

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering.
Eksamensdag:	Fredag 6. juni 2008.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på	3 sider.
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner og Formelsamling for STK1100 og STK1110.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La T være tiden det tar (i minutter) å betjene en kunde i kassakøen i en butikk. T har kumulativ fordeling

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t^2} & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

- Bestem $P(T \leq 1)$, dvs. sannsynligheten for at det tar høyst ett minutt å betjene en kunde. Hva er sannsynligheten for at det tar mellom ett og to minutter å betjene en kunde?
- Bestem median betjeningstid.
- Finn sannsynlighetstettheten til $U = T^2$. Hvilken kjent fordeling har U ?

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

De stokastiske variablene X og Y har simultan sannsynlighetstetthet

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{for } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

der k er en konstant.

- Vis at $k = 8$.
- Vis at den marginale sannsynlighetstettheten til Y er gitt ved

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & \text{for } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- Finn $E(Y)$ og $\text{Var}(Y)$.
- Finn den marginale sannsynlighetstettheten til X .
Er X og Y uavhengige?
- Finn sannsynlighetstettheten til $V = X/Y$.

Oppgave 3.

Et vannverk tar prøver av drikkevannet for å kontrollere forekomsten av en bestemt parasitt. La X være antall av denne parasitten i en vannprøve på v liter.

- Forklar at det kan være rimelig å anta at X er Poisson fordelt med parameter λv , dvs. at

$$P(X = k) = \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-\lambda v} \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots$$

Forklar også at λ kan fortolkes som tettheten av den aktuelle parasitten per liter vann.

- Anta i dette punktet at tettheten av parasitten er 0.20 per liter vann. Hva er sannsynligheten for at en vannprøve på 1/2 liter ikke inneholder noen parasitter? Hva er sannsynligheten for at den inneholder minst to parasitter?

For å kontrollere vannkvaliteten bruker vannverket følgende framgangsmåte. De tar ti prøver som hver er på 1/2 liter. Hvis åtte eller flere av prøvene ikke inneholder parasitter, godkjennes vannkvaliteten.

Vi antar at når vannverket tar flere prøver, er antall parasitter i en prøve uavhengig av antall parasitter i de andre prøvene.

(Fortsettes side 3.)

- c) Hva er sannsynligheten for at vannkvaliteten blir godkjent hvis tettheten av parasitten er 0.20 per liter vann?

Vannverket planlegger å legge om kontrollrutinene. Ved de nye rutinene tar de fortsatt ti prøver som hver er på 1/2 liter. Men i stedet for å analysere prøvene hver for seg, blander de alle prøvene og teller antall parasitter i den samlede prøven. Vannkvaliteten blir godkjent hvis de finner høyst 2 parasitter i den samlede prøven.

- d) Hva er sannsynligheten for at vannkvaliteten blir godkjent etter de nye kontrollrutinene hvis tettheten av parasitten er 0.20 per liter vann?

SLUTT