

# FORMELSAMLING TIL STK1100 OG STK1110

(Versjon av 6. mai 2019)

## 1. Sannsynlighet

La  $A, B, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$  være begivenheter, dvs. delmengder av et utfallsrom  $\mathcal{S}$

a) Aksiomene:

Et sannsynlighetsmål  $P$  er en funksjon fra delmengder av utfallsrommet  $\mathcal{S}$  til de reelle tall som tilfredsstill

$$P(A) \geq 0$$

$$P(\mathcal{S}) = 1$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{hvis } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ for } i \neq j$$

b)  $P(\emptyset) = 0$

c)  $P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i)$  hvis  $A_i \cap A_j = \emptyset$  for  $i \neq j$

d)  $P(A) = 1 - P(A')$

e)  $P(A) \leq 1$

e)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

f) Betinget sannsynlighet:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{hvis } P(B) > 0$$

g) Total sannsynlighet:

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A|B_i)P(B_i) \quad \text{hvis } \bigcup_{i=1}^k B_i = \mathcal{S} \text{ og } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ for } i \neq j$$

h) Bayes' setning:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^k P(A|B_i)P(B_i)} \quad \text{under samme betingelser som i g)}$$

i)  $A$  og  $B$  er uavhengige begivenheter hvis  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

j)  $A_1, \dots, A_n$  er uavhengige begivenheter dersom

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

for alle delmengder av indekser  $i_1, i_2, \dots, i_k$

k) Produktsetningen:

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

## 2. Kombinatorikk

- To operasjoner som kan gjøres på henholdsvis  $n$  og  $m$  måter kan kombineres på  $n \cdot m$  måter.
- Antall ordnete utvalg med tilbakelegging av  $r$  elementer fra en mengde med  $n$  elementer er  $n^r$
- Antall ordnete utvalg uten tilbakelegging av  $r$  elementer fra en mengde med  $n$  elementer er  $n(n-1) \cdots (n-r+1)$
- Antall måter  $n$  elementer kan ordnes i rekkefølge på (permuteres) er  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$
- Antall ikke-ordete utvalg av  $r$  elementer fra en mengde med  $n$  elementer er

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

## 3. Sannsynlighetsfordelinger

- For en stokastisk variabel  $X$  (diskret eller kontinuerlig) er den kumulative fordelingsfunksjonen  $F(x) = P(X \leq x)$
- For en diskret stokastisk variabel  $X$  som kan anta verdiene  $x_1, x_2, x_3, \dots$  har vi

$$\begin{aligned} p(x_j) &= P(X = x_j) \\ F(x) &= \sum_{x_j \leq x} p(x_j) \end{aligned}$$

Betingelsene for at  $p(x_j)$  skal være en punktsannsynlighet er

$$\begin{aligned} p(x_j) &\geq 0 \quad \text{for alle } j \\ \sum_j p(x_j) &= 1 \end{aligned}$$

- For en kontinuerlig stokastisk variabel  $X$  har vi

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= \int_a^b f(x) dx \\ F(x) &= \int_{-\infty}^x f(u) du \\ f(x) &= F'(x) \end{aligned}$$

Betingelsene for at  $f(x)$  skal være en sannsynlighetstetthet er

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- d) For to stokastiske variabler  $X$  og  $Y$  (diskrete eller kontinuerlige) er den simultane kumulative fordelingsfunksjonen  $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
- e) For diskrete stokastiske variabler  $X$  og  $Y$  som kan anta henholdsvis verdiene  $x_1, x_2, \dots$  og  $y_1, y_2, \dots$  har vi

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p(x_i, y_j)$$

Betingelsene for at  $p(x_i, y_j)$  skal være en simultan punktsannsynlighet er analoge til betingelsene i b)

- f) For kontinuerlige stokastiske variabler  $X$  og  $Y$  har vi

$$P((X, Y) \in A) = \int \int_A f(u, v)dvdu$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v)dvdu$$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Betingelsene for at  $f(x, y)$  skal være en simultan sannsynlighetstetthet er analoge til betingelsene i c)

- g) Marginale punktsannsynligheter:

$$p_X(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j) \quad (\text{for } X)$$

$$p_Y(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j) \quad (\text{for } Y)$$

- h) Marginale sannsynlighetstettheter:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \quad (\text{for } X)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx \quad (\text{for } Y)$$

i) Uavhengighet:

De stokastiske variablene  $X$  og  $Y$  er uavhengige dersom

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j) \quad (\text{diskret})$$

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (\text{kontinuerlig})$$

j) Betingete punktsannsynligheter:

$$p_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)} \quad (\text{for } X \text{ gitt } Y = y_j)$$

$$p_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_X(x_i)} \quad (\text{for } Y \text{ gitt } X = x_i)$$

Det forutsettes at  $p_Y(y_j) > 0$  og  $p_X(x_i) > 0$ , henholdsvis. De betingete punktsannsynlighetene kan behandles som vanlige punktsannsynligheter.

k) Betingete sannsynlighetstettheter:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (\text{for } X \text{ gitt } Y = y)$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad (\text{for } Y \text{ gitt } X = x)$$

Det forutsettes at  $f_Y(y) > 0$  og  $f_X(x) > 0$ , henholdsvis. De betingete sannsynlighetstetthetene kan behandles som vanlige sannsynlighetstettheter.

## 4. Forventning

a) Forventningsverdien til en stokastisk variabel  $X$  er definert ved

$$E(X) = \sum_j x_j p(x_j) \quad (\text{diskret})$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{kontinuerlig})$$

b) For en reell funksjon  $g(X)$  av en stokastisk variabel  $X$  er

$$E[g(X)] = \sum_j g(x_j) p(x_j) \quad (\text{diskret})$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (\text{kontinuerlig})$$

c)  $E(a + bX) = a + bE(X)$

d) For en reell funksjon  $g(X, Y)$  av to stokastiske variabler  $X$  og  $Y$  er

$$E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p(x_i, y_j) \quad (\text{diskret})$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dy dx \quad (\text{kontinuerlig})$$

e) Hvis  $X$  og  $Y$  er uavhengige er  $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$

f) Hvis  $X$  og  $Y$  er uavhengige er  $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

g)  $E\left(a + \sum_{i=1}^n b_i X_i\right) = a + \sum_{i=1}^n b_i E(X_i)$

h) Betinget forventning:

$$E(Y|X = x_i) = \sum_j y_j p_{Y|X}(y_j|x_i) \quad (\text{diskret})$$

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy \quad (\text{kontinuerlig})$$

## 5. Varians og standardavvik

a) Variansen og standardavviket til en stokastisk variabel  $X$  er definert ved

$$V(X) = E[(X - \mu)^2]$$

$$sd(X) = \sqrt{V(X)}$$

b)  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

c)  $V(a + bX) = b^2 V(X)$

d) Hvis  $X_1, \dots, X_n$  er uavhengige har vi

$$V\left(a + \sum_{i=1}^n b_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n b_i^2 V(X_i)$$

e)

$$V\left(a + \sum_{i=1}^n b_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n b_i^2 V(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} b_i b_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

f) Chebyshevs ulikhet:

La  $X$  være en stokastisk variabel med  $\mu = E(X)$  og  $\sigma^2 = V(X)$ .

For alle  $k > 0$  har vi

$$P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

## 6. Kovarians og korrelasjon

- a) La  $X$  og  $Y$  være stokastiske variabler med  $\mu_X = E(X)$ ,  $\sigma_X^2 = V(X)$ ,  $\mu_Y = E(Y)$  og  $\sigma_Y^2 = V(Y)$ . Da er kovariansen og korrelasjonen til  $X$  og  $Y$  definert ved

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ \rho = \text{Corr}(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\end{aligned}$$

- b)  $\text{Cov}(X, X) = V(X)$   
c)  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$   
d)  $X, Y$  uavhengige  $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$   
e)

$$\text{Cov}\left(a + \sum_{i=1}^n b_i X_i, c + \sum_{j=1}^m d_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_i d_j \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

- f)  $-1 \leq \text{Corr}(X, Y) \leq 1$  og  $\text{Corr}(X, Y) = \pm 1$  hvis og bare hvis det finnes to tall  $a, b$  slik at  $Y = a + bX$  (bortsett, eventuelt, på et område med sannsynlighet 0)

## 7. Momentgenererende funksjoner

- a) For en stokastisk variabel  $X$  (diskret eller kontinuerlig) er den momentgenererende funksjonen  $M_X(t) = E(e^{tX})$   
b) Hvis den momentgenererende funksjonen  $M_X(t)$  eksisterer for  $t$  i et åpent intervall som inneholder null, så bestemmer den entydig fordelingen til  $X$   
c) Hvis den momentgenererende funksjonen  $M_X(t)$  eksisterer for  $t$  i et åpent intervall som inneholder null, så eksisterer alle momenter til  $X$ , og vi kan finne det  $r$ -te momentet ved  $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$   
d)  $M_{a+bX}(t) = e^{at} M_X(bt)$   
e) Hvis  $X$  og  $Y$  er uavhengige er  $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$

## 8. Noen diskrete sannsynlighetsfordelinger

- a) Binomisk fordeling:

Punktsannsynlighet:  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$

Momentgenererende funksjon:  $M_X(t) = (1-p + pe^t)^n$

Forventning:  $E(X) = np$

Varians :  $V(X) = np(1 - p)$

Tilnærmelse 1:  $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}}$  er tilnærmet standard normalfordelt  
når  $np$  og  $n(1 - p)$  begge er tilstrekkelig store (minst 10)

Tilnærmelse 2:  $X$  er tilnærmet Poisson fordelt med parameter  $\lambda = np$   
når  $n$  er stor og  $p$  er liten

Addisjonsregel:  $X \sim \text{binomisk}(n, p)$ ,  $Y \sim \text{binomisk}(m, p)$   
og  $X, Y$  uavhengige  $\Rightarrow X + Y \sim \text{binomisk}(n + m, p)$

b) Geometrisk fordeling:

Punktsannsynlighet:  $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$   $k = 1, 2, \dots$

Momentgenererende funksjon :  $M_X(t) = e^t p / [1 - (1 - p)e^t]$

Forventning:  $E(X) = 1/p$

Varians:  $V(x) = (1 - p)/p^2$

Addisjonsregel: Hvis  $X$  er geometrisk fordelt med sannsynlighet  $p$  så er  
 $X - 1$  negativt binomisk  $(1, p)$ . Derfor hvis  $X$  og  $Y$  er  
geometrisk fordelte med samme  $p$  og uavhengige så er  
 $X + Y - 2$  negativt binomisk  $(2, p)$

c) Negativ binomisk fordeling:

Punktsannsynlighet:  $P(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1 - p)^k$   $k = 0, 1, 2, \dots$

Momentgenererende funksjon :  $M_X(t) = \{p/[1 - (1 - p)e^t]\}^r$

Forventning:  $E(X) = r(1 - p)/p$

Varians:  $V(X) = r(1 - p)/p^2$

Addisjonsregel:  $X \sim \text{negativ binomisk}(r_1, p)$ ,  
 $Y \sim \text{negativt binomisk}(r_2, p)$   
og  $X, Y$  uavhengige  
 $\Rightarrow X + Y \sim \text{negativt binomisk}(r_1 + r_2, p)$

d) Hypergeometrisk fordeling:

Punktsannsynlighet:  $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Forventning:  $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$

Varians:  $V(X) = n \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N}) \frac{N-n}{N-1}$

Tilnærmelse:  $X$  er tilnærmet binomisk  $(n, \frac{M}{N})$  når  $n$  er mye mindre enn  $N$

e) Poisson fordelingen:

Punktsannsynlighet:  $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, \dots$

Momentgenererende funksjon :  $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Forventning:  $E(X) = \lambda$

Varians:  $V(X) = \lambda$

Tilnærmelse:  $Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$  er tilnærmet standard normalfordelt  
når  $\lambda$  er tilstrekkelig stor (minst 10)

Addisjonsregel:  $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1), \quad Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$   
og  $X, Y$  uavhengige  $\Rightarrow X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$

e) Multinomisk fordeling:

Punktsannsynlighet:  $P(N_1 = n_1, \dots, N_r = n_r) = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$

Her er  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$  og  $\sum_{i=1}^r n_i = n$

Marginalfordeling:  $N_i \sim \text{binomisk}(n, p_i)$

## 9. Noen kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

a) Normalfordelingen:

Tetthet:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < \infty$

Momentgenererende funksjon :  $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$

Forventning:  $E(X) = \mu$

Varians:  $V(X) = \sigma^2$

Transformasjon:  $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$   
 $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Addisjonsregel:  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2), \quad X, Y$  uavhengige  
 $\Rightarrow X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

b) Eksponentialfordelingen:

Tetthet:  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$

Momentgenererende funksjon :  $M_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$  for  $t < \lambda$

Forventning:  $E(X) = 1/\lambda$

Varians:  $V(X) = 1/\lambda^2$

Addisjonsregel:  $X \sim \exp(\lambda), \quad Y \sim \exp(\lambda), \quad X$  og  $Y$  uavhengige  
 $\Rightarrow X + Y \sim \text{gamma}(2, 1/\lambda)$



c) Gammafordelingen:

Tetthet:  $f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \quad x > 0$

Gammafunksjonen:  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$   
 $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$   
 $\Gamma(n) = (n - 1)!$  når  $n$  er et helt tall  
 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1$

Momentgenererende funksjon :  $M_X(t) = [1/(1 - \beta t)]^\alpha$

Forventning:  $E(X) = \alpha\beta$

Varians:  $V(X) = \alpha\beta^2$

Addisjonsregel:  $X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta), \quad Y \sim \text{gamma}(\delta, \beta),$   
 $X$  og  $Y$  uavhengige  $\Rightarrow X + Y \sim \text{gamma}(\alpha + \delta, \beta)$

d) Kji-kvadratfordelingen:

Tetthet:  $f(v) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} v^{(n/2)-1} e^{-v/2} \quad v > 0$   
 $n$  er antall frihetsgrader

Forventning:  $E(V) = n$

Varians:  $V(V) = 2n$

Addisjonsregel:  $U \sim \chi_n^2, \quad V \sim \chi_m^2, \quad U$  og  $V$  uavhengige  
 $\Rightarrow U + V \sim \chi_{n+m}^2$

Resultat:  $Z \sim N(0, 1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi_1^2$

e) Binormal fordeling:

Tetthet:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \right] \right\}$$

Marginalfordeling:  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Korrelasjon:  $\text{Corr}(X, Y) = \rho$

Betinget fordeling: Gitt  $X = x$  er  $Y$  normalfordelt med  
forventning  $E(Y|X = x) = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$   
og varians  $V(Y|X = x) = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2)$

## 10. Transformasjoner av kontinuerlige stokatiske variabler

a) Anta at  $X$  har sannsynlighetstetthet  $f(x)$  og la  $Y = u(X)$ , der  $u$  er deriverbar og strengt monoton (vosende eller avtagende). La  $v$  være den inverse funksjonen til  $u$ , slik at  $X = v(Y)$ . Da er sannsynlighetstettheten til  $Y$  gitt ved

$$g(y) = f(v(y))|v'(y)|$$

b) Anta at  $(X_1, X_2)$  har simultantetthet  $f(x_1, x_2)$ . La

$$(Y_1, Y_2) = [u_1(X_1, X_2), u_2(X_1, X_2)]$$

være en en-entydig transformasjon av  $X_i$ -ene, og uttrykk  $X_i$ -ene ved  $Y_i$ -ene som

$$(X_1, X_2) = [v_1(Y_1, Y_2), v_2(Y_1, Y_2)]$$

Da er den simultane tettheten til  $(Y_1, Y_2)$  gitt ved

$$g(y_1, y_2) = f(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right|$$

der

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2}$$

er Jacobi-determinanten