UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering
Eksamensdag:	Mandag 14. mars 2016
Tid for eksamen:	15.00 – 17.00
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Normalfordelingstabell
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner og Formelsamling for STK1100 og STK1110

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

I dette oppgavesettet er det 15 oppgaver med 5 mulige svar på hver oppgave. Hvor mange forskjellige kombinasjoner av svar kan man da få?

A: 25 B: 100 C: 5 D: 15 E: 75
Løsning: $5^{15} = 3.05 * 10^{10}$

Oppgave 2

Hvis de 15 riktige svarene er tilfeldig fordelt utover de 5 mulige alternativene (slik at hvert alternativ har lik sannsynlighet), hva er sannsynligheten for at det er 5 spørsmål som har A som riktig svar?

A: 0.200 B: 0.188 C: 0.939 D: 0.103 E: 0.804
Løsning: La X være antall oppgaver som har A som riktig svar. Da er X binomisk fordelt med suksess-sannsynlighet $p = 0.2$. Dermed blir

$$p(5) = \binom{15}{5} 0.2^5 0.8^{10} = 0.103$$

Oppgave 3

I en eske er det 5 blå kuler, 6 røde kuler og 4 gule kuler. Du trekker tilfeldig to kuler. Hva er sannsynligheten for at de to kulene har samme farge?

A: 0.085 B: 0.175 C: 0.296 D: 0.105 E: 0.090
Løsning: Sannsynligheten for to like kuler er

$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{15}{2}} = 0.0952 + 0.1428 + 0.0571 = 0.296$$

Evt 0.295, litt avhengig av avrunding

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4

I en kortstokk er det 26 røde og 26 sorte kort. Anta kortene er tilfeldig blandet. Du trekker 3 kort etter hverandre ut av bunken uten tilbakelegging. Hvis det første kortet er rødt, hva er sannsynligheten for at det tredje kortet er rødt?

A: $\frac{26}{52}$ B: $\frac{25}{51}$ C: $\frac{25}{50}$ D: $\frac{24}{50}$ E: $\frac{26}{50}$

Løsning: Her er

$$\begin{aligned} P(\text{rødt i 3.}|\text{rødt i 1.}) =& P(\text{rødt i 3. og rødt i 2.}|\text{rødt i 1.})+ \\ & P(\text{rødt i 3. og sort i 2.}|\text{rødt i 1.}) \\ =& \frac{25}{51}\frac{24}{50} + \frac{26}{51}\frac{25}{50} \\ =& \frac{25*50}{51*50} = \frac{25}{51} \end{aligned}$$

Oppgave 5

En ukjent person har etterlatt seg et blodspor på et åsted. En person blir sett i nærheten og blir hentet inn for å foreta en blodprøve. Anta sannsynligheten for at personen har en matchende blodprøve er

- 1 hvis personen er bidragsyter til blodsporet
- $\frac{1}{1000}$ hvis personen ikke er bidragsyter til blodsporet

Anta at før man tar hensyn til blodprøven, så er sannsynligheten for at denne personen er bidragsyter til blodsporet lik $\frac{1}{101}$.
Hvis personen det ble tatt blodprøve av har matchende blodprøve, hva er da sannsynligheten for at personen er bidragsyter til blodsporet?

A: $\frac{9}{10}$ B: $\frac{10}{11}$ C: $\frac{1}{101}$ D: $\frac{100}{101}$ E: $\frac{1}{11}$

Løsning: La A = Match og B = Bidragsyter. Da er

$$\begin{aligned} P(B|A) \overset{\text{Bayes}}{=} & \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B')P(A|')} \\ =& \frac{\frac{1}{101}*1}{\frac{1}{101}*1+\frac{100}{101}*\frac{1}{1000}} \\ =& \frac{1}{1+\frac{1}{10}} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

Oppgave 6

Anta X er en diskret stokastisk variabel med punktsannsynligheter

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.30	0.10	0.20	0.10	0.30

Da er variansen til X lik

A: 3.0 B: 4.0 C: 2.6 D: 1.5 E: 2.8

Løsning: Pga symmetri er $E(X) = 3$. Dermed blir

$$\begin{aligned} V(X) =& 0.3*(1-3)^2 + 0.1*(2-3)^2 + 0.2*(3-3)^2 + 0.1*(4-3)^2 + 0.3*(5-3)^2 \\ =& 2.6 \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7

For den stokastiske variabelen i forrige oppgave, hva er $E(\exp(X))$?

A: 55.55 B: 66.66 C: 44.44 D: 77.77 E: 33.33

Løsning:

$$\begin{aligned} E(\exp(X)) =& 0.3 * \exp(1) + 0.1 * \exp(2) + 0.2 * \exp(3) + 0.1 * \exp(4) + 0.3 * \exp(5) \\ =& 55.55 \end{aligned}$$

Oppgave 8

La X være lengden (i cm) til en tilfeldig valgt torsk fanget opp av en fiskeskøyte. La $Y = \ln(X)$. Anta Y er normalfordelt med forventing 4.2 og varians 0.25. Hva er sannsynligheten for at lengden ligger mellom 54.6 og 81.5 cm?

A: 0.00 B: 0.22 C: 0.11 D: 0.31 E: 0.15

Løsning: Merk at standard avviket er 0.5.

$$\begin{aligned} P(54.6 \leq X \leq 81.5) =& P(\ln(54.5) \leq Y \leq \ln(81.5) \\ =& P(\ln(54.5) \leq Y \leq \ln(81.5) \\ =& P(4.0 \leq Y \leq 4.4) \\ =& P(\tfrac{4.0-4.2}{0.5} \leq \tfrac{Y-4.2}{0.5} \leq \tfrac{4.4-4.2}{0.5}) \\ =& P(-0.4 \leq Z \leq 0.4) \\ =& \Phi(0.4) - \Phi(-0.4) = 0.6554 - 0.3446 = 0.3108 \end{aligned}$$

der Z er en standard normalfordelt variabel.

Oppgave 9

Anta X er en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}x(1-x) & 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Da må k være lik

A: $\frac{1}{3}$ B: $\frac{1}{6}$ C: $\frac{1}{2}$ D: $\frac{5}{6}$ E: $\frac{1}{4}$

Løsning: Vi har at

$$\int_0^1 x(1-x)dx = [\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}$$

For at det skal bli en lovlig tetthet, må da $k = \frac{1}{6}$.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10

Anta X er en kontinuerlig stokastisk variabel med kumulativ fordelingsfunksjon

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\lambda x} & 0 \leq x \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Da er sannsynlighetstettheten til $Y = \ln(X)$ lik

A: $\lambda^2 e^{-\lambda e^y}$ B: $\lambda e^y e^{-\lambda e^y}$ C: $\lambda^2 e^y e^{-\lambda e^y}$

D: $1 - \lambda e^{-\lambda e^y}$ E: $\lambda^2 e^y$

Løsning: Vi har at

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln(X) \leq y) = P(X \leq e^y) = 1 - \lambda e^{-\lambda e^y}$$

Dermed blir

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = 0 - \lambda e^{-\lambda e^y}(-\lambda e^y) = \lambda^2 e^{-\lambda e^y} e^y$$

Oppgave 11

Anta X er en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{e^a - 1} e^{ax} & 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Da er den momentgenererende funksjonen til X lik

A: $\frac{a}{a-t} \frac{e^a - 1}{e^{a+t} - 1}$ B: $\frac{a}{a+t} \frac{e^{2a+t} - 1}{e^a - 1}$ C: $\frac{a}{a+t} \frac{e^{a+t} - 1}{e^a - 1}$

D: $\frac{e^{a+t} - 1}{e^a - 1}$ E: $\frac{a}{a+t} \frac{e^{a+t} - 1}{e^{at} - 1}$

Løsning:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^1 e^{tx} \frac{a}{e^a - 1} e^{ax} dx \\ &= \frac{a}{e^a - 1} \int_0^1 e^{(a+t)x} dx = \frac{a}{e^a - 1} [\frac{1}{a+t} e^{(a+t)x}]_0^1 \\ &= \frac{a}{e^a - 1} [\frac{1}{a+t} e^{(a+t)} - \frac{1}{a+t}] = \frac{a}{a+t} \frac{e^{a+t} - 1}{e^a - 1} \end{aligned}$$

Oppgave 12

La X og Y være to diskrete stokastiske variable med simultan punktsannsynlighet gitt ved

$p(x,y)$		y = 1	2	3	4
x	1	0.06	0.04	0.04	0.02
	2	0.05	0.03	0.20	0.06
	3	0.01	0.05	0.14	0.30

(Fortsettes på side 5.)

Da er $P((X+Y)>3)$ lik

A: 0.30 B: 0.38 C: 0.94 D: 0.10 E: 0.85

Løsning:

$$\begin{aligned}P((X+Y)>3) =&1-P((X+Y)\leq 3)\\ =&1-[p(1,1)+p(1,2)+p(2,1)]\\ =&1-0.15=0.85\end{aligned}$$

Oppgave 13

Betrakt igjen den simultane punktsannsynligheten i forrige oppgave. Da er $E(X+Y)$ lik

A: 5.36 B: 4.50 C: 2.34 D: 3.02 E: 6.24

Løsning: Vi har først at $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$. Videre er

$$\begin{aligned}E(X) =&1*0.16+2*0.34+3*0.50=2.34\\ E(Y) =&1*0.12+2*0.12+3*0.38+4*0.38=3.02\end{aligned}$$

Dermed blir $E(X+Y)=5.36$.

Oppgave 14

Anta X og Y er to kontinuerlige stokastiske variable med simultan sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(1+y)} & x\geq 0 \text{ og } y\geq 0\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}$$

Hva er sannsynligheten for at $X>3$?

A: 0.025 B: 0.210 C: 0.105 D: 0.950 E: 0.050

Løsning: Vi har at

$$\begin{aligned}f_X(x) =&\int_0^\infty xe^{-x(1+y)}dy = xe^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}dy\\ =&xe^{-x}[-\tfrac{1}{x}e^{-xy}]_0^\infty = xe^{-x}\tfrac{1}{x}=e^{-x}\end{aligned}$$

som gir at

$$P(X>3)=\int_3^\infty e^{-x}dx=[-e^{-x}]_3^\infty=e^{-3}=0.050$$

Oppgave 15

Anta n uavhengige forsøk der hvert forsøk har r mulige utfall, med sannsynlighet for utfall nr i gitt ved p_i. Dette svarer til punktsannsynlighetsfunksjonen gitt ved

$$p(x_1,...,x_r)=\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_n^{x_n}$$

(Fortsettes på side 6.)

La $R_{12} = (X_1 + X_2)/n$ være andelen av forsøk som gir utfall 1 eller 2. Da er variansen til R_{12}, $V(R_{12})$ gitt ved

A: $(p_1 + p_2)(1 - p_1 - p_2)/n^2$ B: $(p_1 + p_2)/n$

C: $np_1(1 - p_1) + np_2(1 - p_2)$ D: $p_1(1 - p_1)/n + p_2(1 - p_2)/n$

E: $(p_1 + p_2)(1 - p_1 - p_2)/n$

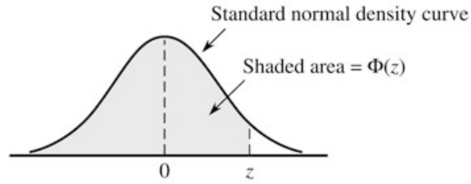
Løsning: (Utfordringsoppgave) Her kan man få løsningen rimelig direkte ved å tenke kreativt. Definer Y til å være antall forsøk med enten utfall 1 eller 2, slik at $Y = X_1 + X_2$. Da er Y binomisk fordelt med suksess sannsynlighet $p_Y = p_1 + p_2$. Dermed blir variansen til Y lik $np_Y(1 - p_Y)$ og variansen til Y/n blir $p_Y(1 - p_Y)/n$ som svarer til alternativ E.

SLUTT

(Fortsettes på side 7.)

Standard Normal Curve Areas

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3482
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

(*continued*)

(Fortsettes på side 8.)

Standard Normal Curve Areas (cont.)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998