Løsninger av utvalgte oppgaver for uke 13

Oppgave 5.24

Vi har X og Y som er stokastiske variabler med en diskret simultanfordeling $p(x, y)$ gitt i en tabell.

a) Forventet total score finnes som

$$E(X+Y) = \sum_x \sum_y (x+y) \cdot p(x,y) = (0+0) \cdot 0.02 + (0+5) \cdot 0.06 + \cdots + (10+15) \cdot 0.01 = 14.10$$

b) Forventet maksimum score finnes som

$$E(\max(X,Y)) = \sum_x \sum_y \max(x,y) \cdot p(x,y) = 0 \cdot 0.02 + 5 \cdot 0.06 + \cdots + 15 \cdot 0.01 = 9.60$$

Oppgave 5.32

Vi har X og Y og simultanfordeling $p(x, y)$ gitt i en tabell i oppg. 5.18

a) Vi bruker $Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$. Trenger derfor marginalfordelingene for X og Y, funnet ved

$$p_X(x) = \sum_y p(x,y) \quad \text{og} \quad p_Y(y) = \sum_x p(x,y)$$

og deretter

$$E(X) = \sum_x x \cdot p_X(x) = 0 \cdot 0.20 + 5 \cdot 0.49 + 10 \cdot 0.31 = 5.55$$

og

$$E(Y) = \sum_y y \cdot p_Y(y) = 0 \cdot 0.07 + 5 \cdot 0.36 + 10 \cdot 0.36 + 15 \cdot 0.21 = 8.55.$$

Deretter beregner vi

$$E(X \cdot Y) = \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot p(x,y) = (0 \cdot 0) \cdot 0.02 + (0 \cdot 5) \cdot 0.06 + \cdots + (10 \cdot 15) \cdot 0.01 = 44.25$$

og finner endelig $Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 44.25 - 5.55 \cdot 8.55 = -3.20$.

b) Korrelasjonen finner vi som

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

der $\sigma_X^2 = \sum_x x^2 \cdot p_X(x) - E(X)^2 = 12.45$ og $\sigma_Y^2 = \sum_y y^2 \cdot p_Y(y) - E(Y)^2 = 19.15$, slik at

$$\rho = \frac{-3.20}{\sqrt{(12.45)} \cdot \sqrt{(19.15)}} = -0.207.$$