Løsninger av utvalgte oppgaver for uke 7

Oppgave 3.28

a) Vi har fått oppgitt en tabell med punktsannsynligheter for X. Finner forventningen

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{4} x \cdot p(x) = 0 \cdot 0.08 + 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.45 + 3 \cdot 0.27 + 4 \cdot 0.05 = 2.06$$

b) Bruker definisjonen for å finne variansen

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{x=0}^{4} (x-\mu)^2 \cdot p(x) = (0-2.06)^2 \cdot 0.08 + \cdots + (4-2.06)^2 \cdot 0.05 = 0.9364$$

c) Standardavviket finner vi som $sd(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.9364} = 0.9677$

d) Short-cut-formelen er $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Vi har allerede $E(X)$, så vi må bare finne $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{4} x^2 \cdot p(x) = 0^2 \cdot 0.08 + 1^2 \cdot 0.15 + 2^2 \cdot 0.45 + 3^2 \cdot 0.27 + 4^2 \cdot 0.05 = 5.18$$

Setter inn i formelen og får

$$V(X) = 5.18 - 2.06^2 = 0.9364$$

Oppgave 3.36

Vi har nå en X med punktsannsynligheter

$$p(x) = 1/n \text{ for } x = 1, 2, ..., n$$

og $p(x) = 0$ ellers. Dette er en diskret uniform fordeling. Finner forventningen ved

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x$$

og bruker hintet til å finne summen til høyre som $n(n+1)/2$. Dermed får vi

$$\mu = E(X) = \frac{1}{n} \cdot n(n+1)/2 = \frac{n+1}{2}.$$

Short-cut-formelen gir variansen som $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Vi har allerede $E(X)$, så vi må bare finne $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x^2.$$

Fra hint nummer to har vi at den siste summen blir $n(n+1)(2n+1)/6$, slik at

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \cdot n(n+1)(2n+1)/6 = (n+1)(2n+1)/6.$$

Fra formelen $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ får vi derfor

$$
\begin{aligned}
V(X) &= (n+1)(2n+1)/6 - (n+1)^2/4 \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} \\
&= \frac{n^2-1}{12}
\end{aligned}
\tag{1}
$$