Løsninger av utvalgte oppgaver for uke 8

Oppgave 3.51

Vi har oppgitt momentgenererende funksjon

$$M_X(t) = 0.2 + 0.3e^t + 0.5e^{3t}.$$

Fra definisjonen $M_X(t) = \sum_x e^{tx} p(x)$ og en-entydig sammenheng med fordelingen, kan vi konkludere med at punktsannsynlighetene må være

$$\begin{aligned} p(0) &= 0.2, \\ p(1) &= 0.3, \\ p(3) &= 0.5. \end{aligned}$$

Ingen andre verdier er mulige for x. Videre har vi

$$M'_X(t) = 0.3e^t + 0.5 \cdot 3e^{3t}$$
$$M''_X(t) = 0.3e^t + 0.5 \cdot 3 \cdot 3e^{3t}$$

og vi finner

$$E(X) = M'_X(0) = 0.3 + 0.5 \cdot 3 = 1.8$$
$$E(X^2) = M''_X(0) = 0.3 + 0.5 \cdot 3 \cdot 3 = 4.8.$$

Vi får derfor at $V(X) = 4.8 - 1.8^2 = 1.56$.

Oppgave 3.65

Vi har nå en binomisk fordelt X, dvs. $X \sim Bin(25, 0.05)$. Kumulative sannsynligheter

$$F(x) = P(X \leq x)$$

i denne binomiske fordelingen finnes ved hjelp av kommandoene

Matlab: binocdf(x,25,0.05)

Python: stats.binom.cdf(x,25,0.05)

a) $P(X \leq 2) = F(2) = 0.873$

b) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 0.0072$

c) $P(1 \leq X \leq 4) = F(4) - F(0) = 0.715$

d) $P(X = 0) = F(0) = 0.277$

e) Vi har kjente formler for forventning og varians, som gir

$$\begin{aligned} E(X) &= n \cdot p = 25 \cdot 0.05 = 1.25 \\ V(X) &= np(1-p) = 25 \cdot 0.05(1 - 0.05) = 1.1875 \\ sd(X) &= \sqrt{V(X)} = 1.089 \end{aligned}$$

Oppgave 3.67

Vi har nå en binomisk $X \sim Bin(20, 0.25)$. Kumulative sannsynligheter

$$F(x) = P(X \leq x)$$

i denne binomiske fordelingen finnes ved hjelp av kommandoene

Matlab: binocdf(x,20,0.25)

Python: stats.binom.cdf(x,20,0.25)

a) $P(X \leq 6) = F(6) = 0.786$

b) $P(X = 6) = F(6) - F(5) = 0.786 - 0.617 = 0.169$

c) $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - 0.617 = 0.383$

d) $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0.25 = 5$, så vi forventer at 5 av de 20 stopper.

Oppgave 3.78

Vi har nå at X er antall passasjerbiler blant 25 biler som passerer bommen i løpet av et bestem tidsrom på dagen. 60% av alle biler som passerer på dagtid, er passasjerbiler. Gitt uavhengighet mellom bilene som passerer, kan vi anta en binomisk fordeling $X \sim Bin(25, 0.60)$.

Da har vi først at forventet antall passasjerbiler som passerer i løpet av tidsrommet vil være

$$E(X) = n \cdot p = 25 \cdot 0.60 = 15.$$

Bompengeinntektene vil være

$$h(X) = X \cdot 1 + (25 - X) \cdot 2.5 = 62.5 - 1.5X.$$

Forventede bompengeinntekter vil således bli

$$E(h(X)) = E(62.5 - 1.5X) = 62.5 - 1.5E(X) = 62.5 - 1.5 \cdot 15 = 40\$$$

Oppgave 3.94

Vi ser på $n = 10\,000$ computere. Sannsynligheten for at en computer får en bestemt type feil i garantiperioden er $p = 0.0010$. Vi antar at feilene opptrer uavhengig av hverandre for de n computerne. La X være antallet computere som får den aktuelle feilen. Da har vi at $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Siden n er stor og p er liten, har vi at X er tilnærmet Poisson-fordelt med parameter $\lambda = np = 10\,000 \cdot 0.0010 = 10$, se side 147 i læreboka.

a) Hvis vi regner med binomisk fordeling (dvs. uten å tilnærme), finner vi at

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 10\,000 \cdot 0.0010 = 10 \\ SD(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10\,000 \cdot 0.0010 \cdot (1 - 0.0010)} = 3.1607 \end{aligned}$$

Hvis vi regner med Poisson-tilnærmelsen, får vi at

$$\begin{aligned} E(X) &= \lambda = 10 \\ SD(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{10} = 3.1623 \end{aligned}$$

Vi ser at Poisson-tilnærmelsen gir nesten samme standardavvik som det vi får hvis vi bruker binomisk fordeling.

b) Sannsynligheten for at mere enn 10 av computerne har den aktuelle feilen er

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - 0.583 = 0.417$$

Her finner vi $P(X \leq 10) = 0.583$ ved å bruke Matlab eller Python. Matlab-kommando: `poisscdf(10,10)`. Python-kommandoer: `import scipy.stats as stats` og `stats.poisson.cdf(10,10)`

c) Sannsynligheten for at ingen av computerne har feilen er

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-10} = 0.000045$$

Oppgave 3.98

Antall pasienter som kommer til et akuttmottak kan modelleres ved en Poissonprosess med rate $\alpha = 5$ per time.

a) La X være antall pasienter som kommer i løpet av én time. Da har vi at $X \sim \text{Poisson}(5)$. Sannsynligheten for at det kommer fire pasienter i løpet av én time er

$$P(X = 4) = \frac{5^4}{4!} e^{-5} = 0.175$$

Vi kan også bestemme $P(X = 4)$ ved å bruke Matlab eller Python. Matlab-kommando: `poisspdf(4,5)`. Python-kommandoer: `import scipy.stats as stats` og `stats.poisson.pmf(4,5)`

b) Sannsynligheten for at det kommer minst fire pasienter i løpet av én time er

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.265 = 0.735$$

Her finner vi $P(X \leq 3) = 0.265$ ved å bruke Matlab eller Python. Matlab-kommando: `poisscdf(3,5)`. Python-kommandoer: `import scipy.stats as stats` og `stats.poisson.cdf(3,5)`

c) La nå X være antall pasienter som kommer i løpet av 45 minutter, dvs. i løper av 3/4 time. Da har vi at X er Poisson-fordelt med parameter $\lambda = (3/4) \cdot \alpha = (3/4) \cdot 5 = 3.75$. Forventet antall pasienter i løpet av 45 minutter er detmed lik $E(X) = \lambda = 3.75$.