Løsninger av utvalgte oppgaver for uke 9

Oppgave 4.4

La X være "vibratory stress" for et vindmølleblad. Vi antar at tettheten til X er gitt ved

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-x^2/(2\theta^2)} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

a) Vi har at $f(x;\theta) \geq 0$ og

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{\theta^2} e^{-x^2/(2\theta^2)}dx = \left[-e^{-x^2/(2\theta^2)}\right]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Det viser at $f(x;\theta)$ er en sannsynlighetstetthet.

b) Vi antar nå at $\theta = 100$. Da har vi at

$$P(X \leq 200) = \int_0^{200} \frac{x}{100^2} e^{-x^2/(2\cdot 100^2)}dx = \left[-e^{-x^2/(2\cdot 100^2)}\right]_0^{200}$$
$$= 1 - e^{-200^2/(2\cdot 100^2)} = 1 - e^{-2} = 1 - 0.135 = 0.865$$

Vi har videre at

$$P(X < 200) = P(X \leq 200) = 0.865$$

og

$$P(X \geq 200) = 1 - P(X \leq 200) = 1 - 0.865 = 0.135$$

c) Vi finner her at

$$P(100 \leq X \leq 200) = \int_{100}^{200} \frac{x}{100^2} e^{-x^2/(2\cdot 100^2)}dx = \left[-e^{-x^2/(2\cdot 100^2)}\right]_{100}^{200}$$
$$= e^{-100^2/(2\cdot 100^2)} - e^{-200^2/(2\cdot 100^2)} = e^{-1/2} - e^{-2} = 0.471$$

d) For $x > 0$ har vi at

$$P(X \leq x) = \int_0^{x} \frac{y}{\theta^2} e^{-y^2/(2\theta^2)}dy = \left[-e^{-y^2/(2\theta^2)}\right]_0^{x} = 1 - e^{-x^2/(2\theta^2)}$$

Oppgave 4.18

Den stokastiske variabelen X angir lånetid for en bok på korttidslån fra et bibliotek.
Vi antar at X har tettheten

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{for } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Vi har at

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

b) Her har vi at

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{4} = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\sigma_X = SD(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0.471$$

c) Låneren må betale $h(X) = X^2$. Fra punkt b blir forventet betaling gitt ved

$$E[h(X)] = E(X^2) = 2$$

Oppgave 4.23ab

Den stokastiske variabelen X er uniformt fordelt på $[A, B]$. Det betyr at X har tettheten

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} & \text{for } A \le x \le B \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Vi vil finne et uttrykk for $100p$-persentilen $\eta(p)$ der $0 < p < 1$.

Hvis $F(x) = P(X \le x)$ er den kumulative fordelingen til X har vi at $F[\eta(p)] = p$.

For $x < A$ er $F(x) = 0$, og for $x > B$ er $F(x) = 1$. Videre har vi for $A \le x \le B$ at

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{A}^{x} \frac{1}{B-A}dy = \frac{1}{B-A}[y]_A^x = \frac{x-A}{B-A}$$

Vi har dermed at $100p$-persentilen $\eta(p)$ er gitt ved

$$p = F[\eta(p)] = \frac{\eta(p) - A}{B-A}$$

Av dette finner vi at

$$\eta(p) = A + p(B - A)$$

b) Vi vil bestemme $E(X)$, $V(X)$ og $\sigma_X = SD(X)$.

Ved å bruke substitusjonen $u = (x - A)/(B - A)$ får vi:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_A^B x \frac{1}{B-A} dx = \int_0^1 [A + u(B-A)] du$$

$$= A \int_0^1 du + (B-A) \int_0^1 u du = A [u]_0^1 + (B-A) \left[\frac{u}{2}\right]_0^1$$

$$= A + (B-A)\frac{1}{2} = \frac{A+B}{2}$$

På tilsvarende måte finner vi at

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_A^B x^2 \frac{1}{B-A} dx = \int_0^1 [A + u(B-A)]^2 du$$

$$= \int_0^1 [A^2 + 2A(B-A)u + (B-A)^2 u^2] du = A^2 \int_0^1 du + 2A(B-A) \int_0^1 u du + (B-A)^2 \int_0^1 u^2 du$$

$$= A^2 [u]_0^1 + 2A(B-A) \left[\frac{u}{2}\right]_0^1 + (B-A)^2 \left[\frac{u^2}{3}\right]_0^1$$

$$= A^2 + 2A(B-A)\frac{1}{2} + (B-A)^2 \frac{1}{3} = AB + \frac{1}{3}(B-A)^2$$

Dermed får vi

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = AB + \frac{1}{3}(B-A)^2 - \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$$

$$= AB + \frac{B^2 - 2AB + B^2}{3} - \frac{A^2 + 2AB + A^2}{4} = \frac{(B-A)^2}{12}$$

Standardavviket er gitt ved

$$\sigma_X = SD(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(B-A)^2}{12}}$$

Oppgave 4.25

Radiusen R i en sirkel har tetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left[1 - (10-r)^2\right] & \text{for } 9 \le r \le 11 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Arealet av sirkelen er $A = \pi R^2$. Forventet areal blir dermed (vi substituerer $u = r - 10$)

$$E(A) = E(\pi R^2) = \int_9^{11} \pi r^2 \frac{3}{4}\left[1 - (10-r)^2\right] dr = \frac{3}{4}\pi \int_{-1}^{1} (u+10)^2 (1-u^2) du$$

$$= \frac{3}{4}\pi \int_{-1}^{1} (u^2 + 20u + 100)(1-u^2) du = \frac{3}{4}\pi \int_{-1}^{1} (100 + 20u - 99u^2 - 20u^3 - u^4) du$$

$$= \frac{3}{4}\pi \left(100 [u]_{-1}^{1} + 20 \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{1} - 99 \left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} - 20 \left[\frac{u^4}{4}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{u^5}{5}\right]_{-1}^{1}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\pi \left(100 \cdot 2 + 0 - 99\frac{2}{3} - 0 - \frac{2}{5}\right) = \pi \left(150 - \frac{99}{2} - \frac{3}{10}\right)$$

$$= \frac{501}{5}\pi = 314.8$$

Oppgave 4.40abd

Vi antar at $Z \sim N(0,1)$ og setter $\Phi(z) = P(Z \leq z)$.

Vi skal bestemme c slik at utsagnene a, b og d nedenfor er riktige.

a) Utsagn: $\underline{\Phi(c) = 0.9838}$.

Tabell A.3 på sidene 792-793 i læreboka gir $\Phi(z)$ for ulike verdier av z.

Av tabellen ser vi at $\Phi(2.14) = 0.9838$, så $c = 2.14$.

b) Utsagn: $\underline{P(0 \leq Z \leq c) = 0.291}$

Under utsagn b har vi at

$$P(Z \leq c) = P(Z < 0) + P(0 \leq Z \leq c) = 0.50 + 0.291 = 0.792$$

Av tabellen har vi videre at $\Phi(0.81) = 0.7910$, så $c = 0.81$.

d) Utsagn: $\underline{P(-c \leq Z \leq c) = 0.668}$

Siden standardnormalfordelingen er symmetrisk om null, har vi at

$$P(-c \leq Z \leq c) = P(-c \leq Z < 0) + P(0 \leq Z \leq c) = 2P(0 \leq Z \leq c)$$

Hvis $P(-c \leq Z \leq c) = 0.668$, har vi derfor at $P(0 \leq Z \leq c) = 0.334$.

Ved argumentet i punkt b har vi dermed at

$$P(Z \leq c) = P(Z < 0) + P(0 \leq Z \leq c) = 0.50 + 0.334 = 0.834$$

Av tabellen har vi at $\Phi(0.97) = 0.8340$, så $c = 0.97$.

Oppgave 4.44

Kolesterolnivået (i mg/dL) for en pasientgruppe er normalfordelt med forventning $\mu = 200$ og standardavvik $\sigma = 35$. (Kolesterol måles idag vanligvis i mmol/L. Og da svarer 200 mg/dL til 5.2 mmol/L.). La X være kolestreolnivået for en tilfeldig valgt pasient i den aktuelle gruppen. Da er $Z = (X - \mu)/\sigma = (X - 200)/35$ standardnormalfordelt. Nedenfor bruker vi tabell A.3 på sidene 792-793 i læreboka som gir $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ for ulike verdier av z.

a) Sannsynligheten for at pasienten har kolesterolnivå som er høyst 250 mg/dL er:

$$P(X \leq 250) = P\left(\frac{X - 200}{35} \leq \frac{250 - 200}{35}\right) = P(Z \leq 1.43) = \Phi(1.43) = 0.924$$

b) Sannsynligheten for at pasienten har kolesterolnivå som er mellom 300 mg/dL og 400 mg/dL er:

$$P(300 \leq X \leq 400) = P\left(\frac{300 - 200}{35} \leq \frac{X - 200}{35} \leq \frac{400 - 200}{35}\right)$$

$$= P(2.86 \leq Z \leq 5.71) = \Phi(5.71) - \Phi(2.86) = 1 - 0.998 = 0.002$$

c) Vi har at $1.5\sigma = 1.5 \cdot 35 = 52.5$ Sannsynligheten for at pasienten har kolesterolnivå som avviker mere enn 1.5 standardavvik fra forventningen er dermed:

$$P(X \leq \mu - 1.5\sigma) + P(X \geq \mu + 1.5\sigma) = P(X \leq 200 - 52.5) + P(X \geq 200 + 52.5)$$

$$= P\left(\frac{X - 200}{35} \leq \frac{-52.5}{35}\right) + P\left(\frac{X - 200}{35} \geq \frac{52.5}{35}\right) = P(Z \leq -1.5) + P(Z \geq 1.5)$$

$$= P(Z \leq -1.5) + 1 - P(Z \leq 1.5) = \Phi(-1.5) + 1 - \Phi(1.5) = 0.067 + 1 - 0.933 = 0.134$$