e^{-1} + 1 \cdot e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-1} \\ &= 0.368 + 0.368 + 0.184 = 0.920 \end{aligned}$$

Sannsynligheten er 92.0 % for at vannkvaliteten vil bli godkjent etter de nye kontrollrutinene.