Fasit til noen tidligere eksamensoppgaver i ST101 og ST100

ST101 15. mai 1990

Oppgave 1:

a) $1-(1-p)^n$

b) p^n

c) X er antall komponenter som har sviktet. X er binomisk(n,p)-fordelt.

Sannsynlighet for systemsvikt: $P(X \geq m+1) = \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

d) X er tilnærmet Poisson-fordelt med $\lambda = np = 10000 \cdot 0.0001 = 1$.

Sannsynlighet for systemsvikt: $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0.02$

e) X er tilnærmet normalfordelt med forventning $np = 200 \cdot 0.10 = 20$ og standardavvik $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0.10 \cdot 0.90} = 4.24$

Sannsynlighet for systemsvikt: $P(X \geq 31) = 1 - P(X \leq 30) \approx 0.01$

ST101 15. mai 1991

Oppgave 3:

a) $E(X) = \lambda \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

b) antakelse: uavhengighet $\qquad E(Y|X=x) = 0.2x$

d) $P(X=x|Y=y) = [(1-p)\lambda]^{x-y} \cdot e^{-(1-p)\lambda}/(x-y)!$

$X|Y=y \sim y+Z$ der $Z \sim$ Poisson($(1-p)\lambda$)

e) $E(X=x|Y=y) = y + (1-p)\lambda = 107$

ST101 2. desember 1991

Oppgave 1:

a) $E(X) = 1 \qquad \mathrm{Var}(X) = 1/2.$

Oppgave 2:

a) $c = 2$

b)
$$f_R(r) = \begin{cases} 2\,e^{-2r} & r > 0 \\ 0 & r \leq 0 \end{cases}$$

$$f_S(s) = \begin{cases} 2\,e^{-s}\,(1-e^{-s}) & s > 0 \\ 0 & s \leq 0 \end{cases}$$

$$f_{R|S}(r|s) = \begin{cases} e^{-r}/(1-e^{-s}) & 0 < r < s \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

R og S er ikke uavhengige

$E(R) = 1/2 \qquad E(R|S=s) = 1 - se^{-s}/(1-e^{-s})$

c) $$f_Z(z) = \begin{cases} z\,e^{-z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

ST101 13. mai 1992

Oppgave 1:

b) $E(X) = E(Y) = 1/2$ $\quad$ $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1/12$

c) 0.12

d) $0.12^3 = 0.0017$

e) 0.42

f) Forventning: $1/4$ $\quad$ Varians: $7/144 = 0.049$

Oppgave 3:

a) 0.13

b) 0.07

c) 0.16

d) 0.62

e) ca. 30 måneder

ST101 30. november 1992

Oppgave 1:

a) Forventning: $\theta/2$ $\quad$ Varians: $\theta^2/12$

b) Median i eksponentialfordelingen: $\lambda \log 2$
(Merk: Eksponentialfordelingen har en annen parameterisering enn i Rice.)

c) Uniform fordeling: $q_1 = \theta/4$ $\quad$ $q_3 = 3\theta/4$

Normalfordeling: $q_1 = \mu - 0.674\sigma$ $\quad$ $q_3 = \mu + 0.674\sigma$

Eksponentialfordeling: $q_1 = \lambda \log(4/3)$ $\quad$ $q_3 = \lambda \log 4$

d) A

e) Uniform fordeling: C $\quad$ Normalfordeling: B

Oppgave 2:

a) $\frac{18}{37}$ $\quad$ $\left(\frac{19}{37}\right)^5$

d) 0.001 $\quad$ 0.025

e) 0.30 $\quad$ 0.37

f) 0.30

g) 0.48

ST101 12. mai 1993

Oppgave 1:

a) 0.49

b) 0.315 0.350

c) 0.457

d) $1 - \{\, 0.30 \,/\, [\, 0.30 + 0.70 \cdot (0.51^2 + 0.49^2)\,]\, \}^5 = 0.979$

Oppgave 2:

b) $f_Y(y) = 2e^{-y}(1 - e^{-y})$ for $y > 0$

c) $E(X) = 1/2$ $E(Y) = 3/2$

d) $f_T(t) = 2/(2+t)^2$ for $t > 0$

ST101 29. november 1993

Oppgave 1:

a) $0.1035 \approx 0.104$ $0.8965 \approx 0.897$

b) 0.039 $0.99888 \approx 0.999$

c) 0.028

d) Forventet antall med brystkreft: 250

Forventet antall ekte positive: 200

Forventet antall falske positive: 4975

Oppgave 3:

a) Resultatet gjelder for $k > -r$
$E(X) = r/\lambda$ $\mathrm{Var}(X) = r/\lambda^2$

ST101 19. mai 1994

Oppgave 1:

a) 0.964 0.089

b) 0.260 0.250

c) 0.330

d) 0.513

Oppgave 2:

b) Variansen er lik 1 for alle fordelingene

c) C er *(ii)*

d) A er *(i)* B er *(iii)*

Oppgave 3:

b) $$f_Y(y) = \begin{cases} 3/4 & \text{for } 0 \le y \le 1 \\ 1/4 & \text{for } 1 < y \le 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

X og Y er ikke uavhengige.

ST101 18. mai 1995

Oppgave 1:

a) $1/13 \qquad 1/13 \qquad 3/663 = 0.0045 \qquad 48/663 = 0.072$

b) A og B er ikke uavhengige

c) $P(X = -1) = 660/663 = 0.9955 \qquad P(X = 200) = 3/663 = 0.0045$

$E(X) = -60/663 = -0.090 \qquad \mathrm{Var}(X) = 1095.7$

d) $P(Y = -15) = 48/663 = 0.0724$

$P(Y = 0) = 12/13 = 0.9231$

$P(X = 200) = 3/663 = 0.0045$

$E(X) = -120/663 = -0.181$

e) Det første spillet er mest fordelaktig (selv om det også gir forventet tap i det lange løp).

Oppgave 2:

a) $(5/6)^{600} \qquad \binom{600}{100}(1/6)^{100}(5/6)^{500}$

b) $E(X) = 100 \qquad \mathrm{Var}(X) = 83.33 \qquad SD(X) = 9.13$

c) 0.73

d) $a = 15$

Oppgave 3:

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1 - x^{-1/\lambda} & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$

c) 10^{-4}

d) 2^{λ}

e) $1/(1 - \lambda)$

f) $\lambda^2 / [(1-\lambda)^2(1-2\lambda)]$

g) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{-y/2} & \text{for } y \geq 0 \\ 0 & \text{for } y < 0 \end{cases}$

Eksponentialfordelingen med parameter 1/2.

ST101 21. november 1997

Oppgave 1:

a) $c = \frac{1}{2}$

b) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & \text{for } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$

c) 0.748

d) $E(X) = 0 \quad \mathrm{Var}(X) = 2$

ST101 24. november 1999

Oppgave 1:

a) 0.80 0.89

b) $Z \sim N(252, 46.4^2)$

e) 7.2 5.5

Oppgave 2:

a) 0.849 0.130

e) 2530 kroner

Oppgave 3a-c:

c) $N \sim \text{binomisk}(n, p)$ der $p = 2/\pi$

ST101 23. november 2000

Oppgave 1:

a) $E(S_n) = n\mu$ $SD(S_n) = \sqrt{n}\sigma$

b) Uniform fordeling over (0,2). $\mu = 1$ $\sigma = 1/\sqrt{3} = 0.58$

c) $\mu = 1$ $\sigma = 1$ Eksponentialfordelingen med parameter 1.

d) Gammafordelingen med $\alpha = 2$ og $\lambda = 2$. $\mu = 1$ $\sigma = 1/\sqrt{2} = 0.71$

e) A er gammafordelingen (4)
B er den uniforme fordelingen (2)
C er den eksponentialfordelingen (3)

f) Nei

Oppgave 2:

c) 0.027 0.027 0.168 0.168

d) $$f_U(u) = \frac{1}{u\sigma\sqrt{2n\pi}} \exp\left(\frac{-(\log u)^2}{2n\sigma^2}\right)$$

f) 1.07 1.30 median = 1 (for begge valg av sigma)

ST101 3. desember 2001

Oppgave 1:

a) Forventning: $\theta/2$ Varians: $\theta^2/12$

b) Medianen q_2 er gitt ved $\int_{-\infty}^{q_2} f(x)dx = 1/2$
For eksponensialfordelingen: $q_2 = \log 2/\lambda$

c) Uniform fordeling: $q_1 = \theta/4$ $q_3 = 3\theta/4$
Normalfordeling: $q_1 = \mu - 0.674\sigma$ $q_3 = 3\mu + 0.674\sigma$
Eksponensialfordelingen: $q_1 = (\log 4 - \log 3)/\lambda$ $q_3 = \log 4/\lambda$

d) A

e) Uniform: C Normal: B

Oppgave 2:

a) Forventet antall fødsler pr. døgn: $\lambda = 6$

Minst ett barn i løpet av ett døgn: $1 - e^{-\lambda} = 0.998$

Flere enn ett barn i løpet av en time: $1 - e^{-\lambda/24} - \frac{\lambda/24}{1!} e^{-\lambda/24} = 0.026$

b) $$f_T(t) = \begin{cases} (\lambda/24)\, e^{-\lambda t/24} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$E(T) = 24/\lambda = 4$

c) $P(T > 4) = e^{-\lambda \cdot 4/24} = e^{-6 \cdot 4/24} = 0.368 \qquad P(T > 8 | T > 4) = 0.368$

ST100 2. desember 2002

Oppgave 1:

b) $\lambda_1 = \log 2/\tau_1 \quad E(T_1) = 1/\lambda_1 = \tau_1/\log 2 \quad \mathrm{Var}(T_1) = 1/\lambda_1^2 = (\tau_1/\log 2)^2$

c) $E(T) = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 = (\tau_1 + \tau_2)/\log 2$

$\mathrm{Var}(T) = 1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2 = (\tau_1^2 + \tau_2^2)/(\log 2)^2$

d) Hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2$ blir tetthetsfunksjonen:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(Se eksempel A på side 98 i Rice for situasjonen der $\lambda_1 = \lambda_2$.)

e) Binomisk med $p = P(T \leq t_0) = 1 - (\lambda_2 e^{-\lambda_1 t_0} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t_0})/(\lambda_2 - \lambda_1)$

Oppgave 2:

a) $E(X_i) = 0 \quad \mathrm{Var}(X_i) = 1 \quad E(\bar{X}) = 0 \quad \mathrm{Var}(\bar{X}) = 1/n$

b) $M_{X_i}(t) = (e^{-t} + e^t)/2 \quad M_{\bar{X}}(t) = (e^{-t/n} + e^{t/n})^n / 2^n$

c) Vi bruker sentralgrensesetningen og finner at:

$P(\bar{X} > 0.2) \approx 0.023 \quad P(\bar{X} < -0.3 \text{ eller } \bar{X} > 0.1) \approx 0.160$

e) For $k = 0, 1, 2, 3$ er $P(\bar{X} = \frac{2}{3}k - 1) = P(U = k) = \binom{3}{k} \cdot (\frac{1}{2})^3$, slik at:

$P(\bar{X} = -1) = \frac{1}{8} \quad P(\bar{X} = -\frac{1}{3}) = \frac{3}{8} \quad P(\bar{X} = \frac{1}{3}) = \frac{3}{8} \quad P(\bar{X} = 1) = \frac{1}{8}$

ST100 9. desember 2003

Oppgave 1:

b) 2/3

c) 4/5 8/9

Oppgave 2:

a) $(1 - p + pe^t)^n$

d) 0.3675 0.3682 0.1841 0.0613 0.0153

e) 0.3679 0.3679 0.1839 0.0613 0.0153